

Churp93 ~

、の各点で

$$F'(z) = f(z)$$

となるような正則な関数における原始関数という。

定理

、 $F(z)$  が  $f(z)$  の原始関数であるとき、内の区分的になめらかな曲線に沿う線積分

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

の値は

$$\int_C f(z) dz = [F(z(t))]_a^b = F(z(b)) - F(z(a))$$

である。

$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ 、 $z(t) = x(t) + iy(t)$  とおくと、

$$F(z(t)) = U(x(t), y(t)) + iV(x(t), y(t))$$

$$\frac{d}{dt} F(z(t)) =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$= \frac{d}{dz} F(z) z'(t)$$

$$\frac{d}{dt} F(z(t)) = f(z(t)) z'(t) \quad (F'(z) = f(z) \text{ だから})$$

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b \{F(z(t))\}' dt$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$= F(z(b)) - F(z(a))$$

p112 ~

、 $p$  と  $q$  は領域で与えられた連続関数で、

定理で定義された線積分がの端点のみで定まる必要十分条件は、で  $\partial U / \partial x = p$ ,  $\partial U / \partial y = q$  をみたすような関数  $U(x, y)$  が存在することである。

十分の証明はすぐである。条件がみたされていると、

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} p dx + q dy &= \int_a^b \left( \frac{\partial U}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} y'(t) \right) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) dt \\ &= U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a))\end{aligned}$$

と書け、この差は始点と終点だけできまる。

$a$  を中心とする円  $C$  を考えると、 $z = a + \rho e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  と表され、

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

となる。

以下は自分用のメモ

{ 解析入門 IIp238 }

定義 3 C の領域 D

逆に D 上の函数  $f[= u(x, y) + iv(x, y)]$  に対し、 $F'(z)[= \frac{d}{dx+idy}\{U(x, y) + iV(x, y)\}] = f(z)[= u(x, y) + iv(x, y)]$  ( $\forall z[= x + iy] \in D$ ) となる D 上の正則函数  $F[= U(x, y) + iV(x, y)]$  が存在するとは限らないが、もし存在すれば、 $F[= U(x, y) + iV(x, y)]$  を D における  $f[= u(x, y) + iv(x, y)]$  の原始函数という。

例と説明 複素微分可能 { P162 }

$$D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$$

$$u(x, y) + iv(x, y) = 2x + i2y \quad U(x, y) + iV(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy \text{ とおくと}$$

$\{U + iV\}'(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \{\forall \{x + iy\} \in D\}$  だから  $U(x, y) + iV(x, y)$  は  $u(x, y) + iv(x, y)$  の原始関数

{ 解析入門 IIp238 ~ 239 } { 30 講 P145 ~ 147 }

定理 1.2 C の領域 D 上の連続函数  $f[= u(x, y) + iv(x, y)]$  に対し、D における  $f[= u(x, y) + iv(x, y)]$  の原始関数 { P238 }  $F[= U(x, y) + iV(x, y)]$  が存在する \*1 とき、D 内の任意の区分的  $C^1$  級曲線  $C : z = z(t)[= x(t) + iy(t)]$  ( $a \leq t \leq b$ ) に対し

$$\int_C f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt + i \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\}dt \right. \\ & \quad \left. = \{U(x(b), y(b)) + iV(x(b), y(b))\} - \{U(x(a), y(a)) + iV(x(a), y(a))\} \right] \end{aligned}$$

が成立つ。。特に D 内の区分的  $C^1$  級の任意の閉曲線 { P237 } C に対しては

$$\int_C f(z)dz = 0$$

$$\left[ \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt + i \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\}dt = 0 + i0 \right]$$

が成立つ。

証明 ...

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_a^b F'(z(t))z'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))dt = \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) = F(z_1) - F(z_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt + i \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\}dt \right. \\ &=^*2 \int_a^b \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \right\}dt + i \int_a^b \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) \right\}dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}U(x(t), y(t))dt + i \int_a^b \frac{d}{dt}V(x(t), y(t))dt \\ &=^*3 \{U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a))\} + i\{V(x(b), y(b)) - V(x(a), y(a))\} \\ &= \{U(x(b), y(b)) + iV(x(b), y(b))\} - \{U(x(a), y(a)) + iV(x(a), y(a))\} \end{aligned}$$

〇〇〇〇〇

説明 \* 2 \* 1、 P162 複素微分可能

$u(x, y) + iv(x, y) = \{U + iV\}'(x + iy) \quad \{\forall \{x + iy\} \in D\}$  だから

$u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) = \{U + iV\}'(x(t) + iy(t)) \quad \{\forall t \in \{t | a \leq t \leq b\}\}$

\* 3 微積分法の基本公式 { P231 }

$$\begin{aligned}
 &=^{*2} \int_a^b \frac{d}{dx + idy} \{U(x(t), y(t)) + iV(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt \\
 &= \int_a^b \frac{d}{dt} \{U(x(t), y(t)) + iV(x(t), y(t))\} dt \\
 &[= \int_a^b \frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) dt + i \int_a^b \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) dt] \\
 &=^{*3} \{U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a))\} + i\{V(x(b), y(b)) - V(x(a), y(a))\} \\
 &= \{U(x(b), y(b)) + iV(x(b), y(b))\} - \{U(x(a), y(a)) + iV(x(a), y(a))\}
 \end{aligned}$$

複素解析 p113

定理 1 で定義された線積分  $\int_{\gamma} p dx + q dy$  が  $\gamma$  の端点のみで定まる必要十分条件は、 $\frac{\partial U}{\partial x} = p, \frac{\partial U}{\partial y} = q$  をみたすような関数  $U(x, y)$  が存在することである。

十分の証明はすぐである。条件がみたされていると、慣用の記号を用いて、

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} p dx + q dy &= \int_a^b \left( \frac{\partial U}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} y'(t) \right) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) dt \\ &= U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a))\end{aligned}$$

と

解析入門 p238

定理 1.2

$$\int_C f(z) dz = F(z_1) - F(z_0)$$

$$\int_C f(z) dz = 0$$

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_a^b F'(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt = \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) = F(z_1) - F(z_0) \\ &= \left[ \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right]\end{aligned}$$

30 講 p145

$$f(z) = F'(z)$$

$$\int_C f(z) dz = F() - F()$$

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_0^1 F'(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_0^1 F'(t) dt = F(1) - F(0) \\ &= F() - F()\end{aligned}$$

複素関数 p65

$$1 = \{\forall \epsilon > 0\}$$

$$2 = \{\exists n_0 \in N\}$$

$$3 = \{n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\}$$

$$4 = \{x|0 \leq x \leq 1\}$$

$$5 = \delta$$

$$6 \cdot 6 \quad 7 \cdots 7 \quad 8 = \vec{a} \quad 9 = \sqrt{a}$$

$$10 = \left\{\frac{b}{a}\right\}$$

$$11 = \left\{\frac{b}{a}\right\}$$

$$12 = \sum_{i=1}^n$$

$$13 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$14 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$15 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 16 &= a \\ &= b \\ &= c \end{aligned}$$

$$17 = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

定義 18

[次のページへ続く。]

$$19 = \int_a^b$$

$$20 = \alpha \quad 21 = \beta \quad 22 = \theta \quad 23 = \mu \quad 24 = \pi \quad 25 = \rho \quad 26 = \phi \quad 27 = \psi \quad 28 = \Delta$$

$$29 = \partial$$