

コーシーの定理 { 解析入門 II p242 ~ }

定理 2.1 { 三角形に関するコーシーの定理 }

函数  $f(z)$  は、 $C$  の領域  $D$  で正則 {  $\Rightarrow$  I.162 } で \*、三角形  $T$  の周  $C$  および内部が  $D$  に含まれるとき

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad \{s\}$$

が成立つ。

証明 三角形  $T = T_0$  の各辺の中点を結んで、 $T$  を四個の合同な三角形  $T^{\{k\}} \{1 \leq k \leq 4\}$  に分割し、 $T^{\{k\}}$  の周に正の向きをつけたものを  $C^{\{k\}}$  とする。からわかるように  $T$  の内部にある  $T^{\{k\}}$  の辺では、(1.7) により反対向きの積分が打消し合うから

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{C^{\{k\}}} f(z) dz \quad (2.3)$$

となる。いま  $\left| \int_{C^{\{k\}}} f(z) dz \right| \quad (1 \leq k \leq 4)$  が最大となる  $C^{\{k\}}$  を  $C_1$  と置けば (2.3) から

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_1} f(z) dz \right|$$

を得る。 $C_1$  を辺とする三角形  $T_1$  を、また四等分して同じことを繰返すと、三角形の単調減少列

$$\supset T_1 \supset T_2 \supset$$

が得られ、 $T_n$  の辺  $C_n$  上の積分は

$$\left| \int_{C_n} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_1} f(z) dz \right|$$

を満たす。そして三角形の直径は

を満たすから、区間縮小法を、の軸、軸への正射影に適用することにより、

$$\bigcap_{n \in N} T_n = \{\zeta\}$$

となる一点  $\zeta$  が存在する。だから、ある  $\zeta$  が存在して

となる。また  $f$  は  $\zeta \in D$  で複素微分可能だから \*、任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  を十分小さく取れば、次の (2.10) が成立つ。

$$0 < |z - \zeta| < \delta \quad \text{ならば} \quad \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \epsilon \quad (2.10)$$

$$|f(z) - f(\zeta) - (z - \zeta)f'(\zeta)| < \epsilon |z - \zeta|$$

いま (), (2.10) が成立つように  $\delta > 0$  を取っておく。このとき (), () から

$n_0 \in N$  が存在して任意の  $n \geq n_0$  に対し、 $T_n \subset$  となる\*。

いま  $z$  の一次関数  $f(\zeta) + f'(\zeta)\{z - \zeta\}$  は、 $D$  上で原始函数  $=$  を持つから、定理 1.2 により

$$\int_{C_n} \{f(\zeta) + f'(\zeta)\{z - \zeta\}\} dz = 0 \quad (2.12)$$

である。そこでいま任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し

$$J_n = \left| \int_{C_n} f(z) dz \right|$$

と置くと、(2.12) (2.10) (2.1) と命題 1.1,1) により次の不等式が成立つ。

$$\begin{aligned} J_n &= \left| \int_{C_n} \{f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)\{z - \zeta\}\} dz \right| \\ &\stackrel{*5}{\leq} \int_{C_n} |f(z) - f(\zeta) - (z - \zeta)f'(\zeta)| |dz| \\ &\stackrel{*6}{<} \int_{C_n} \epsilon |z - \zeta| |dz| \end{aligned}$$

ここで  $\epsilon$  の距離  $|z - \zeta|$  を満たす。またの長さであるから、より  
を得る。とより

$$\left| \int_{C_n} f(z) dz \right| < 4^n \epsilon \frac{L^2}{4^n}$$

が成立つ。ここで  $\epsilon > 0$  は任意の正数だから  $\epsilon \rightarrow 0$ 、(2.2) が証明された。

説明

\* 3 \* 1

\* 5 IIp237

\* 6 (2.10)

\* 7  $\epsilon$  によって  $\delta$  を、 $\delta$  によって  $n \dots$  重要

| 定数 |  $< \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) 定数 = 0

$$\begin{aligned} &\left| \int_{C_n} f(z(t)) z'(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{C_n} f(z(t)) z'(t) dt + \int_{C_n} \{-f(\zeta) - f'(\zeta)\{z(t) - \zeta\}\} z'(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{C_n} \{f(z(t)) - f(\zeta) - f'(\zeta)\{z(t) - \zeta\}\} z'(t) dt \right| \\ &\stackrel{*5}{\leq} \int_{C_n} |f(z(t)) - f(\zeta) - f'(\zeta)\{z(t) - \zeta\}| |z'(t)| dt \\ &\stackrel{*6}{<} \int_{C_n} \epsilon |z(t) - \zeta| |z'(t)| dt \end{aligned}$$

{ p116 ~ }

定理 2.  $f(z)$  が  $R$  で解析的 { } ならば次の式が成り立つ { s } \*1 :

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0 \quad \{ cs \}$$

証明は長方形を細分していく方法による。記号として

$$\eta(R) = \int_{\partial R} f(z) dz \quad \{ t \}$$

とおき、この記号は  $R$  に含まれる他の長方形に対しても準用する。 $R$  を 4 つの合同な長方形  $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$  に分割すると、

$$\eta(R) = \eta(R^{(1)}) + \eta(R^{(2)}) + \eta(R^{(3)}) + \eta(R^{(4)}) \quad (13) \{ t \}$$

がなりたつ。共通辺の上の積分は互いに打ち消しあうからである \*2。、、、。

(13) から少なくとも 1 つの長方形  $R^{(k)}, k = 1, 2, 3, 4$  は、条件

$$|\eta(R^{(k)})| \geq \frac{1}{4} |\eta(R)| \quad \{ t \}$$

をみたさねばならない。この長方形を  $R_1$  とかくことにする; もしいくつかの  $R^{(k)}$  がこの性質をもつなら、あるきまった規則でどれかを選ぶことにしておけばよい。

この方法は次次とくり返していくことができ、長方形の列  $RR_1R_2R_n$  で、

$$|\eta(R_n)| \geq \frac{1}{4} |\eta(R_{n-1})|$$

をみだし、したがって

$$|\eta(R_n)| \geq 4^{-n} |\eta(R)| \quad (14)$$

をみたすものをうる。

長方形  $R_n$  は 1 点  $z^* \in R$  に収束する { t }; その意味は、近傍  $|z - z^*| < \delta$  を任意に与えたときに、 $n$  を十分大きくすれば  $R_n$  はみなその近傍に入ってしまう。まず  $\delta$  を小さくして、 $|z - z^*| < \delta$  で  $f(z)$  が解析的であるようにしておく。次に、 $\varepsilon > 0$  が与えられたとして、 $0 < |z - z^*| < \delta$  のときに

$$\left| \frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*) \right| < \varepsilon \quad \{ c \}$$

となるように、または修正して

$$|f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)| < \varepsilon |z - z^*| \quad (15) \{ 高 \}$$

となるように  $\delta$  をとる \*3。 $\delta$  は上の 2 つの条件を同時にみたし、 $R_n$  は  $|z - z^*| < \delta$  に含まれると仮定してよい。

さて、

$$\int_{\partial R_n} dz = 0, \quad \int_{\partial R_n} z dz = 0 \quad \{ c \}$$

に注意する。、、、、 $1, z$  がそれぞれ  $z, z^2/2$  の導関数であるという事実にもとづいていた \*4。

この式のおかげで、

$$\eta(R_n) = \int_{\partial R_n} [f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)] dz$$

と書くことができ、(15) により

$$\begin{aligned} |\eta(R_n)| &\leq \int_{\partial R_n} |f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)| |dz| \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial R_n} |z - z^*| |dz| \quad (16) \end{aligned}$$

をうる\*。

最後の積分で、 $|z - z^*|$  は  $R_n$  の対角線の長さ  $d_n$  より以下である。 $R_n$  の周の長さを  $L_n$  と書くと、積分はしたがって  $\leq d_n L_n$  となる。 $d, L$  をもとの長方形の対応するものにとすると、明らかにである。ゆえに、(16) により

$$|\eta(R_n)| \leq 4^{-n} d L \varepsilon$$

がえられ、(14) と比べて

$$|\eta(R)| \leq d L \varepsilon$$

をうる。ここで  $\varepsilon$  は任意だから  $\eta(R) = 0$  でなければならず、定理は証明された。

$$\left[ \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\} dt + i \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\} dt = \right]$$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x + iy \{0 < |x + iy - \{x^* + iy^*\}| < \delta\},$$

$$\left| \frac{\{u(x, y) + iv(x, y)\} - \{u(x^*, y^*) + iv(x^*, y^*)\}}{\{x + iy\} - \{x^* + iy^*\}} - \frac{d}{dx + idy} \{u(x^*, y^*) + iv(x^*, y^*)\} \right| < \varepsilon \quad *4]$$

$$\left[ \int_{\partial R_n} f(z(t)) z'(t) dt = \int_{\partial R_n} [f(z(t)) - f(z^*) - (z(t) - z^*)f'(z^*)] z'(t) dt \right]$$

$$\left[ \left| \int_{\partial R_n} f(z(t)) z'(t) dt \right| < \varepsilon \int_{\partial R_n} |z(t) - z^*| |z'(t)| dt \right]$$

$$\begin{aligned} &\left[ \left| \int_{C_n} f(z(t)) z'(t) dt \right| \right. \\ &= \left| \int_{C_n} \{f(z(t)) - f(z^*) - \{z(t) - z^*\}f'(z^*)\} z'(t) dt \right| \\ &\leq \int_{C_n} |\{f(z(t)) - f(z^*) - \{z(t) - z^*\}f'(z^*)\}| |z'(t)| dt \\ &< \varepsilon \int_{C_n} |z(t) - z^*| |z'(t)| dt \end{aligned}$$

複素関数入門 p85 ~

定理

はすべて区分的になめらかなジョルダン曲線で、 $C_j$  はすべて  $C$  の内部にあり、しかも、 $C_j$  の内部の点は互いに共通点をもたない。 $R$  は、 $C$  の内部から  $C_j$  の内部の点を除いた部分と  $C$  上の点からなる集合とする。また、 $R$  の内部が左にあるように  $C$  と  $C_j$  に向きをつけた  $R$  の境界を  $B$  とする。

このとき、 $f(z)$  が  $R$  で正則ならば

$$= 0$$

である。

$C$  と  $C_1$  を曲線  $L_1$  で、 $C_1$  と  $C_2$  を曲線  $L_2$  で、 $\dots$  とを曲線で、 $C_n$  と  $C$  を曲線  $L_{n+1}$  で結び、図のように向きをつけて、

このとき、コーシー・グルサの定理によって

$$= \int_{K_1} f(z)dz + \int_{K_2} f(z)dz = 0$$

である。ところで、上にはつの向きがつくことになるが、反対方向を積分すると値はになる。すなわち、

$$+ = 0$$

より

$$=$$

であるから、

$$\int_C f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz = 0 \quad (5)$$

定理長方形  $R$  から有限個の内点を除いてえられる集合を  $R'$  とし、 $f(z)$  は  $R'$  で解析的とする。  
すべての  $j$  に対し

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$$

が成り立つならば<sup>\*1</sup>、次の式が成り立つ：

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

を小長方形にわけ小長方形の各々は高々つしかを含まないようにできるから、除外点をただ一つ含む場合を考えれば十分である。図にしめすように  $R$  を 9 個の長方形にわけ、まん中の長方形  $R_0$  を除き他の長方形全部に定理 2 を用いる。(12) に対応する式を全部加えて、打ち消し合う所を消すと<sup>\*2</sup>、

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial R_0} f(z) dz$$

をうる。 $\varepsilon > 0$  を与えたときに、長方形  $R_0$  を小さくとりの上で

$$|f(z)|$$

となるようにできる<sup>\*3</sup>。こうすると

<sup>\*2</sup>

$$\int_{\partial R} f(z) dz - \int_{\partial R_0} f(z) dz = 0$$

<sup>\*3</sup><sup>\*1</sup>

以下は自分用のメモ

{ p116 ~ 120 }

定理 2.  $f(z)$  が  $R$  で解析的  $\{ \}$  ならば次の式が成り立つ  $\{ s \}$  \*1 :

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0 \quad \{ cs \}$$

証明は長方形を細分していく方法による。記号として

$$\eta(R) = \int_{\partial R} f(z) dz \quad \{ t \}$$

とおき、この記号は  $R$  に含まれる他の長方形に対しても準用する。 $R$  を 4 つの合同な長方形  $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$  に分割すると、

$$\eta(R) = \eta(R^{(1)}) + \eta(R^{(2)}) + \eta(R^{(3)}) + \eta(R^{(4)}) \quad (13) \{ t \}$$

がなりたつ。共通辺の上の積分は互いに打ち消しあうからである \*2。、、、。

(13) から少なくとも 1 つの長方形  $R^{(k)}, k = 1, 2, 3, 4$  は、条件

$$|\eta(R^{(k)})| \geq \frac{1}{4} |\eta(R)| \quad \{ t \}$$

をみたさねばならない。この長方形を  $R_1$  とかくことにする; もしいくつかの  $R^{(k)}$  がこの性質をもつなら、あるきまった規則でどれかを選ぶことにしておけばよい。

この方法は次次とくり返していくことができ、長方形の列  $RR_1R_2R_n$  で、

$$|\eta(R_n)| \geq \frac{1}{4} |\eta(R_{n-1})|$$

をみだし、したがって

$$|\eta(R_n)| \geq 4^{-n} |\eta(R)| \quad (14)$$

をみたすものをうる。

長方形  $R_n$  は 1 点  $z^* \in R$  に収束する  $\{ t \}$ ; その意味は、近傍  $|z - z^*| < \delta$  を任意に与えたときに、 $n$  を十分大きくすれば  $R_n$  はみなその近傍に入ってしまう。まず  $\delta$  を小さくして、 $|z - z^*| < \delta$  で  $f(z)$  が解析的であるようにしておく。次に、 $\varepsilon > 0$  が与えられたとして、 $0 < |z - z^*| < \delta$  のときに

$$\left| \frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*) \right| < \varepsilon \quad \{ c \}$$

となるように、または修正して

$$|f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)| < \varepsilon |z - z^*| \quad (15) \{ 高 \}$$

となるように  $\delta$  をとる \*3。 $\delta$  は上の 2 つの条件を同時にみたし、 $R_n$  は  $|z - z^*| < \delta$  に含まれると仮定してよい。

さて、

$$\int_{\partial R_n} dz = 0, \quad \int_{\partial R_n} z dz = 0 \quad \{ c \}$$

に注意する。、、、、 $1, z$  がそれぞれ  $z, z^2/2$  の導関数であるという事実にもとづいていた \*4。



この式のおかげで、

$$\eta(R_n) = \int_{\partial R_n} [f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)] dz$$

と書くことができ、(15) により

$$\begin{aligned} |\eta(R_n)| &\leq \int_{\partial R_n} |f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)| |dz| \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial R_n} |z - z^*| |dz| \quad (16) \end{aligned}$$

をうる\*。

最後の積分で、 $|z - z^*|$  は  $R_n$  の対角線の長さ  $d_n$  より以下である。 $R_n$  の周の長さを  $L_n$  と書くと、積分はしたがって  $\leq d_n L_n$  となる。 $d, L$  をもとの長方形の対応するものとする、明らかにである。ゆえに、(16) により

$$|\eta(R_n)| \leq 4^{-n} d L \varepsilon$$

がえられ、(14) と比べて

$$|\eta(R)| \leq d L \varepsilon$$

をうる。ここで  $\varepsilon$  は任意だから  $\eta(R) = 0$  でなければならず、定理は証明された。

$$\left[ \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\} dt + i \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\} dt = \right]$$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x + iy \{0 < |x + iy - \{x^* + iy^*\}| < \delta\},$$

$$\left| \frac{\{u(x, y) + iv(x, y)\} - \{u(x^*, y^*) + iv(x^*, y^*)\}}{\{x + iy\} - \{x^* + iy^*\}} - \frac{d}{dx + idy} \{u(x^*, y^*) + iv(x^*, y^*)\} \right| < \varepsilon \quad *4]$$

$$\left[ \int_{\partial R_n} f(z(t))z'(t)dt = \int_{\partial R_n} [f(z(t)) - f(z^*) - (z(t) - z^*)f'(z^*)]z'(t)dt \right]$$

$$\left[ \left| \int_{\partial R_n} f(z(t))z'(t)dt \right| < \varepsilon \int_{\partial R_n} |z(t) - z^*||z'(t)|dt \right]$$

$$\begin{aligned} &\left[ \left| \int_{C_n} f(z(t))z'(t)dt \right| \right. \\ &= \left| \int_{C_n} \{f(z(t)) - f(z^*) - \{z(t) - z^*\}f'(z^*)\}z'(t)dt \right| \\ &\leq \int_{C_n} |\{f(z(t)) - f(z^*) - \{z(t) - z^*\}f'(z^*)\}||z'(t)|dt| \\ &< \int_{C_n} |z(t) - z^*||z'(t)|dt \end{aligned}$$

複素関数入門 p88 ~ 93

補助定理

証明

から、は

$$f(z) = f(z_j) - z_j f'(z_j) + f'(z_j)z + (z - z_j)(z)()$$

と表される。をに沿って積分すると、

$$\int_{C_j} dz = 0, \quad \int_{C_j} z dz = 0$$

であることから、

$$\int_{C_j} f(z) dz = \int_{C_j} (z - z_j)(z) dz \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

隣り合う ( ) 正方形の共通部分である境界を逆方向にを積分すると、そこにおけるの積分の値は互いに打ち消されるから ( )

$$\int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z) dz \quad (\text{ア } 13?)$$

$$\int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} (z - z_j)(z) dz$$

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_{C_j} |z - z_j| |z| |dz| \quad (\text{の } (9))$$

$$< \epsilon \sum_{j=1}^n \int_{C_j} |z - z_j| |dz| \quad ((4) \text{ から}) \quad (\text{ア } 16)$$

正方形の場合、その一辺の長さをとすると

部分正方形の場合、その周のうちの部分の長さをとすれば

したがって、正方形であっても部分正方形であっても

$\int_C f(z) dz$  は任意の正数  $\epsilon$  に無関係な定数であり、最後の項は  $\epsilon$  を小さくすればいくらでも小さくできる。したがって、定数  $\int_C f(z) dz$  は 0 でなければならない。これで、コーシー・グルサの定理の証明ができた。

コーシーの定理 { 解析入門 IIp243 ~ 245 } { 解析入門 IIp235 }

定理 2.1 { 三角形に関するコーシーの定理 }

函数  $u(x, y) + iv(x, y)$  は、 $C$  の領域  $D$  で正則 { Ip162 }<sup>\*1</sup> で、三角形  $T$  の周  $C$  および内部が  $D$  に含まれるとき

$$\int_C f(z) dz = 0$$

$\left[ \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\} dt + i \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\} dt = \right]$  が成立つ。

証明 三角形  $T = T_0$  の各辺の中点を結んで、 $T$  を四個の合同な三角形  $T^{(k)}$  {  $1 \leq k \leq 4$  } に分割し、 $T^{(k)}$  の周を  $C^{(k)}$  とする。からわかるように  $T$  の内部にある  $T^{(k)}$  の辺では、により反対向きの積分が打消し合うから

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{C^{(k)}} f(z) dz$$

となる。いま  $\left| \int_{C^{(k)}} f(z) dz \right|$  (  $1 \leq k \leq 4$  ) が最大となる  $C^{(k)}$  を  $C_1$  と置けばから

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_1} f(z) dz \right|$$

を得る。 $C_1$  を辺とする三角形  $T_1$  を、また四等分して同じことを繰り返すと、三角形の単調減少列が得られ、 $T_n$  の辺  $C_n$  上の積分は

$$\left| \int_{C_n} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_1} f(z) dz \right|$$

を満たす。そして三角形の直径は

を満たすから、区間縮小法を、の軸、軸への正射影に適用することにより、

$$= \{\zeta\}$$

となる一点  $\zeta$  が存在する。だから、ある  $\zeta$  が存在して

となる。また  $f[= u(x, y) + iv(x, y)]$  は  $\zeta \in D$  で複素微分可能<sup>\*3</sup> だから、任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  を十分小さく取れば、次の (2.10) が成立つ。

$$0 < |z - \zeta| < \delta \quad \text{ならば} \quad \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \epsilon \quad (2.10)$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x + iy \{0 < |x + iy - \{\zeta + i\xi\}| < \delta\},$$

$$\left| \frac{\{u(x, y) + iv(x, y)\} - \{u(\zeta, \xi) + iv(\zeta, \xi)\}}{x + iy - \{\zeta + i\xi\}} - \frac{d}{dx + idy} \{u(\zeta, \xi) + iv(\zeta, \xi)\} \right| < \epsilon \quad *4]$$

いま (2.10) が成立つように  $\delta > 0$  を取っておく。このとき、(2.10) から

$n_0 \in N$  が存在して任意の  $n \geq n_0$  に対し、となる。

いま  $z$  の一次函数  $f(\zeta) + f'(\zeta)\{z - \zeta\}$  は、 $D$  上で原始函数 = を持つから、定理 1.2 により

$$\int_{C_n} \{f(\zeta) + f'(\zeta)\{z - \zeta\}\} dz = 0 \quad (2.12)$$

$$[\int_{C_n} \{f(\zeta) + f'(\zeta)\{z(t) - \zeta\}\} z'(t) dt = 0]$$

である。そこでいま任意の  $n \in N$  に対し

$$J_n = \left| \int_{C_n} f(z) dz \right|$$

と置くと、(2.12) (2.10) と命題 1.1, 1) により次の不等式が成立つ。

$$J_n = \left| \int_{C_n} \{f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)\{z - \zeta\}\} dz \right|$$

$$< \int_{C_n} \epsilon |z - \zeta| |dz|$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left| \int_{C_n} f(z(t)) z'(t) dt \right| \right. \\ & = \left| \int_{C_n} f(z(t)) z'(t) dt + \int_{C_n} \{-f(\zeta) - f'(\zeta)\{z(t) - \zeta\}\} z'(t) dt \right| \\ & = \left| \int_{C_n} \{f(z(t)) - f(\zeta) - f'(\zeta)\{z(t) - \zeta\}\} z'(t) dt \right| \\ & \leq^{*5} \int_{C_n} |\{f(z(t)) - f(\zeta) - f'(\zeta)\{z(t) - \zeta\}\}| |z'(t)| dt \\ & <^{*6} \int_{C_n} \epsilon |z(t) - \zeta| |z'(t)| dt \end{aligned}$$

ここでとの距離はを満たす。またの長さであるから、より  
を得る。とより

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < 4^n \epsilon \frac{L^2}{4^n}$$

が成立つ。ここで  $\epsilon > 0$  は任意の正数だから <sup>\*7</sup>、(2.2) が証明された。

説明 \* 2

\* 3 \* 1

\* 5 Иp237

\* 6 \* 4

\* 7  $\epsilon$  によって  $\delta$  を、 $\delta$  によって  $n \dots$  重要

| 定数 | <  $\epsilon$   $\epsilon > 0$  } 定数 = 0

解析概論 p208

定理 51. 解析函数は領域において正則で、すべてに属するとする。然らば  
 の各辺の中点を結んで、それを四つの合同なる三角形に分ける。然らば。右辺の四つの積分のう  
 ちで絶対値の最大なるもの（の一つ）をとすれば

同じようにを四等分してなる三角形を得る。このような操作を限りなく継続すれば  
 なる三角形を得るが、だから、は一点  $z_0$  に収束する（）。は三角形に属し、従って  $K$  の内点で  
 ある。

すなわち任意のに対して

$$|z - z_0| < \delta \quad \text{なるとき} \quad |f(z) - \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\}| < \epsilon |z - z_0|$$

であるようにが取られる。然るにを十分大きく取ればは全くなる円の中に入る。故に

$$\left| \int_{C_n} [f(z) - \{f(z_0) + f'(z_0)\{z - z_0\}\}] dz \right| < \epsilon \int_{C_n} |z - z_0| ds$$

30p152

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|$$

30p154

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{C_n} f(z) - \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\} dz \right| \\ &\leq \int_{C_n} |f(z) - \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\}| |dz| \\ &< \epsilon \int_{C_n} |z - z_0| |dz| \quad ((6) \text{ による}) \\ &< \epsilon L_n \int |dz| \\ &< \epsilon L_n^2 \end{aligned}$$

物理数学 (前期) 講義

関数論と微分方程式 p108

$$\left| \int_{C_n} f(z) dz \right| < A\epsilon$$

記号

$$|f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)| < \varepsilon|z - z^*| \quad (\mathcal{A} 15)$$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x + iy \{0 < |\{x + iy\} - \{x^* + iy^*\}| < \delta\},$$

$$|\{u(x, y) + iv(x, y)\} - \{u(x^*, y^*) + iv(x^*, y^*)\} - \{\{x + iy\} - \{x^* + iy^*\}\}f'(z^*)| < \varepsilon|\{x + iy\} - \{x^* + iy^*\}| \quad *4]$$

コーシーの定理 { 解析入門 P243 ~ 245 } { 解析入門 P235 }

定理 2.1 { 三角形に関するコーシーの定理 }

函数  $u(x, y) + iv(x, y)$  は、 $C$  の領域  $D$  で正則 { P162 } で、三角形  $T$  の周  $C$  および内部が  $D$  に含まれるとき

$$\int_C \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt = 0 + i0$$

が成立つ。

証明 三角形  $T$  の各辺の中点を結んで、 $T$  を四個の合同な三角形  $T^{\{k\}} \{1 \leq k \leq 4\}$  に分割し、の周を  $C^{\{k\}}$  とする。

$$\int_C \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt = \sum_{k=1}^4 \int_{C^{\{k\}}} \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt$$

となる。いま  $\left| \int_{C^{\{k\}}} \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt \right|$  が最大となる  $C^{\{k\}}$  を  $C_1$  と置けば

$$\left| \int_C \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt \right| \leq 4 \left| \int_{C_1} \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt \right|$$

を得る。 $C_1$  を辺とする三角形  $T_1$  を、また四等分して同じことを繰り返すと、

$$\left| \int_C \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt \right| \leq 4^n \left| \int_{C_n} \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt \right|$$

を満たす。

また  $u(x, y) + iv(x, y)$  は  $\{\zeta + i\xi\} \in D$  で複素微分可能 { P162 } だから、どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |\{x + iy\} - \{\zeta + i\xi\}| < \delta$  となるすべての  $\{x + iy\} \in D$  に対し

$$\left| \frac{\{u(x, y) + iv(x, y)\} - \{u(\zeta, \xi) + iv(\zeta, \xi)\}}{\{x + iy\} - \{\zeta + i\xi\}} - \{u + iv\}'(\zeta + i\xi) \right| < \epsilon \quad *4$$

いまが成立つように  $\delta > 0$  を取っておく。

いま  $x + iy$  の函数  $u(\zeta, \xi) + iv(\zeta, \xi) + \{u + iv\}'(\zeta + i\xi)\{\{x + iy\} - \{\zeta + i\xi\}\}$  は、 $D$  で原始函数を持つから、定理 1.2 { P238 } により

$$\int_{C_n} \{\{u(\zeta, \xi) + iv(\zeta, \xi)\} + \{u + iv\}'(\zeta + i\xi)\{\{x(t) + iy(t)\} - \{\zeta + i\xi\}\}\} \{x + iy\}'(t) dt = 0 + i0$$

である。そこでいま任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し

[次のページへ続く。]

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{C_n} \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt \right| \\
[= & \left| \int_{C_n} \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt \right. \\
& \left. + \int_{C_n} \{-\{u(\zeta, \xi) + iv(\zeta, \xi)\} - \{u + iv\}'(\zeta + i\xi) \{\{x(t) + iy(t)\} - \{\zeta + i\xi\}\}\} \{x + iy\}'(t) dt \right| \\
= & \left| \int_{C_n} \{\{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} - \{u(\zeta, \xi) + iv(\zeta, \xi)\} - \{u + iv\}'(\zeta + i\xi) \{\{x(t) + iy(t)\} - \{\zeta + i\xi\}\}\} \{x + iy\}'(t) dt \right| \\
[ \leq^{*5} & \int_{C_n} |\{\{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} - \{u(\zeta, \xi) + iv(\zeta, \xi)\} - \{u + iv\}'(\zeta + i\xi) \{\{x(t) + iy(t)\} - \{\zeta + i\xi\}\}\}| \{x + iy\}'(t) | dt| \\
<^{*6} & \int_{C_n} \epsilon |\{x(t) + iy(t)\} - \{\zeta + i\xi\}| |\{x + iy\}'(t)| dt \\
& \text{を得る。}
\end{aligned}$$

$$\left| \int_C \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt \right| < 4^n \epsilon \frac{L^2}{4^n}$$

が成立つ。ここで  $\epsilon > 0$  は任意の正数だから、<sup>\*7</sup> 証明された。

説明 \* 2

\* 3 \* 1

\* 5 P 2 3 7

\* 6 \* 4

\* 7  $\epsilon$  によって  $\delta$  を、 $\delta$  によって  $n \dots$  重要

| 定数 |  $< \epsilon$   $\epsilon > 0$  } 定数 = 0





{ 解析入門 P235 }

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z(t) = x(t) + iy(t)$$

{ 解析入門 P243 ~ 245 }

定理 2.1 { 三角形に関するコーシーの定理 }

函数  $f(z)$  は、 $C$  の領域  $D$  で正則で、三角形  $T$  の周  $C$  および内部が  $D$  に含まれるとき

$$\int_C f(z)dz = 0$$

が成立つ。

証明 三角形  $T$  の各辺の中点を結んで、 $T$  を四個の合同な三角形  $T^{\{k\}}$   $\{1 \leq k \leq 4\}$  に分割し、  
の周を  $C^{\{k\}}$  とする。

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^4 \int_{C^{\{k\}}} f(z)dz$$

となる。いま  $\left| \int_{C^{\{k\}}} f(z)dz \right|$  が最大となる  $C^{\{k\}}$  を  $C_1$  と置けば

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_1} f(z)dz \right|$$

を得る。 $C_1$  を辺とする三角形  $T_1$  を、また四等分して同じことを繰り返すと、

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f(z)dz \right|$$

を満たす。

また  $f$  は  $\zeta \in D$  で複素微分可能だから、どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |z - \zeta| < \delta$   
となるすべての  $z \in D$  に対し

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \epsilon$$

いまが成立つように  $\delta > 0$  を取っておく。

いま  $z$  の函数  $f(\zeta) + f'(\zeta)\{z - \zeta\}$  は、 $D$  で原始函数を持つから、定理 1.2 により

$$\int_{C_n} \{f(\zeta) + f'(\zeta)\{z - \zeta\}\} dz = 0$$

$$\left[ \int_{C_n} \{f(\zeta) + f'(\zeta)\{z(t) - \zeta\}\} z'(t) dt = 0 \right]$$

である。そこでいま任意の  $n \leq N$  に対し

[次のページへ続く。]

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{C_n} f(z) dz \right| \\
& \quad \left[ \left| \int_{C_n} f(z(t)) z'(t) dt \right| \right] \\
& = \left| \int_{C_n} f(z) dz + \int_{C_n} \{-f(\zeta) - f'(\zeta)\{z - \zeta\}\} dz \right| \\
& = \left| \int_{C_n} \{f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)\{z - \zeta\}\} dz \right| \\
& \quad \left[ \left| \int_{C_n} \{f(z(t)) - f(\zeta) - f'(\zeta)\{z(t) - \zeta\}\} z'(t) dt \right| \right] \\
& \leq^{\ast 5} \int_{C_n} |\{f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)\{z - \zeta\}\}| |dz| \\
& < \int_{C_n} \epsilon |z - \zeta| |dz| \\
& \quad \left[ \int_{C_n} \epsilon |z(t) - \zeta| |z'(t)| dt \right]
\end{aligned}$$

を得る。

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < \epsilon L^2$$

が成立つ。ここで  $\epsilon > 0$  は任意の正数だから、証明された。

イプシロン-デルタ p44 ~

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon$$