

{ Churp100 ~ }

定理

正の向きをもった区分的になめらかなジョルダン曲線 C の上と内部で $f(z)$ は正則 {⇒1.162} であるとする *¹。 z_0 が C の内部の任意の点のとき、

コーシーの積分公式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \{ct\}$$

が成り立つ。

$f(z)$ は $z = z_0$ で連続であるから *²、任意の正数 ε に対して、適当な正数 δ を選ぶと

$$|z - z_0| < \text{なるすべての } z \text{ に対して } |f(z) - f(z_0)| <$$

が成り立つ。

したがって、 ρ を δ より小さく、かつ、正の向きをもつ円 $C_0 : |z - z_0| = \rho$ が C の内部に含まれるくらい小さくとると、

$$|z - z_0| = \rho \text{ なるすべての } z \text{ に対して } |f(z) - f(z_0)| <$$

が成り立つことになる。

z_0 を除いた C の内部と C の上で、関数 $f(z)/(z - z_0)$ は正則であるから、コーシー・グルサの定理 ({ }) によって

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad *^3 \\ &= \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \\ &= \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{C_0} \frac{1}{z - z_0} dz \quad () \\ &= \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{C_0} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ \left| \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| &= \left| \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \int_{C_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| \quad () \\ &< \int_{C_0} \frac{\varepsilon}{\rho} |dz| = \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon \end{aligned}$$

この左辺は負でない定数であり、これが任意に小さい正数より小であるから、でなければならない。

解説

*²*¹

*³ 大きさによらない

$f(z)$ は解析的であると仮定しているけれども、 $f(z)/(z - z_0)$ は、 $z = z_0$ で解析的でない。

$$[\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = ?]$$

\mathbb{R} で正則

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

複素解析 p126 ~

$f(z)$ は開円板 Δ で解析的 $\{ \}$ とする *1 。 Δ 内の閉曲線 γ と、 γ の上にない点 $a \in \Delta$ をとる。 コーシーの定理を関数

$$F(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

に適用しよう。 この関数は $z \neq a$ なら解析的である。 $z = a$ では定義されていないが、

$$\lim_{z \rightarrow a} F(z)(z - a) = \lim_{z \rightarrow a} (f(z) - f(a)) = {}^{*2} 0$$

[任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して、 $|z - a| < \delta, z \neq a$ となる任意の z に対し $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ となる]

となり、定理 5 の条件をみたす。 ゆえに、

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = 0 \quad \{ c \}$$

がいえる。 この式を書きかえると

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$$

となり、右辺の積分は定義により $2\pi i \cdot n(\gamma, a)$ である。 これで次の定理がえられた：

定理 は開円板で解析的で、は内の閉曲線とする。 このとき、のの上にない任意の点に対し

$$n(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

が成り立つ。 ここで、はに関するの指数である。

$n(\gamma, a) = 1$ のときが一番よく用いられる * 。 そのときは

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz \quad \{ c \}$$

となり、。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (22)$$

コーシーの積分公式と普通よばれる公式はこれである。

以下は自分用のメモ

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x+iy \{0 < |\{x+iy\} - \{a+ib\}| < \delta\}, |\{u(x,y)+iv(x,y)\} - \{u(a,b)+iv(a,b)\}| < \epsilon^{*2}]$$

$$[U(x,y) + iV(x,y) = \frac{\{u(x,y) + iv(x,y)\} - \{u(a,b) + iv(a,b)\}}{\{x+iy\} - \{a+ib\}}]$$

$$\{U(x,y) + iV(x,y)\} \{\{x+iy\} - \{a+ib\}\} = \{u(x,y) + iv(x,y)\} - \{u(a,b) + iv(a,b)\}$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x+iy \{0 < |\{x+iy\} - \{a+ib\}| < \delta\}, |\{U(x,y)+iV(x,y)\} \{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}| < \epsilon]$$

$$[\int_{\gamma} \frac{\{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} - \{u(a,b) + iv(a,b)\}}{\{x(t) + iy(t)\} - \{a + ib\}} \{x + iy\}'(t) dt = 0 + i0]$$

定理 6. $f(z)$ は開円板で解析的で、は内の閉曲線とする。このとき、の上にない任意の点 a に対し

$$n(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

が成り立つ。

複素解析

補題 1 区分的に微分可能な閉曲線 γ が点 a を通らないとき、積分

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

$$\left[\int_{\gamma} \frac{\{x+iy\}'(t)dt}{\{x(t)+iy(t)\}-\{a+ib\}} \right]$$

の値は $2\pi i$ の整数倍である。

閉曲線に関する点 a の指数を

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

$$[n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\{x+iy\}'(t)dt}{\{x(t)+iy(t)\}-\{a+ib\}}]$$

で定義する。回転数。

チャーチル p100

定理 1 (コーシーの積分変式)

正の向きをもった区分的になめらかなジョルダン曲線の上と内部では正則であるとする。 z_0 が C の内部の任意の点のとき、

コーシーの積分変式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

が成り立つ。

定理の証明 はで連続であるから、任意の正数に対して、適当な正数を選ぶと

$$|z - z_0| < \text{なるすべてののに対して} \quad |f(z) - f(z_0)| <$$

が成り立つ。

神保 p73

定理

神保 p76

定理

コーシーの積分表示式 { 解析入門 IIP252 ~ P253 }

定理 2.4 { コーシーの積分表示式 } 関数 $f[= u(x, y) + iv(x, y)]$ は領域 D で正則 { P162 } *1 であるとする。 E が D 内に含まれる閉円板とし、 C を E の正の向きの境界とするととき、次式が成立つ。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \{\forall z \in E^\circ\}$$
$$[u(x, y) + iv(x, y)] = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{u(\zeta(t), \xi(t)) + iv(\zeta(t), \xi(t))}{\{\zeta(t) + i\xi(t)\} - \{x + iy\}} \{\zeta + i\xi\}'(t) dt \quad \{\forall \{x + iy\} \in E^\circ\}$$

P284

命題 6.1 C が C 内の区分的級閉曲線で、一点を通らないとき、積分

$$J = \int_C \frac{dz}{z - a}$$

の値はの整数倍である。

P300 ~

定理 7.4 (一般のコーシーの積分表示式) 関数 f が領域 D で正則 { } であり、 D 内のサイクル C が D に関しホモローグ 0 であるとき、次の等式が成立つ。

$$n(C, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz \quad (\forall a \in D - C)$$

証明 任意の $a \in D - C$ を一つとり、

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}, & z \neq a \\ f'(a), & z = a \end{cases}$$

$$[f(x, y) + ig(x, y) = \begin{cases} \frac{\{u(x, y) + iv(x, y)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{\{x + iy\} - \{a + ib\}}, & x + iy \neq a + ib \\ \{u + iv\}'(x + iy), & x + iy = a + ib \end{cases}]$$

により、 D 上の函数 φ を定義する。 φ は $D - \{a\}$ で正則であり、 $z \rightarrow a (z \neq a)$ のとき $\varphi(z) \rightarrow f'(a) = \varphi(a)$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \{0 < |z - a| < \delta\}, |\varphi(z) - \varphi(a)| < \epsilon]$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x + iy \{0 < |\{x + iy\} - \{a + ib\}| < \delta\}, |\{f(x, y) + ig(x, y)\} - \{f(a, b) + ig(a, b)\}| < \epsilon]$$

となるから、 φ は a でも正則である (定理 4.3)。そこで一般のコーシーの定理 (定理 7.1) により、次の等式が成立つ。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz - \frac{f(a)}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - a} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz - n(C, a) f(a) \end{aligned}$$

{ 解析入門 IIP249 }

定理 2.2 D が C の領域で一点 $a+ib$ に関し星形であるとし、関数 $u(x, y) + iv(x, y)$ は D で連続 { P55 } で $p+iq$ を除いて D で正則 { P162 } であるとする。このとき次のことが成立つ。

$$\int_C \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt = 0 + i0$$

{ 解析入門 IIP252 }

命題 2.3 コンパクト集合 C が開集合 D に含まれるとき、正数 ϵ が存在して $U = \{x+iy | \inf_{z+iw \in C} |x+iy - \{z+iw\}| < \epsilon\}$ が D に含まれる。

コーシーの積分表示式 { 解析入門 IIP252 ~ P253 }

定理 2.4 { コーシーの積分表示式 } 関数 $f[= u(x, y) + iv(x, y)]$ は領域 D で正則 { P162 } *1 であるとする。E が D 内に含まれる閉円板とし、C を E の正の向きの境界とすると、次式が成立つ。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \{\forall z \in E^\circ\}$$

$$[u(x, y) + iv(x, y)] = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{u(\zeta(t), \xi(t)) + iv(\zeta(t), \xi(t))}{\{\zeta(t) + i\xi(t)\} - \{x + iy\}} \{\zeta + i\xi\}'(t) dt \quad \{\forall \{x + iy\} \in E^\circ\}$$

証明 E の内部 E° の点 $x+iy$ を任意に一つ固定する。そして D での関数 $f(\zeta, \xi) + ig(\zeta, \xi)$ を

$$f(\zeta, \xi) + ig(\zeta, \xi) = \begin{cases} \frac{\{u(\zeta, \xi) + iv(\zeta, \xi)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{\{\zeta + i\xi\} - \{x + iy\}}, & \zeta + i\xi \neq x + iy \\ \{u + iv\}'(x + iy), & \zeta + i\xi = x + iy \end{cases}$$

によって定義する。

どんな $\epsilon > 0$ に対しても、 $\delta > 0$ が存在して、 $0 < |\{\zeta + i\xi\} - \{x + iy\}| < \delta$ となるすべての $\{\zeta + i\xi\} \in D$ に対し $\left| \frac{\{u(\zeta, \xi) + iv(\zeta, \xi)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{\{\zeta + i\xi\} - \{x + iy\}} - \{u + iv\}'(x + iy) \right| < \epsilon$ *3

だから、 $f(\zeta, \xi) + ig(\zeta, \xi)$ は D で連続 { P55 } $x+iy$ 以外では正則である。命題 2.3 により、 $E \subset U \subset D$ となる開円板 U が存在する。U は凸領域だから、星形領域。{ P249 }

$$\int_C \{f(\zeta(t), \xi(t)) + ig(\zeta(t), \xi(t))\} \{\zeta + i\xi\}'(t) dt = 0 + i0$$

$$\int_C \frac{\{u(\zeta(t), \xi(t)) + iv(\zeta(t), \xi(t))\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{\{\zeta(t) + i\xi(t)\} - \{x + iy\}} \{\zeta + i\xi\}'(t) dt = 0 + i0$$

$$\int_C \frac{u(\zeta(t), \xi(t)) + iv(\zeta(t), \xi(t))}{\{\zeta(t) + i\xi(t)\} - \{x + iy\}} \{\zeta + i\xi\}'(t) dt - \int_C \frac{u(x, y) + iv(x, y)}{\{\zeta(t) + i\xi(t)\} - \{x + iy\}} \{\zeta + i\xi\}'(t) dt = 0 + i0$$

説明

* 3 * 1

複素解析

補題 1 区分的に微分可能な閉曲線 γ が点 a を通らないとき、積分

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

の値は $2\pi i$ の整数倍である。

閉曲線に関する点 a の指数を

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

で定義する。回転数。

複素解析 p126

$f(z)$ は開円板で解析的とする。内の閉曲線 γ と、 γ の上にない点をとる。コーシーの定理を関数

$$F(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z-a}$$

に適用しよう。この関数は $z \neq a$ なら解析的である。 $z = a$ では定義されていないが、

$$\lim_{z \rightarrow a} F(z)(z-a) = \lim_{z \rightarrow a} (f(z) - f(a)) = 0$$

となり、定理 5 の条件をみたす。ゆえに、

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = 0$$

がいえる。この式を書きかえると

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

となり、右辺の積分は定義により $2\pi i n(\gamma, a)$ である。これで次の定理がえられた：

定理 6. $f(z)$ は開円板で解析的で、は内の閉曲線とする。このとき、の上にない任意の点 a に対し

$$n(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

が成り立つ。

イプシロン-デルタ p44 ~

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z (0 < |z - a| < \delta), |F(z)\{z - a\} - 0| < \epsilon]$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z (0 < |z - a| < \delta), |\{f(z) - f(a)\} - 0| < \epsilon]$$

p

定理 2.2

証明

はで連続だから、任意の ϵ に対しを十分小さくとればと
が成立つ。このときならば
となる。

P284

命題 6.1 C が C 内の区分的級閉曲線で、一点を通らないとき、積分

$$J = \int_C \frac{dz}{z-a}$$

の値はの整数倍である。

P300 ~

定理 7.4 (一般のコーシーの積分表示式) 函数 f が領域 D で正則であり、 D 内のサイクル C が D に関しホモローグ 0 であるとき、次の等式が成立つ。

$$n(C, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (\forall a \in D - C)$$

証明 任意の $a \in D - C$ を一つとり、

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z-a}, & z \neq a \\ f'(a), & z = a \end{cases}$$

により、 D 上の函数 φ を定義する。 φ は $D - \{a\}$ で正則であり、のときとなるから、はでも正則である。そこで一般のコーシーの定理 () により、次の等式が成立つ。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{f(a)}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z-a} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz - n(C, a)f(a) \end{aligned}$$

解析概論 p213

定理. 閉曲線 C の内部および周上で $f(z)$ が正則で、 a が C の内部の任意の点ならば

これを Cauchy の積分公式

[証] 被積分函数はの内部の点において不連続であるが、を中心として半径の円周をの内部に画くならば (定理 52)、

$$I = \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

故に右辺の積分はに關係のない一定の値を有する。今を十分小さく取つての上で

$$|f(z) - f(a)| <$$

とする。さて

$$I = \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) \int_C \frac{dz}{z-a} + \int_C \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz$$

右辺の第一の積分はに等しい。第二の積分に関しては

$$|\int_C \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz| \leq$$

すなわち

$$|| <$$

は任意だから

$$I =$$

P252 ~ 253 { 30P160 }

定理 2.4 (コーシーの積分表示式) 函数 f は領域 D で正則であるとする。 E が D 内に含まれる開円板とし、 C を E の正の向きの境界とすると、次式が成立つ。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\forall z \in E^\circ)$$

$$[f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta(t))}{\zeta(t) - z} \zeta'(t) dt \quad (\forall z \in E^\circ)]$$

証明 E の内部 E° の点 z を任意に一つ固定する。そして D 上の函数 g を

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$$

によって定義する。 $\lim_{\zeta \rightarrow z, \zeta \neq z} g(\zeta) = g(z)$ だから、 g は D 上連続、 z 以外では正則である。命題 2.3 により、 $E \subset U \subset D$ となる開円板 U が存在する。 U は凸領域だから、星形領域に対するコーシーの定理 (定理 2.2) を、 g に適用でき、

$$\int_C g(\zeta) d\zeta = 0$$

を得る。従って

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

となるが、例 6 により

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 1$$

であるから、 (2.28) が証明された。

[どんな $\epsilon > 0$ に対しても、 $\delta > 0$ が存在して、 $0 < |\zeta - z| < \delta$ となるすべての $\zeta \in D$ に対し $|g(\zeta) - g(z)| < \epsilon$]

[どんな $\epsilon > 0$ に対しても、 $\delta > 0$ が存在して、 $0 < |\zeta - z| < \delta$ となるすべての $\zeta \in D$ に対し $|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z)| < \epsilon$]

P254 ~ 255

定理 3.1 (整級数展開定理) 函数 f が C の領域 D で正則であるとする。 D の任意の点 a を中心とする円板 $D(a, R) = \{z \in D | |z - a| < R\}$ $\{R > 0\}$ が D に含まれるとき、 f は $D(a, R)$ 上で収束する整級数で表わされる。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \{z - a\}^n \quad \{\forall z \in D(a, R)\}$$

が成立つ。