

留数の定義 { IIP303 ~ 304 } { 30 講 P205 } { }

定義 1 除外円板 $D_0(a+ib, R) = \{x+iy \in C | 0 < |\{x+iy\} - \{a+ib\}| < R\}$ で $u()+iv()$ が正則であるとき、 $a+ib$ を中心とする $u()+iv()$ のローラン展開を

$$\begin{aligned} & u(x, y) + iv(x, y) \\ = & \dots \\ & + \frac{a_{-n,R} + ia_{-n,I}}{\{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^n} \\ & + \dots \\ & + \frac{a_{-2,R} + ia_{-2,I}}{\{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^2} \\ & + \frac{a_{-1,R} + ia_{-1,I}}{\{x+iy\} - \{a+ib\}} \\ & + \{a_{0,R} + ia_{0,I}\} \\ & + \{a_{1,R} + ia_{1,I}\} \{\{x+iy\} - \{a+ib\}\} \\ & + \{a_{2,R} + ia_{2,I}\} \{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^2 \\ & + \dots \\ & + \{a_{n,R} + ia_{n,I}\} \{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^n \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$0 < |\{x+iy\} - \{a+ib\}| < R$$

とすると、 $\{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^{-1}$ の係数 $a_{-1,R} + ia_{-1,I}$ を、 $u()+iv()$ の $a+ib$ における留数といい、

$$a_{-1,R} + ia_{-1,I} = \text{Res}_R(u() + iv(), a+ib) + i\text{Res}_I(u() + iv(), a+ib)$$

と記す。

{ P304 } { }

命題 8.1

証明 整数 n が、 -1 でなければ、 $\{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^n$ は D における原始函数 $\frac{1}{n+1} \{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^{n+1}$ を持つから、定理 1.2 { } により

$$\int_C \{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^n \{x+iy\}'(t) dt = 0 + i0 \quad \{n \neq -1\}$$

である。そして $n = -1$ のときは、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\{x+iy\}'(t) dt}{\{x+iy\} - \{a+ib\}} = 1 + i0$$

{ 概論 P226 } { 30 講 P207 } { }

定理 61. K 内の閉曲線 C の内部で、 $u(x,y)+iv(x,y)$ が、有限個の孤立する特異点以外で、正則ならば

$$\begin{aligned} & \int_C \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt \\ = & 2\pi i \{ \text{Res}_R(u() + iv(), a_{1,R} + ia_{1,I}) + i \text{Res}_I(u() + iv(), a_{1,R} + ia_{1,I}) \\ & + \cdots \\ & + \text{Res}_R(u() + iv(), a_{n,R} + ia_{n,I}) + i \text{Res}_I(u() + iv(), a_{n,R} + ia_{n,I}) \} \end{aligned}$$

C 内のの特異点における留数の和

P306 { 30P206 }

命題 8.3 a が f の n 次の極ならば、

$$Res(f, a) = \frac{1}{\{n-1\}!} \lim_{z \rightarrow a, z \neq a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [\{z-a\}^n f(z)]$$

である。

複素解析

定義 3. 留数

$$f(z) = B_h(z-a)^{-h} + \dots + B_1(z-a)^{-1} +$$

をみて、留数は係数に等しいことを認めるだけでよい。実際、 $B_1(z-a)^{-1}$ という項を除けば、残りは明らかにある関数の導関数である。

留数の定義 P303 ~ 304 { 30P205 }

定義 1 除外円板 $D_0(a, R) = \{z \in C | 0 < |z - a| < R\}$ で f が正則であるとき、 a を中心とする f のローラン展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < R$$

$$[f(z) = +\frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + +\frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a)^1 + a_2(z-a)^2 + +a_n(z-a)^n +]$$

とすると、 $(z-a)^{-1}$ の係数 a_{-1} を、 f の a における留数といい、

$$a_{-1} = \text{Res}(f, a) = \text{Res}_{z=a} f(z)$$

と記す。

P304 { 30P207 }

定理 8.2 (留数定理) 領域 D において、 f は有限個の孤立特異点 a_1, \dots, a_n を除き正則とする。 D 内のサイクル C が、 D 内でホモローク 0 で、どの a_k も通らないとき、次の等式が成立つ。

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n n(C, a_k) \text{Res}(f, a_k)$$

P306 { 30P206 }

命題 8.3 a が f の n 次の極ならば、

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{\{n-1\}!} \lim_{z \rightarrow a, z \neq a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [\{z-a\}^n f(z)]$$

である。

P236

[12]

留数は $\frac{1}{f'(a_k)}$ であることを示せ。

解

留数定理によ

P49

[6] 複素変数 z の多項式をとす。このとき

$$\int_C \frac{z^k}{f(z)} dz = \begin{cases} 0, \\ 2\pi i, \end{cases}$$

となることを示せ。ただしここで C は正の向きの単純閉曲線であって、のすべての根は C の囲む領域の内部に含まれているものとする。

解

$$\text{ここで、自然数 } m \text{ に対して、} \int_C \frac{1}{\{z - z_i\}^m} dz = \begin{cases} 0, & m > 1 \\ 2\pi i, & m = 1 \end{cases}$$

$$1 = \{\forall \epsilon > 0\}$$

$$2 = \{\exists n_0 \in N\}$$

$$3 = \{n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\}$$

$$4 = \{x|0 \leq x \leq 1\}$$

$$5 = \delta$$

$$6 \cdot 6 \quad 7 \cdots 7 \quad 8 = \vec{a} \quad 9 = \sqrt{a}$$

$$10 = \left\{\frac{b}{a}\right\}$$

$$11 = \left\{\frac{b}{a}\right\}$$

$$12 = \sum_{i=1}^n$$

$$13 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$14 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$15 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 16 &= a \\ &= b \\ &= c \end{aligned}$$

$$17 = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

定義 18

[次のページへ続く。]

$$19 = \int_a^b$$

$$20 = \alpha \quad 21 = \beta \quad 22 = \theta \quad 23 = \mu \quad 24 = \pi \quad 25 = \rho \quad 26 = \phi \quad 27 = \psi \quad 28 = \Delta$$

$$29 = \partial$$