

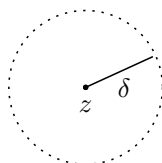
正則、コーシー・リーマンの微分方程式 { Ahlfp25 ~、杉浦 Ip162、Churp32 ~ }

定義 1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された複素数値関数  $f$  は、一点  $z \in D$  において

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = b \in C \quad \{ sac \}$$

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h+ik| < \delta$ ,  $h+ik \neq 0+i0$  となる任意の  $h+ik$  に対し  $\left| \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h+ik} - \{a+ib\} \right| < \varepsilon$  となる]

が存在するとき、複素微分可能であるといい、 $b$  を  $f$  の  $z$  における導値といい、 $f'(z)$  で表わす。  
領域  $D$  の各点で複素微分可能 { } であるとき、 $f$  は  $D$  で正則という。



まずわかることは、 $f(z)$  は連続 { 1.55 } になる。実際、 $f(z+h) - f(z) = h \cdot (f(z+h) - f(z))/h$  だから、

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(z+h) - f(z)) = {}^*1 0 \cdot f'(z) = 0 \quad \{ ac \}$$

$$[ \lim_{h \rightarrow 0} f(z+h) = f(z) ]$$

をうる。。。

例  $D = \{x+iy | |x+iy| < 10\}$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$  は  $1+i1$  において複素微分可能である。  $2+i2$

どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |h+ik| < \delta$  となるすべての  $h+ik$  に対し  $\left| \frac{\{(1+h)^2 - \{1+k\}^2 + i2\{1+h\}\{1+k\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{h+ik} - \{2+i2\} \right| < \varepsilon$  となる。

$\left| \frac{\{(1+h)^2 - \{1+k\}^2 + i2\{1+h\}\{1+k\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{h+ik} - \{2+i2\} \right| < 100$  とするには、たとえば  $0 < |h+ik| < 1$  でよい。

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < |0.5 + i\{-0.5\}| < 1, \\ \left| \frac{\{(1+0.5)^2 - \{1-0.5\}^2 + i2\{1+0.5\}\{1-0.5\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2+i2\} \right| < 100, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < |0.1 + i0.2| < 1, \\ \left| \frac{\{(1+0.1)^2 - \{1+0.2\}^2 + i2\{1+0.1\}\{1+0.2\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.1 + i0.2} - \{2+i2\} \right| < 100. \end{array} \right.$$

$\left| \frac{\{(1+h)^2 - \{1+k\}^2 + i2\{1+h\}\{1+k\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{h+ik} - \{2+i2\} \right| < 200$  とするには、...

解説

\*1 杉浦 p57

$h$  が 0 に近づく近づき方によらず極限  $\{ 1.52 \}$  は同じでなければならない  $\{ ca \}$  \*2。  $h$  を実数にとって 0 に近づけると、虚数部分  $y$  は一定であり微分係数は  $x$  に関する偏微分係数になる。したがって、次の式をうる：

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad \{ ac \} \end{aligned}$$

同様に、 $h$  を純虚数  $ik$  にして 0 に近づけると、

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} = \left[ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{i\{v(x, y+k) - v(x, y)\}}{ik} \right] \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \{ ac \} \end{aligned}$$

をうる。ゆえに、 $f(z)$  は偏微分方程式

$$=$$

をみたすことがわかり、これを実数の方程式にわけると、

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad (6) \{ acs \}$$

となる。これは、コーシー・リーマンの微分方程式とよばれ  $\{ acs \}$  正則関数  $\{ \}$  の実部と虚部はこれをみたさねばならない。

、。、  $u$  と  $v$  は 1 回偏微分可能で 1 階偏導関数は連続  $\{ \}$  とし  $\{ \}$  (6)  $\{ \}$  をみたすとする。微分可能性についてのこの条件の下で、偏微分法の定理  $\{ \}$  から

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) - u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)k + \varepsilon_1(h, k) \quad \{ ac \} \\ v(x+h, y+k) - v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)k + \varepsilon_2(h, k) \quad \{ ac \} \end{aligned}$$

とかけ、 $h+ik \rightarrow 0$  のときに  $\varepsilon_1/(h+ik) \rightarrow 0$ 、 $\varepsilon_2/(h+ik) \rightarrow 0$  という意味で、剰余項  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  は  $h+ik$  より早く 0 に近づくことがわかっている \*3。  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  とおくと、(6)  $\{ \}$  により

$$\begin{aligned} f(z+h+ik) - f(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)k + \varepsilon_1(h, k) + i\left\{ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)k + \varepsilon_2(h, k) \right\} \\ &= *4 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)h - \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)k + \varepsilon_1(h, k) + i\left\{ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)k + \varepsilon_2(h, k) \right\} \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \right)(h+ik) + \varepsilon_1(h, k) + i\varepsilon_2(h, k) \quad \{ ac \} \end{aligned}$$

となり、ゆえに、

$$\lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{f(z+h+ik) - f(z)}{h+ik} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad \{ ac \}$$

をうる \*5。これで、 $f(z)$  は解析的  $\{ \}$  がいえた。

$u(x, y), v(x, y)$  が偏微分可能で偏導関数は連続とし、コーシー・リーマンの微分方程式をみたすとする、 $f(z) = u(z) + iv(z)$  は解析関数で、導関数  $f'(z)$  は連続となる。また、この逆も成り立つ  $\{ j \}$

解説

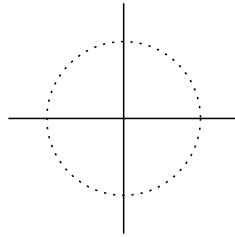
\*2

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h + ik| < \delta$ ,  $h + ik \neq 0 + i0$  となる任意の  $h + ik$  に対し  $\left| \frac{\{u(x + h, y + k) + iv(x + h, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon$  となる]

ならば

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h| < \delta$ ,  $h \neq 0$  となる任意の  $h$  に対し  $\left| \frac{\{u(x + h, y) + iv(x + h, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + i0} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon$  となる]

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|k| < \delta$ ,  $k \neq 0$  となる任意の  $k$  に対し  $\left| \frac{\{u(x, y + k) + iv(x, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{0 + ik} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon$  となる]  
 $|h + ik| < \delta$ ,  $h + ik \neq 0 + i0$  となる任意の  $h + ik$



\*4 (6)

$$u(x + h, y + k) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} h - \frac{\partial v}{\partial x} k + \varepsilon_1$$

$$iv(x + h, y + k) - iv(x, y) = i \frac{\partial v}{\partial x} h + i \frac{\partial u}{\partial x} k + i\varepsilon_2$$

$$u(x + h, y + k) + iv(x + h, y + k) - \{u(x, y) + iv(x, y)\} = \frac{\partial u}{\partial x} \{h + ik\} + i \frac{\partial v}{\partial x} \{h + ik\} + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$$

\*5 \*3

\*2

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h| < \delta$ ,  $h \neq 0$  となる任意の  $h$  に対し  $\left| \frac{\{u(x + h, y) + iv(x + h, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + i0} - \{0 + i0\} \right| < \varepsilon$  となる]

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|k| < \delta$ ,  $k \neq 0$  となる任意の  $k$  に対し  $\left| \frac{\{u(x, y + k) + iv(x, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{0 + ik} - \{0 + i2\} \right| < \varepsilon$  となる]

場合、

$|h + ik| < \delta$ ,  $h + ik \neq 0 + i0$  となる任意の  $h + ik$  に対し  $\left| \frac{\{u(x + h, y + k) + iv(x + h, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik} - \{0 + i2\} \right| < 1$  となる

ような  $\delta$  は存在しない。

以下は自分用のメモ

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x+h, y+0) + iv(x+h, y+0)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + i0} = 0 + i0 \\
& \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\{u(x+0, y+k) + iv(x+0, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{0 + ik} = 0 + i2 \\
& \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x+h, y) + iv(x+h, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + i0} = \right] \\
& \left[ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\{u(x, y+k) + iv(x, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{0 + ik} \right] \\
& = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{i\{v(x, y+k) - v(x, y)\}}{ik} \\
& \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \right] \\
& [u(x+h, y+k) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)k + \varepsilon_1(h, k) \\
& \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h + ik \{0 < |h + ik| < \delta\}, \left| \frac{\varepsilon_1(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| < \varepsilon] \\
& [v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)k + \varepsilon_2(h, k) \\
& \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \left\{ 0 < \left\| \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right\| < \delta \right\}, \left| \frac{\varepsilon_2(h, k)}{\left\| \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right\|} \right| < \varepsilon]
\end{aligned}$$

定義 開集合上で定義された複素数値関数は、の各点で微分係数をもつときに、で解析的であるという。

、。正則関数という言葉も、よく使われる同意語である。

$$\begin{aligned}
& [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h + ik \{0 < |h + ik| < \delta\}, \\
& \left| \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon]
\end{aligned}$$

p24

The class of analytic functions is formed by the complex functions of a complex variable which possess a derivative wherever the function is defined. The term holomorphic function is used with identical meaning.

The definition of the derivative can be rewritten in the form

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \{ \text{高} \}$$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h + ik \{0 < |h + ik| < \delta\},$$

$$\left| \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon]$$

The limit of the difference quotient must be the same regardless of the way in which h approaches zero. If we choose real values for h, then the imaginary part y is kept constant, and the derivative becomes a partial derivative with respect to x. We have thus

正則 { 解析入門 Ip162 }

定義 1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された複素数値関数  $f [= u(x, y) + iv(x, y)]$  は、一点  $a [= a + ib] \in D$  において

$$\lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \in C$$

[どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |h + ik| < \delta$  となるすべての  $h + ik$  に対し  $\left| \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} - \{\alpha + i\beta\} \right| < \varepsilon$  となる]

が存在するとき、複素微分可能であるといい、 $b$  を  $f$  の  $a$  における導値といい、 $f'(a) [=]$  で表わす。領域  $D$  の各点で複素微分可能であるとき、 $f$  は  $D$  で正則という。

例  $D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$  は  $1 + i1$  において複素微分可能である。  $2 + i2$

どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |k + il| < \delta$  となるすべての  $k + il$  に対し  $\left| \frac{\{\{1+k\}^2 - \{1+l\}^2 + i2\{1+k\}\{1+l\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{k + il} - \{2 + i2\} \right| < \varepsilon$  となる。

$\left| \frac{\{\{1+k\}^2 - \{1+l\}^2 + i2\{1+k\}\{1+l\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{k + il} - \{2 + i2\} \right| < 100$  とするには、  
 $0 < |k + il| < 1$  で大丈夫。

$\{0 < |0.5 + i\{-0.5\}| < 1,$

$\left| \frac{\{\{1+0.5\}^2 - \{1-0.5\}^2 + i2\{1+0.5\}\{1-0.5\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2 + i2\} \right| < 100,$

$0 < |0.1 + i0.2| < 1,$

$\left| \frac{\{\{1+0.1\}^2 - \{1+0.2\}^2 + i2\{1+0.1\}\{1+0.2\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.1 + i0.2} - \{2 + i2\} \right| < 100\}.$

$\left| \frac{\{\{1+k\}^2 - \{1+l\}^2 + i2\{1+k\}\{1+l\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{k + il} - \{2 + i2\} \right| < 200$  とするには、  
 $\dots$

{ 解析入門 Ip162 } { 解析入門 Ip163 ~ 164、イプシロン-デルタ p44 ~、数学概論 p169 }

$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall k + il \{0 < |k + il| < \delta\},$

$\left| \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} - \{\alpha + i\beta\} \right| < \varepsilon]$

$f'(a) [= \frac{d}{dx+idy} \{u(a, b) + iv(a, b)\}]$





チャp32~34

関数の定義域は、点の近傍を含んでいるとする。 $z_0$  点における  $f(z)$  の導関数  $f'(z_0)$  を

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

で定義する。 $z_0$  における導関数が存在するとき、 $f(z)$  は  $z_0$  で微分可能であるという。

とおいて書き直すと

$$f'(z_0) := \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

となる。。

。。

$f'(z)$  をとも書き表す。。

関数  $f(z)$  は点  $z_0$  で微分可能  $f(z)$  は  $z_0$  において連続

は成り立つ。その理由は、

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z) - f(z_0)\} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0)0 = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

が導けるからである。

チャp34~39

関数

$$f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$$

が  $z_0 = x_0 + iy_0$  で微分可能、すなわち、極限

$$f'(z_0) := \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (2)$$

が存在すると仮定するとき、 $f$  との偏導関数で

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \quad (3)$$

と表される。したがって、(3) と (2) の実部どうし、虚部どうしをとおけば、とはコーシー・リーマンの方程式とよばれる偏微分方程式

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

を満足する。

これを示すために、まず、 $f$  を仮定して、 $f$  が成り立つことを示そう。

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  とおく。

極限の式 (2) が成り立つとき、の定理から、(2) の実部、虚部について

$$(8) \quad \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ = \frac{\{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)\} + i\{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\}}{\Delta x + i\Delta y}$$

(2) は、右辺において  $\Delta z \rightarrow 0$ 、すなわち、いかなる向きから 0 に近づけてもつねに 1 つの値が定まり、それが左辺の  $f'(z_0)$  であるということだから、 $()$ 、 $()$  についても、いかなる向きから  $(,)(,)$  としてもつねに 1 つの値がそれぞれ定まり、それが、である、ということである。

そこで、とくに  $\Delta y = 0$  として  $\Delta x \rightarrow 0$  としても  $()$ 、 $()$  の右辺の極限はそれぞれ左辺の値であるから、 $()$  で  $\Delta y = 0$  とおいたものを  $()$ 、 $()$  の右辺に代入すれば

$$Re f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = u_x(x_0, y_0) \\ Im f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = v_x(x_0, y_0)$$

となる。したがって、(3) が成り立つ。

次に、 $\Delta x = 0$  において  $\Delta y \rightarrow 0$  としてみる。(8) で  $\Delta x = 0$  とおいたものを、 $()$ 、 $()$  の右辺に代入して、

$$Re f'(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{i\{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\}}{i\Delta y} = v_y(x_0, y_0) \\ Im f'(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{-\Delta y} = -u_y(x_0, y_0)$$

を得る。これから (4) が得られる。

定理

がで微分可能ならば、はまたはで与えられ、コーシー・リーマンの方程式  $()$  が成り立つ。  
、ある条件を付け加えると、十分条件になる。

定理 2

のある近傍で関数

$$f(z) :=$$

が定義されていて、その近傍で  $u_x, u_y, v_x, v_y$  が存在し  $(x_0, y_0)$  で連続であるとする。このとき、コーシー・リーマンの方程式が  $(x_0, y_0)$  で成り立てば、 $f(z)$  は  $z_0$  で微分可能である。

証明  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta u + i\Delta v$  とおくと、

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$$

$u_x, u_y$  は  $(x_0, y_0)$  で連続であるから、微積分学の全微分に関する定理より

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y +$$

$$= 0$$

が成り立つ。同様にして、がで連続であるから、

$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y +$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned}
\Delta w &= u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + i\{v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y\} \\
&= u_x(x_0, y_0)\Delta x - v_x(x_0, y_0)\Delta y + i\{v_x(x_0, y_0)\Delta x + u_x(x_0, y_0)\Delta y\} \\
&\quad (u_y = -v_x, v_y = u_x \text{ だから}) \\
&= u_x(x_0, y_0)(\Delta x + i\Delta y) + iv_x(x_0, y_0)(\Delta x + i\Delta y) + \\
&= u_x(x_0, y_0)\Delta z + iv_x(x_0, y_0)\Delta z + (+i)|\Delta z| \\
&= \\
f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

チャp39

点のみならずのある近傍の各点においてが微分可能であるとき、はで正則 ( ) であるという。集合の各点でが正則であるとき、はで正則であるという。

{ 解析入門 Ip162 }

定義 1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された複素数値函数  $f$  は、一点  $a \in D$  において

$$\lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \in C$$

が存在するとき、複素微分可能 { c? } であるといい、 $b$  を  $f$  の  $a$  における導値といい、 $f'(a)$  で表わす。領域  $D$  の各点で複素微分可能 { ct? } であるとき、 $f$  は  $D$  で正則 { ct? } という。

複素解析概論 p

複素平面の領域をつ定める。を上の関数とする。が点で複素微分可能であることをつぎのように定義するある数が存在して、任意のに対し、あるがあつて、任意のに対し

このときをのでの複素微分とよびと書く。。

。がで複素微分可能ならば、はで連続である。がのすべての点で複素微分可能であるとき、はで正則であるという。このとき各にを対応させる関数をの導関数とよぶ。。

関数論と微分方程式 p101

の導関数は、実数の場合と同様に

によって定義される。、この極限が点への近づき方のいかに依存しないことが必要である。

に示されている通りの違った近づき方でとってみよう。

$$\begin{aligned}\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta z} &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\delta u}{\delta x} + i \frac{\delta v}{\delta x} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

。

$$\begin{aligned}\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta z} &= \lim_{\delta y \rightarrow 0} \left( -i \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y} \right) \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を得る。これが有名なコーシー・リーマンの条件である。

逆に、コーシー・リーマンの条件が満たされ、かつとの偏微分係数が連続ならば、

$$\delta f = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta y$$

。

=

。

=

複素関数入門 p26

定義

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

$$f'(z)$$

命題 が点で微分可能なら、そこで連続である

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(z+h) = f(z)$$

複素関数入門 p51

関数がある点で微分可能であるというのは、h が0 でない複素数を動きつつ 0 に近づく とき、近づき方には よらず に一定の 極限

が存在することをいうのであった。

複素関数入門 p52

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(|x - x_0| + |y - y_0|)$$

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + o(|z - z_0|), \quad \alpha = \frac{df}{dz}(z_0)$$

今  $\alpha = a + ib$  においてこの関係を実部虚部に分けて書き下せば

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}),$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2})$$

複素関数入門 p54

定義 領域で定義された関数  $f(z)$  が正則であるとは、それが級であって、複素関数として微分可能であることをいう。

複素関数 p31

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \end{aligned}$$

数学概論 p

$$\frac{f(z + \delta) - f(z)}{\delta} = \frac{\{u(x + h, y + k) + iv(x + h, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik}$$

解析概論 p201

。すなわち  $f(z)$  が  $z$  において微分可能であるとは

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

が確定であることをいう。換言すれば

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + o(h)$$

で、

すなわち  $h$  が どの方面から、どのような過程を経て  $0$  に 近づくとしても、それには無関係に  
が一定の 極限  $f'(z)$  に 近づくのである。

複素数平面上の或る領域  $K$  の 各点 において微分可能な函数を  $K$  において正則な 解析函数という。  
あるいは略して単に 正則ともいう。

上記の意味で、 $f(z) = u + vi$  が  $z = x + yi$  に関して微分可能であることを、実数の関係に引き  
直してみるために、 $f'(z) = p + qi$  とし、また  $h = dz = dx + idy$  と置けば、(1) から

$$, \quad (|h| = \sqrt{dx^2 + dy^2})$$

故に実部と虚部とを分けて

すなわち、 $u, v$  は実変数  $x, y$  の函数としての意味で微分可能で

$$u_x = v_y = p, \quad -u_y = v_x = q$$

従って

$$f'(z) = u_x + iv_x = -i()$$

すなわち  $f(z)$  が正則ならば、その実部  $u$  および虚部  $v$  の間に

$$\underline{u_x = v_y, \quad u_y = -v_x} \quad (2)$$

なる関係が成り立つ。これは微分可能の必要条件である。(2) を Cauchy-Riemann の微分方程式と  
いう。

逆に  $u, v$  が  $x, y$  の実函数として、に述べた意味で微分可能で、かつ (2) が成り立つならば、 $h =$   
 $dx + idy$  として

$$\underline{du = u_x dx + u_y dy + o(|h|),}$$

$$\underline{dv = v_x dx + v_y dy + o(|h|),}$$

従って (2) を用いて

$$\underline{du + idv = (u_x + iv_x)(dx + idy) + o(|h|)}$$

故に

すなわち複素変数に関して微分可能である。

。

複素数 30 講 p85

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$$

複素数 30 講 p89

定義 極限值

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

が存在するとき、 $f$  は、 $z_0$  で微分可能であるといい、この極限値を  $f'(z_0)$  で表す：

すなわち、ある複素数  $A$  があって

30 講 p91

とおく。このときは

$$\{u(x, y) + iv(x, y)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\} = (a + ib)\{(x - x_0) + i(y - y_0)\} + ()\{(x - x_0) + i(y - y_0)\}$$

という式になる。

この実数部分、虚数部分を見比べると

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = a(x - x_0) - b(y - y_0) + -$$

という

$$z \rightarrow z_0 \text{ のとき } \epsilon \rightarrow 0$$

という関係は、ここでは

$$x - x_0, y - y_0 \rightarrow 0 \text{ のとき, } \epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$$

と表わされる。

30 講 p92

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\{u(x, y_0) + iv(x, y_0)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ & \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\{u(x_0, y) + iv(x_0, y)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{i\{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)\}}{i(y - y_0)} \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

複素数 30 講 p97

定義 領域  $D$  で定義された関数が、 $D$  の各点で微分可能なとき、 $f$  を  $D$  上の正則関数という。  
を、 $f(z)$  の導関数という。

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z)$$



なお、で述べたように、微分可能ならば連続なのだから、正則関数は連続な関数となっている。

複素解析 p23

定義 1 関数  $f(x)$  が  $x$  を  $a$  に近づけたときに極限  $A$  をもつ、記号でかくと

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

というのは次のことが成り立つことである：

任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在し、 $|x - a| < \delta$ 、 $x \neq a$  をみたすすべての  $x$  に対し  $|f(x) - A| < \varepsilon$  が成り立つようにできる。

複素解析 p25

複素変数の複素関数で、定義されている各点で微分係数をもつものを、という。正則関数ともいって、同じ意味である。

微分係数の定義は

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

という形でかける。

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在し、 $|h - 0| < \delta$ 、 $h \neq 0$  をみたすすべての  $h$  に対し  $\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| < \varepsilon$  が成り立つようにできる。]

正則関数、コーシー・リーマンの微分方程式 { 複素解析 p25 ~ }

複素変数の複素関数で、定義されている各点で微分係数 { } をもつものを { } 解析関数という。  
正則関数ともいって { } 同じ意味である。。。

微分係数の定義は

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \{ csa \}$$

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h+ik| < \delta$ ,  $h+ik \neq 0+i0$  となる任意の  $h+ik$  に対し  
 $\left| \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h+ik} - \{a+ib\} \right| < \varepsilon$  となる]  
 という形でかける。まずわかることは、 $f(z)$  は連続 { } になる。実際、 $f(z+h) - f(z) = h \cdot (f(z+h) - f(z))/h$  だから、

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(z+h) - f(z)) = *1 \quad 0 \cdot f'(z) = 0$$

をうる。。。

{ 解析入門 Ip162 }

定義 1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された複素数値関数  $f$  は、一点  $a \in D$  において

$$\lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \in C$$

が存在するとき、複素微分可能であるといい、 $b$  を  $f$  の  $a$  における導値といい、 $f'(a)$  で表わす。

例  $D = \{x+iy | |x+iy| < 10\}$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$  は  $1+i1$  において複素微分可能である。  $2+i2$

どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |h+ik| < \delta$  となるすべての  $h+ik$  に対し  
 $\left| \frac{\{1+h\}^2 - \{1+k\}^2 + i2\{1+h\}\{1+k\}}{h+ik} - \{2+i2\} \right| < \varepsilon$  となる。  
 $\left| \frac{\{1+h\}^2 - \{1+k\}^2 + i2\{1+h\}\{1+k\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{h+ik} - \{2+i2\} \right| < 100$  とするに  
 は、 $0 < |h+ik| < 1$  で大丈夫。

$$\{0 < |0.5 + i\{-0.5\}| < 1,$$

$$\left| \frac{\{1+0.5\}^2 - \{1-0.5\}^2 + i2\{1+0.5\}\{1-0.5\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2+i2\} \right| < 100,$$

$$0 < |0.1 + i0.2| < 1,$$

$$\left| \frac{\{1+0.1\}^2 - \{1+0.2\}^2 + i2\{1+0.1\}\{1+0.2\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.1 + i0.2} - \{2+i2\} \right| < 100\}.$$

$$\left| \frac{\{1+h\}^2 - \{1+k\}^2 + i2\{1+h\}\{1+k\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{h+ik} - \{2+i2\} \right| < 200 \text{ とするに}$$

は、...

解説

\*1 解析入門 p57

[次のページへ続く。]

$h$  が 0 に近づく近づき方によらず極限は同じでなければならない {ca} \*2.  $h$  を実数にとって 0 に近づけると、虚数部分  $y$  は一定であり微分係数は  $x$  に関する偏微分係数になる。したがって、次の式をうる：

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \{ca\}$$

$$\left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right]$$

同様に、 $h$  を純虚数  $ik$  にして 0 に近づけると、

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \{ca\}$$

$$\left[ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{i\{v(x, y+k) - v(x, y)\}}{ik} \right]$$

をうる。ゆえに、 $f(z)$  は偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

をみたすことがわかり、これを実数の方程式にわけると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (6) \{csa\}$$

となる。これは、コーシー・リーマンの微分方程式とよばれ {cs} 解析関数の実部と虚部はこれをみたさねばならない。

、。、 $u$  と  $v$  は 1 回偏微分可能で 1 階偏導関数は連続とし { } (6) をみたすとする。微分可能性についてのこの条件の下で、偏微分法の定理から

$$u(x+h, y+k) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \varepsilon_1 \quad \{c\}$$

$$v(x+h, y+k) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} h + \frac{\partial v}{\partial y} k + \varepsilon_2 \quad \{c\}$$

とかけ、 $h+ik \rightarrow 0$  のときに  $\varepsilon_1/(h+ik) \rightarrow 0$ 、 $\varepsilon_2/(h+ik) \rightarrow 0$  という意味で、剰余項  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  は  $h+ik$  より早く 0 に近づくことがわかっている \*3.  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  とおくと、(6) により

$$f(z+h+ik) - f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \varepsilon_1 + i \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} h + \frac{\partial v}{\partial y} k + \varepsilon_2 \right\}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} h - \frac{\partial v}{\partial x} k + \varepsilon_1 + i \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial x} k + \varepsilon_2 \right\}$$

$$= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (h+ik) + \varepsilon_1 + i \varepsilon_2 \quad \{c\}$$

となり \*4、ゆえに、

$$\lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{f(z+h+ik) - f(z)}{h+ik} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \{c\}$$

をうる \*5。これで、 $f(z)$  は解析的 { } がいえた。

$u(x, y), v(x, y)$  が偏微分可能で偏導関数は連続とし、コーシー・リーマンの微分方程式をみたすとすると、 $f(z) = u(z) + iv(z)$  は解析関数で、導関数  $f'(z)$  は連続となる。また、この逆も成り立つ {j}

解説

\*2

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h + ik| < \delta$ ,  $h + ik \neq 0 + i0$  となる任意の  $h + ik$  に対し  
$$\left| \frac{\{u(x + h, y + k) + iv(x + h, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon \text{ となる}]$$

ならば

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h| < \delta$ ,  $h \neq 0$  となる任意の  $h$  に対し  
$$\left| \frac{\{u(x + h, y) + iv(x + h, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + i0} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon \text{ となる}]$$

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|k| < \delta$ ,  $k \neq 0$  となる任意の  $k$  に対し  
$$\left| \frac{\{u(x, y + k) + iv(x, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{0 + ik} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon \text{ となる}]$$

\*4

$$u(x + h, y + k) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} h - \frac{\partial v}{\partial x} k + \varepsilon_1$$

$$iv(x + h, y + k) - iv(x, y) = i \frac{\partial v}{\partial x} h + i \frac{\partial u}{\partial x} k + i\varepsilon_2$$

$$u(x + h, y + k) + iv(x + h, y + k) - \{u(x, y) + iv(x, y)\} = \frac{\partial u}{\partial x} \{h + ik\} + i \frac{\partial v}{\partial x} \{h + ik\} + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$$

\*5 \*3

\*2

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h| < \delta$ ,  $h \neq 0$  となる任意の  $h$  に対し  
$$\left| \frac{\{u(x + h, y) + iv(x + h, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + i0} - \{0 + i0\} \right| < \varepsilon \text{ となる}]$$

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|k| < \delta$ ,  $k \neq 0$  となる任意の  $k$  に対し  
$$\left| \frac{\{u(x, y + k) + iv(x, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{0 + ik} - \{0 + i2\} \right| < \varepsilon \text{ となる}]$$

場合、

$|h + ik| < \delta$ ,  $h + ik \neq 0 + i0$  となる任意の  $h + ik$  に対し  
$$\left| \frac{\{u(x + h, y + k) + iv(x + h, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik} - \{0 + i2\} \right| < 1 \text{ となる}$$

ような  $\delta$  は存在しない。

正則関数、コーシー・リーマンの微分方程式 { 複素解析 p25 ~ }

複素変数の複素関数で、定義されている各点で微分係数 { } をもつものを { } 解析関数という。  
正則関数ともいって { } 同じ意味である。。。

微分係数の定義は

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \{ csa \}$$

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h+ik| < \delta$ ,  $h+ik \neq 0+i0$  となる任意の  $h+ik$  に対し  
 $\left| \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h+ik} - \{a+ib\} \right| < \varepsilon$  となる]  
 という形でかける。まずわかることは、 $f(z)$  は連続 { } になる。実際、 $f(z+h) - f(z) = h \cdot (f(z+h) - f(z))/h$  だから、

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(z+h) - f(z)) = *1 \quad 0 \cdot f'(z) = 0$$

をうる。。。

{ 解析入門 Ip162 }

定義 1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された複素数値関数  $f$  は、一点  $a \in D$  において

$$\lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \in C$$

が存在するとき、複素微分可能であるといい、 $b$  を  $f$  の  $a$  における導値といい、 $f'(a)$  で表わす。

例  $D = \{x+iy | |x+iy| < 10\}$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$  は  $1+i1$  において複素微分可能である。  $2+i2$

どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |h+ik| < \delta$  となるすべての  $h+ik$  に対し  
 $\left| \frac{\{1+h\}^2 - \{1+k\}^2 + i2\{1+h\}\{1+k\}}{h+ik} - \{2+i2\} \right| < \varepsilon$  となる。  
 $\left| \frac{\{1+h\}^2 - \{1+k\}^2 + i2\{1+h\}\{1+k\}}{h+ik} - \{2+i2\} \right| < 100$  とするに  
 は、 $0 < |h+ik| < 1$  で大丈夫。

$$\{0 < |0.5 + i\{-0.5\}| < 1,$$

$$\left| \frac{\{1+0.5\}^2 - \{1-0.5\}^2 + i2\{1+0.5\}\{1-0.5\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2+i2\} \right| < 100,$$

$$0 < |0.1 + i0.2| < 1,$$

$$\left| \frac{\{1+0.1\}^2 - \{1+0.2\}^2 + i2\{1+0.1\}\{1+0.2\}}{0.1 + i0.2} - \{2+i2\} \right| < 100\}.$$

$$\left| \frac{\{1+h\}^2 - \{1+k\}^2 + i2\{1+h\}\{1+k\}}{h+ik} - \{2+i2\} \right| < 200 \text{ とするに}$$

は、...

解説

\*1 解析入門 p57

[次のページへ続く。]

$h$  が 0 に近づく近づき方によらず極限は同じでなければならない {ca} \*2.  $h$  を実数にとって 0 に近づけると、虚数部分  $y$  は一定であり微分係数は  $x$  に関する偏微分係数になる。したがって、次の式をうる：

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad \{ca\}$$

$$\left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right]$$

同様に、 $h$  を純虚数  $ik$  にして 0 に近づけると、

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \{ca\}$$

$$\left[ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{i\{v(x, y+k) - v(x, y)\}}{ik} \right]$$

をうる。ゆえに、 $f(z)$  は偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

をみたすことがわかり、これを実数の方程式にわけると、

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad (6) \{csa\}$$

となる。これは、コーシー・リーマンの微分方程式とよばれ {cs} 解析関数の実部と虚部はこれをみたさねばならない。

、、、 $u$  と  $v$  は 1 回偏微分可能で 1 階偏導関数は連続とし { } (6) をみたすとする。微分可能性についてのこの条件の下で、偏微分法の定理から

$$u(x+h, y+k) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)k + \varepsilon_1 \quad \{c\}$$

$$v(x+h, y+k) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)k + \varepsilon_2 \quad \{c\}$$

とかけ、 $h+ik \rightarrow 0$  のときに  $\varepsilon_1/(h+ik) \rightarrow 0$ 、 $\varepsilon_2/(h+ik) \rightarrow 0$  という意味で、剰余項  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  は  $h+ik$  より早く 0 に近づくことがわかっている \*3.  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  とおくと、(6) により

$$f(z+h+ik) - f(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)k + \varepsilon_1 + i\left\{\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)k + \varepsilon_2\right\}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)h - \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)k + \varepsilon_1 + i\left\{\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)k + \varepsilon_2\right\}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\right)(h+ik) + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \quad \{c\}$$

となり \*4、ゆえに、

$$\lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{f(z+h+ik) - f(z)}{h+ik} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad \{c\}$$

をうる \*5。これで、 $f(z)$  は解析的 { } がいえた。

$u(x, y), v(x, y)$  が偏微分可能で偏導関数は連続とし、コーシー・リーマンの微分方程式をみたすとする、 $f(z) = u(z) + iv(z)$  は解析関数で、導関数  $f'(z)$  は連続となる。また、この逆も成り立つ {j}

解説

\*2

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h + ik| < \delta$ ,  $h + ik \neq 0 + i0$  となる任意の  $h + ik$  に対し  
 $\left| \frac{\{u(x + h, y + k) + iv(x + h, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon$  となる]

ならば

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h| < \delta$ ,  $h \neq 0$  となる任意の  $h$  に対し  
 $\left| \frac{\{u(x + h, y) + iv(x + h, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + i0} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon$  となる]

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|k| < \delta$ ,  $k \neq 0$  となる任意の  $k$  に対し  
 $\left| \frac{\{u(x, y + k) + iv(x, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{0 + ik} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon$  となる]

\*4

$$u(x + h, y + k) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} h - \frac{\partial v}{\partial x} k + \varepsilon_1$$

$$iv(x + h, y + k) - iv(x, y) = i \frac{\partial v}{\partial x} h + i \frac{\partial u}{\partial x} k + i\varepsilon_2$$

$$u(x + h, y + k) + iv(x + h, y + k) - \{u(x, y) + iv(x, y)\} = \frac{\partial u}{\partial x} \{h + ik\} + i \frac{\partial v}{\partial x} \{h + ik\} + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$$

\*5 \*3

\*2

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h| < \delta$ ,  $h \neq 0$  となる任意の  $h$  に対し  
 $\left| \frac{\{u(x + h, y) + iv(x + h, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + i0} - \{0 + i0\} \right| < \varepsilon$  となる]

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|k| < \delta$ ,  $k \neq 0$  となる任意の  $k$  に対し  
 $\left| \frac{\{u(x, y + k) + iv(x, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{0 + ik} - \{0 + i2\} \right| < \varepsilon$  となる]

場合、

$|h + ik| < \delta$ ,  $h + ik \neq 0 + i0$  となる任意の  $h + ik$  に対し  
 $\left| \frac{\{u(x + h, y + k) + iv(x + h, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik} - \{0 + i2\} \right| < 1$  となる

ような  $\delta$  は存在しない。

記号

任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|x - a| < \delta$  となる任意の  $x \in B$  に対し  $|f(x) - b| < \epsilon$  となるとき、 $x$  が  $B$  内で  $a$  に近づくときの  $f(x)$  の極限が  $b$  であるといい、

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in B} f(x) = b, \quad \text{または} \quad f(x) \rightarrow b (x \rightarrow a, x \in B) \quad (\text{杉})$$

と記す。

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (\text{ア})$$

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)\} + i\{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\}}{\Delta x + i\Delta y} \quad (\text{チ})$$

$$[f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x+h, y+k) - u(x, y)\} + i\{v(x+h, y+k) - v(x, y)\}}{h+ik}]$$

[任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h-0| < \delta$  となる任意の  $h \in B$  に対し  $|\frac{\{u(x+h, y+k) - u(x, y)\} + i\{v(x+h, y+k) - v(x, y)\}}{h+ik} - f'(z)| < \epsilon$  となるとき、]

定義 1 関数  $f(x)$  が  $x$  を  $a$  に近づけたときに極限  $A$  をもつ、記号でかくと

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (\text{ア 1})$$

というのは次のことが成り立つことである：

任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在し、 $|x-a| < \delta$ 、 $x \neq a$  をみたすすべての  $x$  に対し  $|f(x) - A| < \epsilon$  が成り立つようにできる。

[任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h+ik-0| < \delta$ 、 $h+ik \neq 0$  となる任意の  $h+ik$  に対し  $|\frac{\{u(x+h, y+k) - u(x, y)\} + i\{v(x+h, y+k) - v(x, y)\}}{h+ik} - f'(z)| < \epsilon$  となるとき、]

チ p2

すなわち零元は  $0 + i0 = 0$

杉 p208

記号

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (\text{ア})$$

$$\frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h+ik} \quad (\text{数学概論})$$

$$[f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h+ik}]$$

$$q : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (\text{田島})$$

$$q : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x-a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon \quad (\text{田島})$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h (0 < |h| < \delta), |\frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h+ik} - f'(z)| < \epsilon]$$



杉浦記号

定義 1

$$\lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \in C \quad (\text{杉 1.1})$$

$$\frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h+ik} \quad (\text{数学概論})$$

$$\left[ \lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k+il} \right]$$

P51 ~ 52

定義 2  $f$  を  $R^n$  の部分集合  $A$  で定義され、 $R^m$  の値を取る函数とし、 $a \in \bar{A}, b \in R^m$  とする。 $x$  が  $a$  に近づくときの  $f(x)$  の極限が  $b$  であるとは、どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $|x - a| < \delta$  となるすべての  $x \in A$  に対し  $|f(x) - b| < \varepsilon$  となることを言う。このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

などと表わす。

[どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |h+ik| < \delta$  となるすべての  $h+ik$  に対し  $\left| \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k+il} - \{\alpha + i\beta\} \right| < \varepsilon$  となる]

記号

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\mathcal{A})$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = \quad (\text{チ})$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = \quad (\text{チ})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\{u(x, y_0) + iv(x, y_0)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} \quad (\text{志})$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (\text{志})$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{志})$$

$$\left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x + h, y) - v(x, y)}{h} \right]$$

$$\left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{(x_0 + h + iy_0) - (x_0 + iy_0)} \right] =$$

$$\left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x + h, y) + iv(x + h, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + i0} \right] =$$

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z + ik) - f(z)}{ik} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\mathcal{A})$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{i\{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\}}{i\Delta y} = \quad (\text{チ})$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{-\Delta y} = \quad (\text{チ})$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\{u(x, y + k) + iv(x, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)} \quad (\text{志})$$

$$= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{i\{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)\}}{i(y - y_0)} \quad (\text{志})$$

$$= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{志})$$

$$\left[ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y + k) - u(x, y)}{ik} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{i\{v(x, y + k) - v(x, y)\}}{ik} \right]$$

$$\left[ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\{u(x, y + k) + iv(x, y + k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{0 + ik} \right]$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y + k) - u(x, y)}{ik} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{i\{v(x, y + k) - v(x, y)\}}{ik} \quad (\text{志})$$

$h + ik \rightarrow 0$  のときに  $\varepsilon_1/(h + ik) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_2/(h + ik) \rightarrow 0$  という意味で、  
 任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|x - a| < \delta$  となる任意の  $x \in B$  に対し  $|f(x) - b| < \epsilon$  となるとき、 $x$  が  $B$  内で  $a$  に近づくときの  $f(x)$  の極限が  $b$  であるといい、

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in B} f(x) = b, \quad \text{または} \quad f(x) \rightarrow b (x \rightarrow a, x \in B) \quad (\text{杉})$$

と記す。

[任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h + ik - 0| < \delta$  となる任意の  $x \in B$  に対し  $|\varepsilon_1/(h + ik) - 0| < \epsilon$  となるとき]

[任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して、 $|h + ik| < \delta$ ,  $h + ik \neq 0$  となる任意の  $h + ik$  に対し  $|\frac{\varepsilon_1(h, k)}{h + ik}| < \epsilon$  となるとき]

この章では  $R^n$  の元  $x$  を

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\text{杉浦})$$

函数  $f$  が

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (\text{杉浦})$$

をみたすとき、 $f$  を一般に  $o(g)\{x \rightarrow a\}$  と記す。

$$(|h| = \sqrt{dx^2 + dy^2}) \quad (\text{高})$$

$h = dx + idy$  として

$$du = u_x dx + u_y dy + o(|h|) \quad (\text{高})$$

$$\left[ \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(h)}{|h|(h)} = 0 \right]$$

$$\left[ \lim_{dx + idy \rightarrow 0, dx + idy \neq 0} \frac{f(h)}{\sqrt{dx^2 + dy^2}(h)} = 0 \right]$$

$$q : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (\text{田島})$$

$$q : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon \quad (\text{田島})$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h (0 < |h - 0| < \delta), \left| \frac{f(h)}{|h|(h)} - 0 \right| < \epsilon]$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall dx + idy \{0 < |dx + idy - 0| < \delta\}, \left| \frac{f(h)}{\sqrt{dx^2 + dy^2}(h)} - 0 \right| < \epsilon]$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \{0 < \left| \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right| < \delta\}, \left| \frac{\varepsilon_1(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| < \epsilon]$$

$$f(z + h) - f(z) = (a + bi)h + o(h) \quad (h \rightarrow 0) \quad (\text{杉浦 1.8})$$

$$u(x + k, y + l) - u(x, y) = ak - bl + o(h) \quad (h \rightarrow 0) \quad (\text{杉浦 1.9})$$

$$\left[ \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(h)}{h(h)} = 0 \right]$$

$$q: \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (\text{田島})$$

$$q: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon \quad (\text{田島})$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h (0 < |h| < \delta), |\frac{f(h)}{h(h)} - 0| < \epsilon]$$

定義1  $R^n$  の開集合  $U$  で定義された実数値関数  $f$  が、 $a \in U$  で微分可能であるとは、ある  $n$  項横ベクトル  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  が存在して

$$f(a+h) - f(a) = ch + o(|h|) \quad \{h \rightarrow 0\} \quad (\text{杉浦 5.3})$$

$$[\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(h)}{h(h)} = 0]$$

となることを意味する。

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \{0 < \left| \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right| < \delta\}, \left| \frac{\varepsilon_1(h, k)}{\left| \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right|} < \epsilon]$$

下書き解析入門 Ip162

定義1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された複素数値関数  $f$  は、一点  $a \in D$  において

$$\lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \in C$$

$$[\lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} = b \in C]$$

が存在するとき、複素微分可能であるといい、 $b$  を  $f$  の  $a$  における、 $f'(a)$  で表わす。領域  $D$  の各点で複素微分可能であるとき、 $f$  は  $D$  で正則という。

P163 ~ 164 { 30P91 }

$$\text{定理 } f(z) = u(x, y) + iv(x, y) (z = x + yi)$$

$$h = k + li$$

$$u(x+k, y+l) - u(x, y)$$

$$f'(z) = a + ib =$$

イプシロン-デルタ p44 ~

$$q: \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

すなわち、

$q$ : 任意の正の数に対して、適当な正の数を決めると、

$$0 < |x - a| < \delta \text{ のすべての } x \text{ について } |f(x) - b| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

となるのであったが、

結局、q は、とを用いて、

$$q : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon$$

$$\left[ \lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \in C \quad \text{杉浦 (1.1)} \right]$$

$$[q : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |h - 0| < \delta), \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - b \right| < \epsilon]$$

$$\left[ \lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} = b \in C \right]$$

$$[q : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h (0 < |h| < \delta), \left| \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} - b \right| < \epsilon]$$

数学概論 p169

$$\frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik}$$

イプシロン-デルタ p44 ~

$$q: \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

すなわち、

q: 任意の正の数に対して、適当な正の数を決めると、

$$0 < |x - a| < \delta \text{ のすべての } x \text{ について } |f(x) - b| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

となるのであったが、

結局、q は、とを用いて、

$$q: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon$$

$$[f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \text{ア}]$$

$$[q: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h (0 < |h| < \delta), |\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)| < \epsilon]$$

$$[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik} = f'(z) \quad \text{ア + 寺}]$$

$$[q: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h (0 < |h| < \delta), |\frac{\{u(x+k, y+l) + iv(x+k, y+l)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{k + il} - f'(z)| < \epsilon]$$

数学概論 p169

$$\frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik}$$

複素関数 p28

複素関数入門 p26

$$\left(\text{または} \frac{d}{dz} f(z)\right)$$

$$\left[\frac{d}{dx+idy}\{u(x,y)+iv(x,y)\}\right]$$

$$\left[\frac{d}{dx+idy}\{u(a,b)+iv(a,b)\}\right]$$

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z))$$

複素関数入門 p50

$$\frac{-}{z}(f(z))$$

曲面上の関数論 p4

$$dz = dx + idy$$





P51 ~ 52

定義2  $f$  を  $R^n$  の部分集合  $A$  で定義され、 $R^m$  の値を取る函数とし、 $a \in \bar{A}, b \in R^m$  とする。  
 $x$  が  $a$  に近づくときの  $f(x)$  の極限が  $b$  であるとは、どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、  
 $|x - a| < \delta$  となるすべての  $x \in A$  に対し  $|f(x) - b| < \epsilon$  となることを言う。このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

などと表わす。

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon)$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \{0 < |x - a| < \delta\}, |f(x) - b| < \epsilon]$$

[どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |h - 0| < \delta$  となるすべての  $\{a + h\} \in D$  に対し  $|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - b| < \epsilon$  となることを言う。]

P120

ある  $n$  項横ベクトル  $c=[,,]$  が存在して

30p34

どんな正数  $\epsilon$  をとっても、ある正数  $\delta$  で

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon$$

を成り立たせるものが存在するとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

と表わす。そして

複素微分可能、正則 { 解析入門 Ip162 }

定義 1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y)$  が  $a + ib \in D$  において複素微分可能であるとは、ある  $\alpha + i\beta$  が存在して

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall k + il \{0 < |k + il| < \delta\},$$

$$\left| \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} - \{\alpha + i\beta\} \right| < \varepsilon$$

となることをいう。このとき

$$\alpha + i\beta = \{u + iv\}'(a + ib)$$

等と記す。領域  $D$  の各点で複素微分可能であるとき、 $u(x, y) + iv(x, y)$  は  $D$  で正則という。

例  $D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$  は  $1 + i1$  において複素微分可能である。  $2 + i2$

任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、ある  $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |k + il| < \delta$  ならば

$$\left| \frac{\{1+k\}^2 - \{1+l\}^2 + i2\{1+k\}\{1+l\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{k + il} - \{2 + i2\} \right| < \varepsilon \text{ となる。}$$

$\varepsilon = 100$  に対し、 $\delta = 1$ 、 $0 < |0.5 + i\{-0.5\}| < 1$ 、

$$\left| \frac{\{1+0.5\}^2 - \{1-0.5\}^2 + i2\{1+0.5\}\{1-0.5\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2 + i2\} \right| < 100$$

$\varepsilon = \dots$

複素微分可能、正則の定義 { 解析入門 P162 } { 解析入門 P51 ~ 52、120、163 ~、30 講 P89 }

定義 1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された複素数値関数  $u(x, y) + iv(x, y)$  が  $\{a + ib\} \in D$  において複素微分可能であるとは、ある複素数  $\alpha + i\beta$  が存在して

どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |k + il| < \delta$  となるすべての  $\{\{a + ib\} + \{k + il\}\} \in D$  に対し  $\left| \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} - \{\alpha + i\beta\} \right| < \varepsilon$

となることを言う。このとき  $\alpha + i\beta = \{u + iv\}'(a + ib)$  等と記す。領域  $D$  の各点で複素微分可能であるとき、 $u(x, y) + iv(x, y)$  は  $D$  で正則という。

例  $D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$  は  $1 + i1$  で微分可能である

どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |k + il| < \delta$  となるすべての  $\{\{1 + i1\} + \{k + il\}\} \in D$  に対し  $\left| \frac{\{1+k\}^2 - \{1+l\}^2 + i2\{1+k\}\{1+l\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{k + il} - \{2 + i2\} \right| < \varepsilon$  となる。

$$\left| \frac{\{1+0.5\}^2 - \{1-0.5\}^2 + i2\{1+0.5\}\{1-0.5\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2 + i2\} \right| < 100$$

$\varepsilon = 100$  の場合、 $\delta = 1$  は OK。  $0 < |0.5 + i\{-0.5\}| < 1$ 、

$$\left| \frac{\{1+0.5\}^2 - \{1-0.5\}^2 + i2\{1+0.5\}\{1-0.5\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2 + i2\} \right| < 100$$

$\varepsilon = \dots$



大学院別入試問題と解法 P15

[6]

解

複素微分可能、正則の定義 { 解析入門 P162 }

定義 1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された関数  $u(x, y) + iv(x, y)$  が  $\{a + ib\} \in D$  において複素微分可能であるとは、ある複素数  $\alpha + i\beta$  が存在して

$$\{\forall \epsilon > 0\} \{\exists \delta > 0\} \{\forall \{a + ib\} + \{k + il\} \in D\}$$

$$\{0 < |k + il| < \delta \implies \left| \frac{\{u(a + k, b + l) + iv(a + k, b + l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} - \{\alpha + i\beta\} \right| < \epsilon \}$$

となることをいう。このとき

$$\alpha + i\beta = \{u + iv\}'(a + ib)$$

等と記す。領域  $D$  の各点で複素微分可能であるとき、 $u(x, y) + iv(x, y)$  は  $D$  で正則という。

例と説明  $D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$  は  $1 + i1$  で微分可能

$\epsilon$  にどんな数  $\{> 0\}$  を選んでも、 $0 < |k + il| < \delta$  となる  $k + il$  ならなんでも

$$\left| \frac{\{1 + k\}^2 - \{1 + l\}^2 + i2\{1 + k\}\{1 + l\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{k + il} - \{2 + i2\} \right| < \epsilon \text{ となる。そう}$$

いう  $\delta$  が選べる。

$\epsilon = 100$  の場合、 $\delta = 1$  は OK。  $0 < |0.5 + i\{-0.5\}| < 1$ 、

$$\left| \frac{\{1 + 0.5\}^2 - \{1 - 0.5\}^2 + i2\{1 + 0.5\}\{1 - 0.5\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2 + i2\} \right| < 100$$

$\epsilon = \dots$