

複素幾何 p1

一般に、複素数の値をとる関数を複素関数と呼ぶことにする。そして、領域  $U \subset C^n$  で定義された複素関数  $f(z) = f(z^1, \dots, z^n)$  が次の 2 条件のどちらかを満足するとき、この関数は正則であると言う { }

( ) 各点に対して、関数はその近傍で収束するべき級数で表わされる。

( )  $f(z)$  は  $U$  上連続で、各変数  $z^\lambda (\lambda = 1, \dots, n)$  に関して正則である。

次に、 $z^\lambda = x^\lambda + iy^\lambda (\lambda = 1, \dots, n)$  に対して

$$\frac{\partial}{\partial z^\lambda} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - i \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + i \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \right) \quad \{ n \}$$

$$dz^\lambda = dx^\lambda + i dy^\lambda, \quad d\bar{z}^\lambda = dx^\lambda - i dy^\lambda \quad \{ n \}$$

と定義する。そうすると

$$df = d'f + d''f$$

である。ただしここで

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial z^\lambda} dz^\lambda, \quad d''f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \quad *$$

また  $f(z)$  が  $z^\lambda$  に関して正則であるという条件を表わす Cauchy-Riemann の方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\lambda} = 0 \quad \{ \}$$

と書くことができる。実際、とおいたとき、は

$$Re()$$

$$Im()$$

にほかならない。

$$[df = \frac{\partial f}{\partial z^\lambda} dz^\lambda + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda]$$

$$[= \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial v}{\partial y^\lambda} \right\} - \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y^\lambda} + \frac{\partial v}{\partial x^\lambda} \right\} \right\} \{ dx^\lambda + i dy^\lambda \} + \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial v}{\partial y^\lambda} \right\} + \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y^\lambda} + \frac{\partial v}{\partial x^\lambda} \right\} \right\} \{ dx^\lambda - i dy^\lambda \}]$$

$$[= \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x^\lambda} dx^\lambda + \frac{i}{2} \frac{\partial v}{\partial x^\lambda} dx^\lambda + \frac{i}{2} \frac{\partial v}{\partial y^\lambda} dy^\lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y^\lambda} dy^\lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x^\lambda} dx^\lambda + \frac{i}{2} \frac{\partial v}{\partial x^\lambda} dx^\lambda + \frac{i}{2} \frac{\partial v}{\partial y^\lambda} dy^\lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y^\lambda} dy^\lambda]$$

$$[= \frac{\partial u}{\partial x^\lambda} dx^\lambda + i \frac{\partial v}{\partial x^\lambda} dx^\lambda + \frac{\partial u}{\partial y^\lambda} dy^\lambda + i \frac{\partial v}{\partial y^\lambda} dy^\lambda]$$

$$[= \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} dx^\lambda + \frac{\partial f}{\partial y^\lambda} dy^\lambda]$$

複素多様体講義 p20

ただし

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

である。

微分幾何講義 p15

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} - i \frac{\partial}{\partial y^i} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} + i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

$$dz^j = dx^j + i dy^j, \quad d\bar{z}^i = dx^i - i dy^i$$

多様体 p179

の開集合で定義された複素関数が正則関数であるとは関数であって、がのおのおのについて変数の関数として微分可能な複素関数となることとする。

多様体 p198

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

$$dz^i = dx^i + \sqrt{-1} dy^i$$

$$d\bar{z}^i = dx^i - \sqrt{-1} dy^i$$

8.1 { 理論 p259 }

複素数値関数  $f : C^m C$  が正則であるとは  $f = f_1 + i f_2$  が各  $z^\lambda = x^\lambda + i y^\lambda$  に関して Cauchy-Reimann の関係式

を満たすときをいう。

8.2.3 { p267 }

$$\frac{\partial}{\partial z^\mu} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right\}$$

$$dz^\mu \equiv dx^\mu + i dy^\mu, \quad d\bar{z}^\mu \equiv dx^\mu - i dy^\mu$$

8.3.3 { p272 }

条件は

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\lambda} = 0 \quad = \dim_{\mathbb{C}} M$$

となる。従って正則形式はまさに正則関数である。

p4

定義 1.1 領域  $DC^n$  において  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  が連続で各変数  $z_k, k = 1, 2, \dots, n$ 、について正則なときは  $D$  で正則であるといい、

p96

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

と書かれる。

$$d'f =, \quad d''f =$$

と定義すれば、したがって

$$df = d'f + d''f$$

となる。

p69

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$



p1

一般に、複素数の値をとる関数を複素関数と呼ぶことにする。そして、領域  $U \subset C^n$  で定義された複素関数  $f(z) = f(z^1, \dots, z^n)$  が次の 2 条件のどちらかを満足するとき、この関数は正則であるという。

(i) 各点に対して、関数はその近傍で収束するべき級数で表わされる。

(ii)  $f(z)$  は  $U$  上連続で、各変数  $z^\lambda (\lambda = 1, \dots, n)$  に関して正則である。  
、  $z^\lambda = x^\lambda + iy^\lambda (\lambda = 1, \dots, n)$  に対して

$$\frac{\partial}{\partial z^\lambda} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - i \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + i \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \right)$$

$$dz^\lambda = dx^\lambda + i dy^\lambda, \quad d\bar{z}^\lambda = dx^\lambda - i dy^\lambda$$

と定義する。

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial z} dz, \quad d''f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

$$= 0$$

p4

定義 1.1 領域  $DC^n$  において  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  が連続で各変数  $z_k, k = 1, 2, \dots, n$ 、について正則なときは  $D$  で正則であるといい、

p69

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

理論 p259

複素数値関数が正則であるとは各に関する関係式を満たすときをいう。

$$z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4, \dots, z_n = x_{2n-1} + ix_{2n}$$

$$z = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$$

p4

定義 1.1 領域  $DC^n$  において  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  が連続で各変数  $z_k, k = 1, 2, \dots, n$ , について正則なるとき  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  は  $D$  で正則であるとい

p9

{ }{ }

定義 1.2.1  $u(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) + iv(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  が、 $\begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix}$  において全微分可

能であるとは、次が成り立つ

$$\begin{aligned} & u(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) + iv(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \\ &= u(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) + iv(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \\ &+ \{\alpha_1 + i\beta_1\}\{x_1 + iy_1\} - \{a_1 + ib_1\} + \dots + \{\alpha_n + i\beta_n\}\{x_n + iy_n\} - \{a_n + ib_n\} \\ &+ \epsilon_R() + i\epsilon_I() \end{aligned}$$

どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < \left\| \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix} \right\| < \delta$  となるす

すべての  $\begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix}$  に対し  $\left\| \frac{\epsilon_R() + i\epsilon_I()}{\left\| \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix} \right\|} \right\| < \epsilon$

となることを意味する。



p13

$n$  次元複素多様体とは、次のような 2 条件を満たす開被覆  $\{U_j\}$  と写像

$$: U_j \rightarrow C^n$$

をもつ Hausdorff 空間  $X$  である：

- (a) 各  $j$  に対し、 $(U_j)$  は  $C^n$  の開集合で、 $h_j$  は  $U_j$  から  $X$  への同相写像である。
- (b)  $U_j \cap U_k$  が空集合でないときは、いつでも

が正則写像になっている。

いま

p34

連結 Hausdorff 空間の上に局所複素座標系  $\{z_1, z_2, \dots, z_j, \dots\}$  が定義されているとき上に複素構造が定義されているという。複素構造が定義されている連結 Hausdorff 空間、すなわち局所複素座標系が定義されている連結 Hausdorff 空間を複素多様体とよび、 $M, N$  等の文字で表わす。



p6

領域で定義された複素微分形式はを使って表わされる。そのとき

=

のような微分形式を、 $(p, q)$  次の微分形式または単にとよぶ。

このような  $(p, 0)$  次の微分形式を正則  $p$  次微分形式、

p96

$(p, 0)$  形式の係数が正則関数なるときを正則  $p$  形式とよぶ。



P114

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

f を  $o(g)\{x \rightarrow a\}$  と

P120

$$f(a+h) - f(a) = ch + o(|h|) \quad \{h \rightarrow 0\}$$

P51 ~ 52

どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $|x - a| < \delta$  となるすべての  $x$  に対し  $|f(x) - b| < \epsilon$  となることを言う。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

[どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |x - a| < \delta$  となるすべての  $x$  に対し  $|\frac{f(x)}{g(x)} - 0| < \epsilon$  となることを言う。]

[どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |h| < \delta$  となるすべての  $h$  に対し  $|\frac{f(x)}{|h|} - 0| < \epsilon$  となることを言う。]

$$\{\forall \epsilon > 0\} \{\exists \delta > 0\} \{\forall \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \right\} \in U\} \{0 < \left\| \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \right\| < \delta \implies \left| \frac{\epsilon_0(h_1, \dots, h_n)}{\left\| \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \right\|} \right| < \epsilon\}$$

となることをいう。