

p108

本節では X は n 次元複素多様体とする。

e_1, \dots, e_n を TX の局所枠、 $\theta^1, \dots, \theta^n$ をその双対枠とすると、

() を使って

そこで

$$\Theta^i = d\theta^i + \sum_j \omega_j^i \wedge \theta^j \quad (5.4)$$

とおき、行列の記号

を使えば、とは

とまとめられる。、そして $T =$ をねじれとよぶ。

複素多様体 X の Hermite 計量はとしても定義できるが、ここでは X の Riemann 計量 g で次の条件を満たすものとして定義する。

$$g(\xi, \eta) = g(J\xi, J\eta), \quad \xi, \eta \in T_x X, x \in X \quad \{ \}$$

Hermite 計量の与えられた複素多様体を Hermite 多様体 とよぶ { ち }。

$$\Phi(\xi, \eta) = g(\xi, J\eta) \quad \{ c \}$$

と書く。 Φ は ξ と η に関して交代となる { }。この 2 次微分形式を Hermite 多様体 (X, g) の基本 2 次微分形式とよぶ。

X の局所座標系 z^1, \dots, z^n に対して

$$g_{i\bar{j}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) \quad \{ c \}$$

とおき { }

そのとき、基本 2 次微分形式 { } は

$$\Phi = i \sum g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \quad \{ c \}$$

$$[\Phi\left(\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right) = i \sum g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) dz^i \wedge d\bar{z}^j\left(\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right)]$$

と書ける*。

命題と式で示したように、Hermite 多様体 (X, g) の標準接続の接続形式と曲率形式が (), () で与えられたとき、Hermite 複素直線束 $(\det TX, \det g)$ の標準接続の接続形式、曲率形式は

$$tr(R) =, \quad \text{ただし} \quad R_{k\bar{l}} = \sum R_{ik\bar{l}}^i$$

によって与えられる。式 () と (4.63) によれば、とは g の体積要素を使って次のように表わされる。

$$R_{k\bar{l}} = \frac{\partial^2 \log(\det(g_{i\bar{j}}))}{\partial z^k \partial \bar{z}^l}$$

解説 { 理論 p275 ~ }

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = g\left(J \frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = ig_{\mu\nu} = 0$$

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) = 0 \quad \Omega\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) = ig_{\mu\bar{\nu}} =$$

{ 多様体 p208 ~ }

$$\Omega = i \sum_{i,j=1}^m h_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

z^1, \dots, z^n が X の局所座標系ならば、 TX は $\partial/\partial z^1, \dots, \partial/\partial z^n$ を基とし、。

g を、写像

$$g: T_x^C X \times T_x^C X \longrightarrow C$$

に拡張し、

p7

V に複素構造 J が与えられているとする。 V のエルミート構造とは、複素数値関数 $H(x, y)(x, yV)$ で、次の条件をみたすものである：

(1)

(2)

(3) $H(Jx, y) = iH(x, y)$

(2) により、(3) は次と同値である：

(3') $H(x, Jy) = -iH(x, y)$

8.2.3 { p267 }

J_p は $T_p M^C$ 上で定義されるように拡張される、

$$J_p(X + iY) \equiv J_p X + iJ_p Y$$

(8.16) から

$$J_p \frac{\partial}{\partial z^\mu} = i \frac{\partial}{\partial z^\mu}, \quad J_p \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}$$

が示される。

8.3.1 { p270 }

$\zeta = \omega + i\eta$ と $\xi = \varphi + i\psi$ の外積は

$$\begin{aligned} \zeta \wedge \xi &= (\omega + i\eta) \wedge (\varphi + i\psi) \\ &= (\omega \wedge \varphi - \eta \wedge \psi) + i(\omega \wedge \psi + \eta \wedge \varphi) \end{aligned}$$

で定義される。

8.4

$Z = X + iY, W = U + iV \in T_p M^C$ をとり g を

$$g_p(Z, W) = g_p(X, U) - g_p(Y, V) + i[g_p(X, V) + g_p(Y, U)]$$

と拡張する。

8.4.1 { p275 }

複素多様体 M の Riemann 計量 g が、各点 pM と任意の $X, Y \in T_p M$ に対して

$$g_p(J_p X, J_p Y) = g_p(X, Y)$$

を満たすとき g は Hermite 計量とよばれる。

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = g\left(J \frac{\partial}{\partial z^\mu}, J \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = -g\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right)$$

$$g = \otimes \otimes \quad (8.53)$$

8.4.2

(M,g) を Hermite 多様体とする。テンソル場を

$$\Omega_p(X, Y) = g_p(J_p X, Y) \quad X, Y \in T_p M$$

で定義する。よって 2-形式を定めるが、それを Hermite 計量 g の Kahler 形式とよぶ。

定義域を $T_p M$ から $T_p M^C$ に拡張すると、は双次数 (1,1) の 2-形式となる。事実、計量 (8.53) に対して

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = g\left(J \frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = ig_{\mu\nu} = 0$$

を得る。また

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) = 0 \quad \Omega\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) = ig_{\mu\bar{\nu}} =$$

を得る。よっての成分は

である。したがって

$$\Omega = ig_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \otimes d\bar{z}^\nu - ig_{\bar{\nu}\mu} d\bar{z}^\nu \otimes dz^\mu = ig_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu$$

と書くことができる。Ω はまた

$$\Omega = -J_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu$$

ともかけられる。ここで $J_{\mu\bar{\nu}} = gJ = -ig_{\mu\bar{\nu}}$ である。Ω は実形式である；

$$\bar{\Omega} = -ig_{\mu\bar{\nu}} d\bar{z}^\mu \wedge dz^\nu = ig_{\nu\bar{\mu}} dz^\nu \wedge d\bar{z}^\mu = \Omega$$

多様体 p208

$$\Omega = i \sum_{i,j=1}^m h_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

複素多様体論 p162

定理 各点 M において $g(z) = g(z)$ で複素変数の Hermite 形式 $\sum g_{i\bar{j}}(z) dz^i d\bar{z}^j$ が正値なるときを Hermite 計量とよぶ。

計量に形式

を対応させる。

である。すなわち実 (1,1) 形式である。

故には上の級実 (1,1) 形式であって

$$\omega = i \sum g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

と表わされる。

多様体入門 p99

M のリーマン計量 g が M の各点 p と任意の $u, v \in T_p(M)$ について

$$g_p(J_p u, J_p v) = g_p(u, v)$$

をみたすとき、 g を複素多様体 M のエルミット計量とよぶ。

p115

、すなわち $= 0$

上の定理の条件を満たすような Hermite 計量 g を Kahler 計量とよび、 (X, g) を Kahler 多様体とよぶ。

p192

を複素多様体上の計量を対応する実形式とする (ページ)。 $= 0$ なるときを Kahler 計量、を Kahler 形式とよぶ。 Kahler 計量が定義された複素多様体を Kahler 多様体とよぶ。

p280

定義 8.4 Kahler 多様体とは Hermite 多様体 (M, g) で、その Kahler 形式が閉形式であるものをいう $:= 0$ 。計量 g は M の Kahler 計量とよばれる。

p270

定義 19 V を \mathbb{R} 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式とは、 V の k 個の直積から \mathbb{R} への写像

であって、 k 各に関して線型であるようなものを言う。

p274

定義 V を \mathbb{R} 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式が対称次形式であるとは、の間にどのような置換を施しても、の値が変わらないことである。

p275

定義 級多様体 M 上のテンソル場が k 次対称テンソル場であるとは、 M の各点 p において、 $T_p(M)$ 上の対象 k 次形式になっていることである。

定義 19 級多様体 M 上の 2 次の対称テンソル場が、 M の各点において正定値であるとき、を M のリーマン計量という。

つまり、 M の各点 p の接ベクトル空間 $T_p(M)$ に内積を与えるようなものがリーマン計量である。

p11

を上のベクトル空間とする。との直積集合からへの写像が条件をみたすとき、を上の双一次形式とよぶ。

p12

を V 上の (\quad) 双一次形式とする。任意の $\alpha, \beta \in V$ に対して、

$$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$$

がなりたつとき、を V 上の対称双一次形式と

V 上の正則な対称双一次形式のことを V の内積とよぶ。すなわち、

の二条件をみたす場合をいう。 V 上の対称双一次形式が

をみたすとき、を V の正値内積とよぶ。

p199

定義を微分多様体とする。 M 上の Riemann 計量 g とは、各点で次の公理

$$g_p(U, V) = g_p(V, U)$$

$$g_p(U, U) \geq 0, \text{ ただし等号は } U=0 \text{ のときのみ成り立つ}$$

を満たす M 上の型テンソルである。ここで $U, V \in T_p M$, である。手短に言えばは正定値な対称双 1 次形式である。

p259

定義 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の 1 次形式とは、 V から R への写像

$$\omega : V \rightarrow R$$

であって、任意のベクトル $X, Y \in V$ と任意の実数 $a, b \in R$ について

$$\omega(aX + bY) = a\omega(X) + b\omega(Y)$$

がなりたつようなものをいう（すなわち、 V から R への線型写像 $\omega : V \rightarrow R$ のことである）。

V 上の 1 次形式全体のなす集合を V^* と書くことにする。

定義 V^* を、 V の双対ベクトル空間または双対空間という。

e_1, e_2, \dots, e_m を、任意に選んだ V の基底とする。 V の任意のベクトル X は

$$X = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m \quad (a_i \in R)$$

のように、 e_1, e_2, \dots, e_m の次結合で書ける。番号 $i (1 \leq i \leq m)$ をひとつ固定して、ベクトル X に、 e_i の係数 a_i を対応させる写像 $\omega_i : V \rightarrow R$ を考える：

$$\omega_i(X) = a_i$$

この写像 $\omega_i : V \rightarrow R$ は明らかに線型写像であるから、 ω_i は V 上の 1 次形式と考えられる。

番号 i を 1 から m まで動かして得られる $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ という m 個の 1 次形式が、実は V^* の基底になるのである。

定義 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ を、に対応する双対基底という。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} f_{i_1 \cdots i_k}() dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_j}() dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \right] \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} f_{i_1 i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \{f_{1i_2} dx_1 \wedge dx_{i_2} + f_{2i_2} dx_2 \wedge dx_{i_2} + f_{3i_2} dx_3 \wedge dx_{i_2}\} \\
&= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{21} dx_2 \wedge dx_1 + [f_{22} dx_2 \wedge dx_2] + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{31} dx_3 \wedge dx_1 + f_{32} dx_3 \wedge dx_2 + [f_{33} dx_3 \wedge dx_3] \\
&= \{f_{23} - f_{32}\} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \{f_{31} - f_{13}\} dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \\
d\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \frac{\partial f_{i_1 i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \left\{ \frac{\partial f_{1i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{2i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{3i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_{i_2} \right\} \\
&= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \left[\frac{\partial f_{22}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_{33}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_3 \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \{f_{23} - f_{32}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \{f_{31} - f_{13}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
d\omega &= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \right] + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \left[\frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{22}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \left[+ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] \\
& + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \left[+ \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{33}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_3 \right]
\end{aligned}$$

{ P290 }

m 次元級多様体 M 上の k 次微分形式を座標近傍 $(U; x_1, x_2, \dots, x_m)$ 上で局所座標表示したものが

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

であったとする。

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

微分形式の幾何学 p61

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

を R^n 上の k 次の微分形式、。上記を簡単に、 $f_I(x)$ と記す場合もある。外微分とは、つぎのように定義される線形写像

$$d: A^k(R^n) \rightarrow A^{k+1}(R^n)$$

のことである。すなわち $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ に対して

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

30p213

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

微分位相 p35

$$\sum_{h_1} \dots \sum_{h_p} a_{h_1 \dots h_p} dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_p}$$

$$du \wedge du = 0, \quad dv \wedge dv = 0, \quad du \wedge dv = -dv \wedge du$$

次に外微分 d を

0 次微分形式 (f) に対しては

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

1 次微分形式 $= f du + g dv$ に対しては

$$= df \wedge du + dg \wedge dv$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv$$

2 次微分形式 $= f du \wedge dv$ に対しては

$$= df \wedge du \wedge dv$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du \wedge dv = 0$$

と定義する。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \\ &= 0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + 0 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + 0 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{21} dx_2 \wedge dx_1] + [f_{22} dx_2 \wedge dx_2] + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{31} dx_3 \wedge dx_1] + [f_{32} dx_3 \wedge dx_2] + [f_{33} dx_3 \wedge dx_3] \\ &= f_{23} dx_2 \wedge dx_3 - f_{13} dx_3 \wedge dx_1 + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

ストークスの定理 { P305 }

定理 { ストークスの定理 }

$$\int_N d\eta = \int_{\partial N} \eta$$

証明

$$\eta = \sum_{i=1}^m g_i dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_i \wedge \dots \wedge dx_m$$

$d\hat{x}_i$ は dx_i を除くことを表わす。

$$d\eta = \sum_{i=1}^m \{-1\}^{i-1} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_m$$

。により、

$$\begin{aligned} \int_N d\eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) dx_m dx_1 \dots \\ &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \{g_1(a, \dots, x_m) - g_1(0, \dots, x_m)\} \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a \{g_m(x_1, \dots, a) - g_m(x_1, \dots, 0)\} dx_1 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial N} \eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots g_1(a, \dots, x_m) \dots dx_m - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots g_1(0, \dots, x_m) \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a g_m(x_1, \dots, a) dx_1 \dots - \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a g_m(x_1, \dots, 0) dx_1 \dots \end{aligned}$$

[次のページへ続く。]

例

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(a, x_2) dx_2 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(0, x_2) dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, a) dx_1 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, 0) dx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(a, x_2, x_3) dx_2 dx_3 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(0, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, a, x_3) dx_1 dx_3 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, 0, x_3) dx_1 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, a) dx_1 dx_2 - \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

{ 微分幾何 P124 }

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right\} du dv \\ &= \int_0^b \int_0^a \frac{\partial g}{\partial u} du dv - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial f}{\partial v} dv du \\ &= \int_0^b [g(a, v) - g(0, v)] dv - \int_0^a [f(u, b) - f(u, 0)] du \end{aligned}$$