

p115

定理 Hermite 多様体 (X, g) に対して次の 2 条件は互いに同値である { }

(a) 標準接続 { } のねじれ率が 0 である。

(b) 基本 2 次微分形式 { } が閉じている { } すなわち $d\Phi = 0$ { }

[証明] 前節のように、正規直交双対局所枠 $\theta^1, \dots, \theta^n$ を使って

$$\Phi = i \sum \theta^j \wedge \bar{\theta}^j$$

と書く。(5.4) を使って

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} d\Phi &= d\left(\sum \theta^j \wedge \bar{\theta}^j\right) = \sum d\theta^j \wedge \bar{\theta}^j - \theta^j \wedge d\bar{\theta}^j \\ &= {}^{*1} \sum (-\omega_k^j \wedge \theta^k \wedge \bar{\theta}^j + \theta^j \wedge \bar{\omega}_k^j \wedge \bar{\theta}^k) + \sum (\Theta^j \wedge \bar{\theta}^j - \theta^j \wedge \bar{\Theta}^j) \end{aligned}$$

そのとき、 $\bar{\omega}_k^j = {}^{*2} -\omega_j^k$ だから

$$d\Phi = i \sum (\Theta^j \wedge \bar{\theta}^j - \theta^j \wedge \bar{\Theta}^j)$$

を得る。の次数は (2,1)、の次数は (1,2) だから、条件は次の 2 式に同値である。

$$\sum \Theta^j \wedge \bar{\theta}^j = 0 \quad \text{と} \quad \sum \theta^j \wedge \bar{\Theta}^j = 0$$

しかし 2 番目の式は 1 番目の式の複素共役であるから、1 番目の式だけ考えればよい。 Θ^j の次数が (2,0) で $\bar{\theta}^j$ の次数が (0,1) だから、上の 1 番目の等式から $\Theta^j = 0$ が出る *3。したがって、とは同値である。

上の定理の条件を満たすような Hermite 計量 g を Kahler 計量とよび、 (X, g) を Kahler 多様体 とよぶ { }

(5.15) のように $\Phi = i \sum g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ と書いて $d\Phi = 0$ を計算すると { }, g が Kahler 計量であるという条件は

$$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} = \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial \bar{z}^j} \quad \{ \}$$

で与えられる。

説明

*1

$$\begin{aligned} &= \sum \{ \Theta^j - \sum_k \omega_k^j \wedge \theta^k \} \wedge \bar{\theta}^j - \theta^j \wedge \{ \bar{\Theta}^j - \sum_k \bar{\omega}_k^j \wedge \bar{\theta}^k \} \\ &= \sum \{ -\sum_k \omega_k^j \wedge \theta^k \} \wedge \bar{\theta}^j + \theta^j \wedge \{ \sum_k \bar{\omega}_k^j \wedge \bar{\theta}^k \} + \sum \Theta^j \wedge \bar{\theta}^j - \theta^j \wedge \bar{\Theta}^j \\ d\Phi &= i \sum \{ \sum \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^\lambda} dz^\lambda \} \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j + i \sum \{ \sum \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \} \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j \end{aligned}$$

$$g_{i\bar{j}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)$$

{ 理論 p280 ~ }

$$\begin{aligned}
[d\omega &= \sum \{ \sum \frac{\partial f_{A\bar{B}}}{\partial z^\lambda} dz^\lambda \} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B + \sum \{ \sum \frac{\partial f_{A\bar{B}}}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B] \\
&[d\omega \\
&= i \sum \sum \{ \frac{1}{2} \{ \frac{\partial u_{i\bar{j}}}{\partial x^\lambda} () + \frac{\partial v_{i\bar{j}}}{\partial y^\lambda} () \} - \frac{i}{2} \{ \frac{\partial u_{i\bar{j}}}{\partial y^\lambda} () - \frac{\partial v_{i\bar{j}}}{\partial x^\lambda} () \} \} \{ dx^\lambda + idy^\lambda \} \wedge \{ dx^i + idy^i \} \wedge \{ dx^j - idy^j \} \\
&+ i \sum \sum \{ \frac{1}{2} \{ \frac{\partial g_1 \times (\frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - i \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \}, \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^j} + i \frac{\partial}{\partial y^j} \})}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_2 (\frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^i} - i \frac{\partial}{\partial y^i} \}, \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^j} + i \frac{\partial}{\partial y^j} \})}{\partial y^\lambda} \} \\
&+ \frac{i}{2} \{ \frac{\partial g_1 (\frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^i} - i \frac{\partial}{\partial y^i} \}, \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^j} + i \frac{\partial}{\partial y^j} \})}{\partial y^\lambda} + \frac{\partial g_2 (\frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^i} - i \frac{\partial}{\partial y^i} \}, \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^j} + i \frac{\partial}{\partial y^j} \})}{\partial x^\lambda} \} \} \{ dx^\lambda - idy^\lambda \} \\
&\wedge \{ dx^i + idy^i \} \wedge \{ dx^j - idy^j \}]
\end{aligned}$$

p1

$$d'f = \sum \frac{\partial f}{\partial z^\lambda} dz^\lambda, \quad d''f = \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda$$

p6

領域 $U \subset C^n$ で定義された複素微分形式は $dz^1, \dots, dz^n, d\bar{z}^1, \dots, d\bar{z}^n$ を使って表わされる。そのとき

$$\omega = \sum f_{a_1 \dots a_p \bar{b}_1 \dots \bar{b}_q} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_p} \wedge d\bar{z}^{b_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{b_q}$$

のような微分形式を、 (p, q) 次の微分形式または単にとよぶ。

$$\omega = \sum f_{A\bar{B}} dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

$$d\omega = d'\omega + d''\omega$$

と書ける。ただし、ここで

$$d'\omega = \sum d'f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B, \quad d''\omega = \sum d''f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

$$[d\omega = \sum \{ \sum \frac{\partial f_{A\bar{B}}}{\partial z^\lambda} dz^\lambda \} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B + \sum \{ \sum \frac{\partial f_{A\bar{B}}}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B]$$

$$\begin{aligned} & [d\omega \\ &= \sum \sum \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () + \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () \right\} - \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () - \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () \right\} \right\} \{ dx^\lambda + i dy^\lambda \} \wedge \{ dx^A + i dy^A \} \wedge \{ dx^B - i dy^B \} \\ &+ \sum \sum \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () - \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () \right\} + \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () + \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () \right\} \right\} \{ dx^\lambda - i dy^\lambda \} \wedge \{ dx^A + i dy^A \} \wedge \{ dx^B - i dy^B \} \end{aligned}$$

$d''f_A = 0$ 。このような $(p, 0)$ 次の微分形式を正則 p -形式、

p53

、 M をエルミート多様体とよぶ。

$$H =$$

とおく。

まず第にケーラー形式

$$H =$$

がある。エルミート多様体 は、ケーラー 形式が閉 形式

$$dH = 0 \quad (7.5)$$

であるとき、ケーラー多様体とよばれる。

$$- = 0 \quad (7.13)$$

直接 計算する ことにより、(7.5) と (7.13) が同値であることがわかる。

8.4.3 { p277 }

にあるように計量両立性を要請しよう。すなわちとなることを要請する。これは、成分でかくと

$$\partial_{\kappa} g_{\mu\bar{\nu}} - g_{\lambda\bar{\nu}} \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu} = 0 \quad = 0$$

となる。接続係数は容易に読み取れて：

$$\Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu} = g^{\bar{\nu}\lambda} \partial_{\kappa} g_{\mu\bar{\nu}} =$$

となる。ここではの逆行列である；

8.4.4 { p278 }

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} = g^{\bar{\xi}\lambda} (\partial_{\mu} g_{\nu\bar{\xi}} - \partial_{\nu} g_{\mu\bar{\xi}})$$

8.5.1 { p280 }

定義 8.4 Kahler 多様体とは Hermite 多様体 (M, g) で、その Kahler 形式 Ω が閉形式であるものをいう： $d\Omega = 0$ 。計量 g は M の Kahler 計量とよばれる。

g を Kahler 計量とする。 $d\Omega = 0$ から

$$\begin{aligned} &= i \partial_k g_{i\bar{j}} dz^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j + i \partial_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} d\bar{z}^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j \\ &= i \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j + i \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j \\ &= \frac{1}{2} i \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j + \frac{1}{2} i \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z^i} dz^i \wedge dz^k \wedge d\bar{z}^j + \frac{1}{2} i \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j + \frac{1}{2} i \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^k \\ &= \frac{1}{2} i (\partial_k g_{i\bar{j}} - \partial_i g_{k\bar{j}}) dz^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j + \frac{1}{2} i (\partial_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} - \partial_{\bar{j}} g_{i\bar{k}}) d\bar{z}^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j = 0 \end{aligned}$$

となり、これより

$$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z^i} \quad \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} = \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial \bar{z}^j} \quad (8.82)$$

が得られる。

8.5.2 { p284 }

Kahler 計量 g は (8.82) によって特徴づけられる；

$$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z^i} \quad \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} = \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial \bar{z}^j}$$

これにより、計量は捩率ゼロであることが保障される；

$$\begin{aligned} T^k_{ij} &= g^{\bar{\xi}\lambda} (\partial_{\mu} g_{\nu\bar{\xi}} - \partial_{\nu} g_{\mu\bar{\xi}}) = 0 \\ &== 0 \end{aligned}$$

7.2.4 { p206 }

∇_X は微分としての意味をもつものの共変微分を通常の方法で

$$\nabla_X f = X[f]$$

によって定義するのは自然であろう。このときはちょうど規則

$$\nabla_X(fY) = (\nabla_X f)Y + f\nabla_X Y$$

のようになる。これが任意のテンソル積に対しても正しいことを要請する。すなわち

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$$

を要請する。。。これらの要請の下で形式の共変微分を計算しよう。に対してなので

を得るはずである。両辺を成分で書き下すと

$$(\nabla_X \omega)_\nu = X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - X^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda$$

となる。特に $X = e_\mu$ に対しては

$$(\nabla_\mu \omega)_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda$$

を得る。

8.4.3 { p277 }

と仮定する (式 (7.9) 参照)。

を満たす (式 (7.14) 参照)。

p192

複素多様体 M^n 上の計量を対応する実 (1,1) 形式とする (162 ページ)。 $d\omega = 0$ なるときを Kahler 計量、を Kahler 形式とよぶ。 Kahler 計量が定義された複素多様体を Kahler 多様体とよぶ。

p108

z^1, \dots, z^n が X の局所座標系ならば、 TX は $\partial/\partial z^1, \dots, \partial/\partial z^n$ を基とし、。

複素多様体 X の Hermite 計量はとしても定義できるが、ここでは X の Riemann 計量 g で次の条件を満たすものとして定義する。

$$g(\xi, \eta) = g(J\xi, J\eta), \quad \xi, \eta \in T_x X, x \in X$$

$$\Phi(\xi, \eta) = g(\xi, J\eta)$$

と書く。この 2 次微分形式を Hermite 多様体 (X, g) の基本 2 次微分形式とよぶ。
 X の局所座標系に対して

$$g_{i\bar{j}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)$$

とおき、
 そのとき、基本 2 次微分形式は

$$\Phi = i \sum g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

と書ける。

p162

Hermite 計量

$$\omega = i \sum g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

多様体入門 p99

M のリーマン計量 g が M の各点 p と任意の $u, v \in T_p(M)$ について

$$g_p(J_p u, J_p v) = g_p(u, v)$$

をみたすとき、 g を複素多様体 M のエルミット計量とよぶ。

p275

複素多様体 M の Riemann 計量 g が、各点 $p \in M$ と任意の $X, Y \in T_p M$ に対して

$$g_p(J_p X, J_p Y) = g_p(X, Y)$$

を満たすとき g は Hermite 計量とよばれる。

p270

定義 19 V を \mathbb{R} 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式とは、 V の k 個の直積から \mathbb{R} への写像

であって、各 v_i に関して線型であるようなものを言う。

p274

定義 V を \mathbb{R} 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式が対称次形式であるとは、の間にどのような置換を施しても、の値が変わらないことである。

p275

定義 級多様体 M 上のテンソル場が k 次対称テンソル場であるとは、 M の各点 p において、 $T_p(M)$ 上の対象 k 次形式になっていることである。

定義 19 級多様体 M 上の 2 次の対称テンソル場が、 M の各点において正定値であるとき、 M のリーマン計量という。

つまり、 M の各点 p の接ベクトル空間 $T_p(M)$ に内積を与えるようなものがリーマン計量である。

p11

を上のベクトル空間とする。との直積集合からへの写像が条件をみたすとき、を上の双一次形式とよぶ。

p12

を V 上の () 双一次形式とする。任意のにたいして、

$$() = ()$$

がなりたつとき、を V 上の対称双一次形式と

V 上の正則な対称双一次形式のことを V の内積とよぶ。すなわち、

の二条件をみたす場合をいう。 V 上の対称双一次形式が

をみたすとき、を V の正值内積とよぶ。

p199

定義を微分多様体とする。 M 上の Riemann 計量 g とは、各点で次の公理

$$g_p(U, V) = g_p(V, U)$$

$$g_p(U, U) \geq 0, \text{ ただし等号は } U=0 \text{ のときのみ成り立つ}$$

を満たす M 上の型テンソルである。ここで $U, V \in T_p M$ である。手短に言えばは正定値な対称双 1 次形式である。

p259

定義 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の 1 次形式とは、 V から R への写像

$$\omega : V \rightarrow R$$

であって、任意のベクトル $X, Y \in V$ と任意の実数 $a, b \in R$ について

$$\omega(aX + bY) = a\omega(X) + b\omega(Y)$$

がなりたつようなものをいう（すなわち、 V から R への線型写像 $\omega : V \rightarrow R$ のことである）。

V 上の 1 次形式全体のなす集合を V^* と書くことにする。

定義 V^* を、 V の双対ベクトル空間または双対空間という。

e_1, e_2, \dots, e_m を、任意に選んだ V の基底とする。 V の任意のベクトル X は

$$X = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m \quad (a_i \in R)$$

のように、 e_1, e_2, \dots, e_m の次結合で書ける。番号 $i (1 \leq i \leq m)$ をひとつ固定して、ベクトル X に、 e_i の係数 a_i を対応させる写像 $\omega_i : V \rightarrow R$ を考える：

$$\omega_i(X) = a_i$$

この写像 $\omega_i : V \rightarrow R$ は明らかに線型写像であるから、 ω_i は V 上の 1 次形式と考えられる。

番号 i を 1 から m まで動かして得られる $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ という m 個の 1 次形式が、実は V^* の基底になるのである。

定義 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ を、に対応する双対基底という。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} f_{i_1 \cdots i_k}() dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_j}() dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \right] \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} f_{i_1 i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \{f_{1i_2} dx_1 \wedge dx_{i_2} + f_{2i_2} dx_2 \wedge dx_{i_2} + f_{3i_2} dx_3 \wedge dx_{i_2}\} \\
&= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{21} dx_2 \wedge dx_1 + f_{22} dx_2 \wedge dx_2 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{31} dx_3 \wedge dx_1 + f_{32} dx_3 \wedge dx_2 + f_{33} dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \{f_{23} - f_{32}\} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \{f_{31} - f_{13}\} dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \\
d\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \frac{\partial f_{i_1 i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \left\{ \frac{\partial f_{1i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{2i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{3i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_{i_2} \right\} \\
&= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \{f_{23} - f_{32}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \{f_{31} - f_{13}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
d\omega &= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \right] + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{22}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \left[+ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] \\
& + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \left[+ \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{33}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_3 \right]
\end{aligned}$$

{ P290 }

m 次元級多様体 M 上の k 次微分形式を座標近傍 $(U; x_1, x_2, \dots, x_m)$ 上で局所座標表示したものが

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

であったとする。

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

微分形式の幾何学 p61

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

を R^n 上の k 次の微分形式、。上記を簡単に、 $f_I(x)$ と記す場合もある。外微分とは、つぎのように定義される線形写像

$$d: A^k(R^n) \rightarrow A^{k+1}(R^n)$$

のことである。すなわち $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ に対して

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

30p213

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

微分位相 p35

$$\sum_{h_1} \dots \sum_{h_p} a_{h_1 \dots h_p} dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_p}$$

$$du \wedge du = 0, \quad dv \wedge dv = 0, \quad du \wedge dv = -dv \wedge du$$

次に外微分 d を

0 次微分形式 (f) に対しては

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

1 次微分形式 $= f du + g dv$ に対しては

$$= df \wedge du + dg \wedge dv$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv$$

2 次微分形式 $= f du \wedge dv$ に対しては

$$= df \wedge du \wedge dv$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du \wedge dv = 0$$

と定義する。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \\ &= 0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + 0 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + 0 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{21} dx_2 \wedge dx_1] + [f_{22} dx_2 \wedge dx_2] + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{31} dx_3 \wedge dx_1] + [f_{32} dx_3 \wedge dx_2] + [f_{33} dx_3 \wedge dx_3] \\ &= f_{23} dx_2 \wedge dx_3 - f_{13} dx_3 \wedge dx_1 + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

ストークスの定理 { P305 }

定理 { ストークスの定理 }

$$\int_N d\eta = \int_{\partial N} \eta$$

証明

$$\eta = \sum_{i=1}^m g_i dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_i \wedge \dots \wedge dx_m$$

$d\hat{x}_i$ は dx_i を除くことを表わす。

$$d\eta = \sum_{i=1}^m \{-1\}^{i-1} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_m$$

。により、

$$\begin{aligned} \int_N d\eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) dx_m dx_1 \dots \\ &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \{g_1(a, \dots, x_m) - g_1(0, \dots, x_m)\} \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a \{g_m(x_1, \dots, a) - g_m(x_1, \dots, 0)\} dx_1 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial N} \eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots g_1(a, \dots, x_m) \dots dx_m - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots g_1(0, \dots, x_m) \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a g_m(x_1, \dots, a) dx_1 \dots - \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a g_m(x_1, \dots, 0) dx_1 \dots \end{aligned}$$

[次のページへ続く。]

例

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(a, x_2) dx_2 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(0, x_2) dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, a) dx_1 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, 0) dx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(a, x_2, x_3) dx_2 dx_3 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(0, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, a, x_3) dx_1 dx_3 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, 0, x_3) dx_1 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, a) dx_1 dx_2 - \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

{ 微分幾何 P124 }

$$\begin{aligned}& \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right\} du dv \\&= \int_0^b \int_0^a \frac{\partial g}{\partial u} du dv - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial f}{\partial v} dv du \\&= \int_0^b [g(a, v) - g(0, v)] dv - \int_0^a [f(u, b) - f(u, 0)] du\end{aligned}$$