

{ p147 ~ } p165?

この節では x での (p,q) 次微分形式の全体を $A^{p,q}$ と書くことにする。 $\theta^1, \dots, \theta^n$ を x における $(1,0)$ 次微分形式の空間 $A^{1,0}$ の正規直交基とする。例えば複素ユークリッド空間の場合、複素座標系とするとその長さが $\sqrt{2}$ になるから、 $\theta^1 = dz^1/\sqrt{2}, \theta^n = dz^n/\sqrt{2}$ が正規直交基となる。

$I = (i_1, \dots, i_p), J = (j_1, \dots, j_q)$ において

と書く。このとき係数 a_{IJ} は i_1, \dots, i_p と j_1, \dots, j_q について交代になっているとする。

二つの (p,q) 微分形式

$$\alpha = \frac{1}{p!q!} \sum a_{IJ} \theta^I \wedge \bar{\theta}^J, \quad \beta = \frac{1}{p!q!} \sum b_{IJ} \theta^I \wedge \bar{\theta}^J$$

の内積を

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{p!q!} \sum a_{IJ} \bar{b}_{IJ} =$$

と定義する。

Hodge の * 作用素 $*$: $A^{p,q} \rightarrow A^{n-q,n-p}$ を次のように定義する。 $(0,0)$ 次微分形式である定数 1 に対しては

$$*1 = (\sqrt{-1}\theta^1 \wedge \bar{\theta}^1) \wedge \dots \wedge (\sqrt{-1}\theta^n \wedge \bar{\theta}^n)$$

と定義する。したがって $*1$ は体積要素である。一般の (p,q) 次微分形式 β に対しては $*\beta \in A^{n-q,n-p}$ を

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle *1, \quad \alpha \in A^{p,q}$$

によって定義する。。

に対し

$$*\beta = \frac{(\sqrt{-1})^{n^2}}{p!q!(n-p)!(n-q)!} \sum_{I, J, I', J'} \varepsilon(I \bar{J} I' \bar{J}') \bar{b}_{IJ} \theta^{I'} \wedge \bar{\theta}^{J'}$$

とすればよい。ただし、ここで $I' = (i_{p+1}, \dots, i_n)$ と $J' = (j_{q+1}, \dots, j_n)$ は順序のついた添字の集合でそれぞれとの余集合、そして $\varepsilon(I \bar{J} I' \bar{J}')$ は $(I \bar{J} I' \bar{J}')$ を $(1, \dots, n, \bar{1}, \dots, \bar{n})$ と較べたときの置換の符号を表わす。

基本 2 次微分形式

$$\Phi = \sqrt{-1} \theta^j \wedge \bar{\theta}^j$$

による外積、すなわち

$$L\alpha = \alpha \wedge \Phi, \quad \alpha \in A^{p,q}$$

によって作用素

$$L : A^{p,q} \longrightarrow A^{p+1,q+1}$$

を定義する。

による縮約、すなわち

$$\Lambda\alpha =, \quad \alpha \in A^{p,q}$$

によって作用素

$$\Lambda : A^{p,q} \longrightarrow A^{p-1,q-1}$$

を定義する。

{ p156 ~ } p174?

d , との随伴作用素をそれぞれ

$$\delta = - * d * =, \quad \delta' =, \quad \delta'' =$$

と定義すれば

$$, \quad \delta'' : A^{p,q} \longrightarrow A^{p,q-1}$$

Kähler であるから

$$d\theta^i = - \sum \omega_j^i \wedge \theta^j$$

となることに注意しておく ()。

とおいた

上の式はとの定義式と考えるべきである。

$$\delta' \alpha = \frac{-1}{(p-1)!q!} \sum \nabla_{\bar{k}} a_{ki_2 i_p j} \theta^{i_2} \wedge \wedge \theta^{i_p} \wedge \bar{\theta}^j$$

を証明する。

$$(6.50)$$

を計算するためには次の式を必要とする。

$$=$$

定理 6.7 Kähler 多様体上では次の関係式が成り立つ。

$$(ii) \quad [L, \delta'] = \sqrt{-1} d'',$$

$$(iii) \quad [\Lambda, d'] = \sqrt{-1} \delta'', \quad [\Lambda, d''] = -\sqrt{-1} \delta'$$

[証明]

、 (iii) の 2 番目の式もそれぞれ 1 番目の式に複素共役である。

(ii) の 1 番目の式を仮定して (iii) の 1 番目の式を証明する。

あとは (ii) の 1 番目の式を証明するだけである。まず

$$\delta' \alpha =$$

だから

ここで微分作用素を二つ

$$\Delta = d\delta + \delta d, \quad = d''\delta'' + \delta''d''$$

と定義する。

補題 6.9 Kähler 多様体上では

$$\Delta = 2$$

が成り立つ。

[証明]

定理 6.7 を使って

$$d'\delta' + \delta'd' = \sqrt{-1}(d'(\Lambda d'' - d''\Lambda) + (\Lambda d'' - d''\Lambda)d')$$

$$d''\delta'' + \delta''d'' = -\sqrt{-1}(d''(\Lambda d' - d'\Lambda) + (\Lambda d' - d'\Lambda)d'')$$

だから

やはり、定理 6.7 から、

これらをに代入すれば補題が証明される。

、 α は (p,q) 次微分形式を (p,q) 次微分形式に移すから補題 6.9 により

$$\Delta(A^{p,q}) \subset A^{p,q}$$

となることにも注意しておく。

微分形式 α が $\Delta\alpha = 0$ を満たすとき調和的であるという。。

$$H^{p,q} = \{\alpha \in A^{p,q}; \Delta\alpha = 0\}$$

とおく。() で示したように $\Delta(A^{p,q}) \subset A^{p,q}$ だから、もし $\alpha = \sum_{p,q} \alpha^{p,q}$ ($\alpha^{p,q} \in A^{p,q}$) が調和的ならば各 $\alpha^{p,q}$ が調和的である。すなわち、次調和微分形式の空間は
と分解される。これは分解とよばれる。

p174

いま X を n 次元コンパクト複素多様体、 E を X 上の正則ベクトル束とする。そして E^* を E に対する双対ベクトル束とする。 $\alpha \in A^{p,q}(E)$ 、 $\beta \in A^{n-p,n-q}(E^*)$ に対し

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \langle \alpha \wedge \beta \rangle$$

と定義する。ただし、ここではととの双対性を与える内積と微分形式としての外積を組み合わせたものである。もっと具体的に言えば、 e_1, \dots, e_r を E の局所枠、 e^1, \dots, e^r を E^* の双対枠とし $\alpha = \sum \alpha^i e_i$ 、 $\beta = \sum \beta_i e^i$ と書いたとき $\langle \alpha \wedge \beta \rangle = \alpha^i \wedge \beta_i$ である。したがって $\langle \alpha \wedge \beta \rangle$ は M 上の次数 (n, n) の微分形式で

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \sum \alpha^i \wedge \beta_i$$

が定義される。 $\beta_i = \overline{*}\alpha^i$ とおけば、 $\alpha \neq 0$ のとき

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \sum \alpha^i \wedge \overline{*}\alpha^i > 0$$

となる。よって、すべての $\beta \in A^{n-p,n-q}(E^*)$ に対し $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ ならば $\alpha = 0$ でなければならない。同様にすべての α に対し $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ なら、 $\beta = 0$

e^1, e^r を E^* の双対枠としておけば $=$ である。 $=$ に対しては $=$ で

$=$

$=$

だから

$$\langle d''\alpha, \beta \rangle = (-1)^{p+q-1} \langle \alpha, d''\beta \rangle, \quad \alpha \in A^{p,q}(E), \quad \beta \in A^{n-p,n-q-1}(E^*) \quad (6.79)$$

を得る。

$$Z^{p,q}(E) = \{\alpha \in A^{p,q}(E); d''\alpha = 0\}, \quad B^{p,q}(E) = d''A^{p,q-1}(E)$$

とおくとき (6.79) から

$$\langle Z^{p,q}(E), B^{n-p,n-q}(E^*) \rangle = 0, \quad \langle B^{p,q}(E), Z^{n-p,n-q}(E^*) \rangle = 0$$

を得る。したがって内積

$$\langle, \rangle : H^{p,q}(E) \times H^{n-p,n-q}(E^*) \longrightarrow \mathbb{C}$$

が定義される。

したがって、もし $\langle \alpha, H^{n-p,n-q}(E^*) \rangle = 0$ ならばとなるから $\alpha = 0$ を得る。同様に $\langle H^{p,q}(E), \beta \rangle = 0$ となる $\beta \in H^{n-p,n-q}(E^*)$ は 0 である。よって退化しない。

定理 6.20() X をコンパクト複素多様体、 E を X 上の正則ベクトル束、 E^* をその双対ベクトル束とすると

$$H^q(X, \Omega^p(E)) \sim_{dual} H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(E^*))$$

である。

$$\begin{aligned}
[\alpha &= \sum_{i=1}^r \{dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2\} a^i e_i \quad \beta = \sum_{i=1}^r \{dz^3 \wedge d\bar{z}^3\} b_i e^i] \\
[\alpha &= \sum_{i=1}^3 \{dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2\} a^i \frac{\partial}{\partial z^i} + \sum_{i=1}^3 \{dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2\} b^i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} + \\
\beta &= \sum_{i=1}^3 \{dz^1 \wedge d\bar{z}^1\} c_i dz^i + \sum_{i=1}^3 \{dz^1 \wedge d\bar{z}^1\} d_i d\bar{z}^i +] \\
[\langle \alpha, \beta \rangle &= \int_X \sum_{i=1}^3 \{dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2\} \{a^i + b^i\} \wedge \{dz^3 \wedge d\bar{z}^3\} \{c_i + d_i\}]
\end{aligned}$$

p200

V, V' をそれぞれ n, m 次元ベクトル空間とし、 B を V, V' 上の双一次形式、すなわち '直積空間' から K への写像で次の条件を満たすものとする。

$$\begin{cases}
B(x+y, x') = B(x, x') + B(y, x') \\
B(x, x'+y') = B(x, x') + B(x, y') \\
B(\alpha x, x') = B(x, \alpha x') + \alpha \cdot B(x, x') \quad (x, y \in V, x', y' \in V')
\end{cases}$$

V, V' 上の双一次形式 B が与えられたとき

$$B_{x'}(x) = B(x, x') \quad (x \in V, x' \in V')$$

とおけば、さらに写像

$$V' \ni x' \longrightarrow B_{x'} \in V^* \quad (17)$$

はからの中への一次写像になる。

簡単のため (17) によって定義される写像を同じ文字 B で表わせば
とかくことができる。

、 V, V' 上の双一次形式 B は次の二つの条件を満たすとき、非退化という。

() すべての $x' \in V'$ に対し $B(x, x') = 0$ ならば、 $x = 0$

(B1') すべての $x \in V$ に対し $B(x, x') = 0$ ならば、 $x' = 0$

定理 V, V' をそれぞれ m, n 次元のベクトル空間とする。 V, V' 上の双一次形式 B が非退化であるためには、対応する一次写像 $B: V' \rightarrow V^*$ が同型であることが必要十分である。特に、 V, V' 上に非退化双一次形式が存在すれば $n = m$ である。

証 まず条件 (B1') を仮定すれば、対応する一次写像 B に関して

$$Bx' = 0 \Rightarrow B(x, x') = 0 \quad \text{for all } x \in V$$

$$\Rightarrow x' = 0$$

従って写像 B は一対一である。この逆も明らかに成立するから

同様にして

p193

{ p177 ~ } p195?

まずの複素構造を無視して、単に多様体として考える。 $A^r(X)$ を級 r 次複素微分形式の空間とし、 r 次調和微分形式の空間

$$H^r = \{\alpha \in A^r(X); \Delta\alpha = 0\}$$

またであるから

$$H^r = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q} \quad (6.87)$$

を得る。

$$\bar{H}^{p,q} = H^{q,p} \quad (6.88)$$

Serre の双対定理 6.20 によれば

$$H^{p,q} \sim_{dual} H^{n-p,n-q} \quad (6.89)$$

$$h^{p,q} = \dim H^{p,q}(=)$$

とおき、これらの整数 $h^{p,q}$ を X の Hodge 数 (Hodge number) とよぶ。

定理 X を n 次元コンパクト Kahler 多様体とすると、 r 次元 Betti 数 b_r と Hodge 数 $h^{p,q}$ の間に次のような関係がある。

- (i) $b_r = \sum_{p+q=r} h^{p,q} \quad \{ \}$
- (ii) $h^{p,q} = h^{q,p}$
- (iii) $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$

これらの関係は (6.87), (6.88), (6.89) から直ちに得られる。

系

p124

双 1 次写像

$$\longrightarrow R, \quad H^p \times H^{n-p} \longrightarrow R \quad (7.43)$$

を

$$(\varphi, \psi) \longrightarrow \int_M \varphi \wedge \psi$$

で定義すると、

、双線形写像 (7.43) により H^p と H^{n-p} は双対になる。すなわち、 $\varphi \in H^p$ がすべての $\psi \in H^{n-p}$ に対し

$$\int \varphi \wedge \psi = 0$$

となるならば $\varphi = 0$ である。なぜならば、 $\varphi \neq 0$ としたとき、 $\psi = *\varphi$ とおけば $\int \varphi \wedge *\varphi = (\varphi, \varphi) > 0$ だからである。

7.9.2

8.6.1

Hodge*作用素

は定義 (7.173) をに拡張して求められる。

随伴作用素

8.6.2

調和形式

8.6.4

の複素次元は Hodge 数 $b^{r,s}$ とよばれる。

多様体の基礎 p65

とに関するの局所座標表示という **。

p282

$$=(19.35)$$

場の量子論 p13

である **。

恒等式 ***

p145

定義 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は、ある点 $x \in X$ が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$$

となるとき、 x に収束するといい

=

と書く。

p147

定義 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ は

任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある N が存在して

$m, n \geq N$ となるすべての m, n に対し $d(x_m, x_n) < \epsilon$ となる

という条件が満たされるときコーシー列という。

p152

定義 距離空間は、そのすべてのコーシー列が収束するとき完備であるという。

p208

3.10 (X, d) を距離空間とする。連続写像 $f : X \rightarrow X$ は、ある正の定数 $C < 1$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対し $d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)$ が成立するとき縮小写像という。もし X が完備な距離空間ならば、任意の縮小写像 $f : X \rightarrow X$ に対し $f(x) = x$ となる点 $x \in X$ が唯一つ存在することを証明せよ。

3.10 1 点 $x_1 \in X$ を選び、 $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \dots$ と帰納的に点列 $\{x_n\}$ を作る。このとき、任意の $m, n (m \geq n)$ に対して

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq C d(x_{m-1}, x_{n-1}) \leq \dots \leq C^{n-1} d(x_{m-n+1}, x_1) \\ &\leq C^{n-1} d(x_{m-n+1}, x_{m-n}) + \dots + d(x_2, x_1) \\ &\leq C^{n-1} (C^{m-n-1} + \dots + 1) d(x_2, x_1) = C^{n-1} (C^{m-n} - 1) (C - 1)^{-1} d(x_2, x_1) \\ &\leq C^{n-1} (1 - C)^{-1} d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

となることから $\{x_n\}$ はコーシー列である。そこで、 $x = \lim x_n$ とおけば $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$ となる。つぎに $f(y) = y$ とすれば、 $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)$ から $x = y$ が得られる。

p70

定義 2.8 X を空でない集合とする。 X 上の実数値関数 $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられ、それがつぎの三つの性質を満たすとする。

1) 任意の $x, y \in X$ に対し、 $d(x, y) \geq 0$ であり、 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 。

2) 任意の $x, y \in X$ に対し、 $d(x, y) = d(y, x)$ 。

3) 任意の $x, y, z \in X$ に対して、 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ 。

距離空間という。

位相空間、開集合 { 集合と位相空間 p73 ~ } { 30 講 p166 ~ 167 } { 院別 p58 }

定義 2.12 X を空でない集合とする。 X の部分集合の族 \mathcal{U} でつぎの条件を満たすものが与えられているとき、 \mathcal{U} は X 上に位相あるいは位相構造を定めるという。

1) $\phi, X \in \mathcal{U}$

2) $U_1, U_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$

3) \mathcal{U} の元からなる任意の集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in A}$ に対し $\bigcup_{\lambda \in A} U_\lambda \in \mathcal{U}$

また、対 (X, \mathcal{U}) を位相空間という。

\mathcal{U} に属する X の部分集合 U を、() 開集合といい、 $\{ \}$

例 $X = \mathbb{R}^2$ 、 $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$ の開集合全体の集合

$$U_n = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 < \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}^2 \right\} \text{ のとき、 } \bigcup_{\lambda \in A} U_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 < 4 \right\}$$

$$F_n = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}^2 \right\} \text{ のとき、 } \bigcap_{\lambda \in A} F_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq 0 \right\}$$

$$U_n = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 < \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}^2 \right\} \text{ のとき、 } \bigcap_{\lambda \in A} U_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

$$F_n = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}^2 \right\} \text{ のとき、 } \bigcup_{\lambda \in A} F_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

$X = 1$ つの元からなる集合、 $\mathcal{U} = \{\phi, X\}$

$$1 = \{\forall \epsilon > 0\}$$

$$2 = \{\exists n_0 \in N\}$$

$$3 = \{n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\}$$

$$4 = \{x|0 \leq x \leq 1\}$$

$$5 = \delta$$

$$6 \cdot 6 \quad 7 \cdots 7 \quad 8 = \vec{a} \quad 9 = \sqrt{a}$$

$$10 = \left\{\frac{b}{a}\right\}$$

$$11 = \left\{\frac{b}{a}\right\}$$

$$12 = \sum_{i=1}^n$$

$$13 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$14 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$15 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 16 &= a \\ &= b \\ &= c \end{aligned}$$

$$17 = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

定義 18

[次のページへ続く。]

$$19 = \int_a^b$$

$$20 = \alpha \quad 21 = \beta \quad = \gamma \quad = \delta \quad = \zeta \quad = \eta \quad 22 = \theta \quad = \lambda \quad 23 = \mu \quad = \nu \quad = \xi$$

$$24 = \pi \quad 25 = \rho \quad = \sigma \quad = \tau \quad 26 = \phi \quad 27 = \psi \quad = \omega \quad = \varepsilon$$

$$= \varphi \quad = \Gamma \quad 28 = \Delta \quad = \Theta$$

$$29 = \partial$$