

概複素構造、概複素多様体 {p18~}

X を n 次元複素多様体とし、その $2n$ 次元実多様体としての接ベクトル束を TX とする。 $\{TX$ の自己準同形 $J: TX \rightarrow TX$ で $J^2 = -I$ となるものを次のように定義する $\}$ (ただし、ここで I は恒等写像を表わす $\{c\}$)。 z^1, \dots, z^n を X の局所座標系とすると $\{c\}$ $z^j = x^j + iy^j$ と書いて、 J を

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^j} \quad \{cn\}$$

と定義する。

一般に、実多様体 X 上に自己準同形 $J: TX \rightarrow TX$ で $J \circ J = -I$ となるものが与えられたとき $\{c\}$ J を 概複素構造、そして X を 概複素多様体 とよぶ $\{c\}$ 。 $J^2 = -I$ の行列式を計算すると $0 < (\det J)^2 = \det(-I) = (-1)^{\dim X}$ となることから、 X の次元は偶数でなければならない $\{c\}$ 。

X の概複素構造 J のねじれとは、次の式によって定義される (\cdot) -型のテンソル N のことである。

$$N(u, v) = [Ju, Jv] - [u, v] - J[u, Jv] - J[Jv, u]$$

定理 概複素多様体 (X, J) に対し、次の 4 条件は互いに同値である。

- ()
- ()
- ()
- () J のねじれ $N = 0$ 。

上の定理の条件が満たされているとき、概複素構造 J が可積分であるという。

定理 概複素構造 J が可積分であるならば、それは複素多様体の J である。

複素多様体講義 p13

M を n 次元級多様体とする。点 $x \in M$ に対し、 $T_x M$ で、それぞれ x における接空間およびその双対空間を表す。 M の概複素構造とは、級の自己準同形の場合 $J_x : T_x M \rightarrow T_x M$ であって、 $J_x^2 = -1_x$ をみたすものをいう。ただし 1_x は T_x の恒等写像を表す。

概複素構造があたえられた多様体は概複素多様体とよばれる。

理論 p267

を複素多様体とし、線形写像 $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ を

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \quad J_p \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

で定義する。

$$J_p^2 = -I_p$$

に注意しよう。ここで I_p は $T_p M$ 上の恒等写像である。大雑把に言えば J_p は $\pm i$ による掛け算に相当する。 J_p の作用はチャートの取り方に依存しない。実際、共通部分をもつチャートの座標をそれぞれとする。上で関数は Cauchy-Riemann の関係式を満たす。このとき

が示される。従って基底に関して

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

8.7.1 { p290 }

定理 M を微分多様体とする。 M の各点 p で $J_p^2 = -I_p$ を満たすような型テンソル場 J が存在するとき、 J あるいは単に M を概複素多様体とよぶ。テンソル場 J を概複素構造とよぶ。

J が複素構造ならば J は (8.18) で与えられ、Nijenhuis テンソル場は明らかにゼロとなる。

定理

$$J_p \frac{\partial}{\partial z^\mu} = i \frac{\partial}{\partial z^\mu}, \quad J_p \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}$$

Mirrorp

p108

z^1, \dots, z^n が X の局所座標系ならば、 TX は $\partial/\partial z^1, \dots, \partial/\partial z^n$ を基とし、。

複素多様体 X の Hermite 計量はとしても定義できるが、ここでは X の Riemann 計量 g で次の条件を満たすものとして定義する。

$$g(\xi, \eta) = g(J\xi, J\eta), \quad \xi, \eta \in T_x X, x \in X$$

多様体入門 p99

M のリーマン計量 g が M の各点 p と任意の $u, v \in T_p(M)$ について

$$g_p(J_p u, J_p v) = g_p(u, v)$$

をみたすとき、 g を複素多様体 M のエルミット計量とよぶ。

p275

複素多様体 M の Riemann 計量 g が、各点 $p \in M$ と任意の $X, Y \in T_p M$ に対して

$$g_p(J_p X, J_p Y) = g_p(X, Y)$$

を満たすとき g は Hermite 計量とよばれる。

p115

上の定理の条件を満たすような Hermite 計量 g を Kahler 計量とよび、

p280

定義 8.4 Kahler 多様体とは Hermite 多様体 (M, g) で、その Kahler 形式が閉形式であるものをいう。計量 g は M の Kahler 計量とよばれる。

p270

定義 19 V を \mathbb{R} 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式とは、 V の k 個の直積から \mathbb{R} への写像

であって、 g が各に関して線型であるようなものを言う。

p274

定義 V を \mathbb{R} 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式が対称次形式であるとは、 σ の間にどのような置換を施しても、 σ の値が変わらないことである。

p275

定義 級多様体 M 上のテンソル場が k 次対称テンソル場であるとは、M の各点 p において、 $T_p(M)$ 上の対象 k 次形式になっていることである。

定義 19 級多様体 M 上の 2 次の対称テンソル場が、M の各点において正定値であるとき、 g を M のリーマン計量という。

つまり、 M の各点 p の接ベクトル空間 $T_p(M)$ に内積を与えるようなものがリーマン計量である。

p11

を上のベクトル空間とする。との直積集合からへの写像が条件をみたすとき、を上の双一次形式とよぶ。

p12

を V 上の () 双一次形式とする。任意のにたいして、

$$() = ()$$

がなりたつとき、を V 上の対称双一次形式と

V 上の正則な対称双一次形式のことを V の内積とよぶ。すなわち、

の二条件をみたす場合をいう。 V 上の対称双一次形式が

をみたすとき、を V の正値内積とよぶ。

p199

定義を微分多様体とする。 M 上の Riemann 計量 g とは、各点で次の公理

$$g_p(U, V) = g_p(V, U)$$

$$g_p(U, U) \geq 0, \text{ ただし等号は } U=0 \text{ のときのみ成り立つ}$$

を満たす M 上の型テンソルである。ここで $U, V \in T_p M$ である。手短かにいえばは正定値な対称双 1 次形式である。

p259

定義 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の 1 次形式とは、 V から R への写像

$$\omega : V \rightarrow R$$

であって、任意のベクトル $X, Y \in V$ と任意の実数 $a, b \in R$ について

$$\omega(aX + bY) = a\omega(X) + b\omega(Y)$$

がなりたつようなものをいう（すなわち、 V から R への線型写像 $\omega : V \rightarrow R$ のことである）。

V 上の 1 次形式全体のなす集合を V^* と書くことにする。

定義 V^* を、 V の双対ベクトル空間または双対空間という。

e_1, e_2, \dots, e_m を、任意に選んだ V の基底とする。 V の任意のベクトル X は

$$X = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m \quad (a_i \in R)$$

のように、 e_1, e_2, \dots, e_m の次結合で書ける。番号 $i (1 \leq i \leq m)$ をひとつ固定して、ベクトル X に、 e_i の係数 a_i を対応させる写像 $\omega_i : V \rightarrow R$ を考える：

$$\omega_i(X) = a_i$$

この写像 $\omega_i : V \rightarrow R$ は明らかに線型写像であるから、 ω_i は V 上の 1 次形式と考えられる。

番号 i を 1 から m まで動かして得られる $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ という m 個の 1 次形式が、実は V^* の基底になるのである。

定義 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ を、に対応する双対基底という。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} f_{i_1 \cdots i_k}() dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_j}() dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \right] \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} f_{i_1 i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \{f_{1i_2} dx_1 \wedge dx_{i_2} + f_{2i_2} dx_2 \wedge dx_{i_2} + f_{3i_2} dx_3 \wedge dx_{i_2}\} \\
&= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{21} dx_2 \wedge dx_1 + f_{22} dx_2 \wedge dx_2 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{31} dx_3 \wedge dx_1 + f_{32} dx_3 \wedge dx_2 + f_{33} dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \{f_{23} - f_{32}\} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \{f_{31} - f_{13}\} dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \\
d\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \frac{\partial f_{i_1 i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \left\{ \frac{\partial f_{1i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{2i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{3i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_{i_2} \right\} \\
&= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \{f_{23} - f_{32}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \{f_{31} - f_{13}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
d\omega &= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \right] + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{22}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \left[+ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] \\
& + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \left[+ \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{33}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_3 \right]
\end{aligned}$$

{ P290 }

m 次元級多様体 M 上の k 次微分形式を座標近傍 $(U; x_1, x_2, \dots, x_m)$ 上で局所座標表示したものが

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

であったとする。

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

微分形式の幾何学 p61

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

を R^n 上の k 次の微分形式、。上記を簡単に、 $f_I(x)$ と記す場合もある。外微分とは、つぎのように定義される線形写像

$$d: A^k(R^n) \rightarrow A^{k+1}(R^n)$$

のことである。すなわち $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ に対して

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

30p213

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

微分位相 p35

$$\sum_{h_1} \dots \sum_{h_p} a_{h_1 \dots h_p} dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_p}$$

$$du \wedge du = 0, \quad dv \wedge dv = 0, \quad du \wedge dv = -dv \wedge du$$

次に外微分 d を

0 次微分形式 (f) に対しては

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

1 次微分形式 $= f du + g dv$ に対しては

$$= df \wedge du + dg \wedge dv$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv$$

2 次微分形式 $= f du \wedge dv$ に対しては

$$= df \wedge du \wedge dv$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du \wedge dv = 0$$

と定義する。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \\ &= 0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + 0 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + 0 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{21} dx_2 \wedge dx_1] + [f_{22} dx_2 \wedge dx_2] + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{31} dx_3 \wedge dx_1] + [f_{32} dx_3 \wedge dx_2] + [f_{33} dx_3 \wedge dx_3] \\ &= f_{23} dx_2 \wedge dx_3 - f_{13} dx_3 \wedge dx_1 + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

ストークスの定理 { P305 }

定理 { ストークスの定理 }

$$\int_N d\eta = \int_{\partial N} \eta$$

証明

$$\eta = \sum_{i=1}^m g_i dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_i \wedge \dots \wedge dx_m$$

$d\hat{x}_i$ は dx_i を除くことを表わす。

$$d\eta = \sum_{i=1}^m \{-1\}^{i-1} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_m$$

。により、

$$\begin{aligned} \int_N d\eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) dx_m dx_1 \dots \\ &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \{g_1(a, \dots, x_m) - g_1(0, \dots, x_m)\} \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a \{g_m(x_1, \dots, a) - g_m(x_1, \dots, 0)\} dx_1 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial N} \eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots g_1(a, \dots, x_m) \dots dx_m - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots g_1(0, \dots, x_m) \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a g_m(x_1, \dots, a) dx_1 \dots - \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a g_m(x_1, \dots, 0) dx_1 \dots \end{aligned}$$

[次のページへ続く。]

例

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(a, x_2) dx_2 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(0, x_2) dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, a) dx_1 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, 0) dx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(a, x_2, x_3) dx_2 dx_3 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(0, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, a, x_3) dx_1 dx_3 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, 0, x_3) dx_1 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, a) dx_1 dx_2 - \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

{ 微分幾何 P124 }

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right\} du dv \\ &= \int_0^b \int_0^a \frac{\partial g}{\partial u} du dv - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial f}{\partial v} dv du \\ &= \int_0^b [g(a, v) - g(0, v)] dv - \int_0^a [f(u, b) - f(u, 0)] du \end{aligned}$$