

p56

とおき、 $R$  を  $D$  の曲率とよぶ。

曲率  $R$  は  $\text{End} E$  に値をとる 2 次微分形式だから

$$R(e_j) = \sum_i R_j^i e_i$$

と書けるが、そのとき、 $(R_j^i)$  は 2 次微分形式の行列で枠  $e_1, \dots, e_r$  に関する  $D$  の曲率形式とよぶ。

正則ベクトル束の接続を考える。  $E$  に値をとる 1 次微分形式の分解  $A^1(E) =$  に対応して、接続  $D : A^0(E) \rightarrow A^1(E)$  も

$$D = D' + D''$$

と分解する。一般には、 $De_j = \sum \omega_j^i e_i$  によって定義される接続形式  $(\omega_j^i)$  は次数  $(1, 0)$  の成分も  $(0, 1)$  の成分ももっている。

命題 4.1  $E$  を正則ベクトル束、 $e_1, \dots, e_r$  を正則局所枠とする。  $D = D' + D''$  を  $E$  の接続、 $\omega = (\omega_j^i)$  を  $e_1, \dots, e_r$  に関するその接続形式とすると、 $D'' = d''$  となるための必要十分条件は、 $\omega$  が次数  $(1, 0)$  の微分形式となることである。

明らかに、 $\omega$  の次数が  $(1, 0)$  となるのは  $D''e_j = 0$  のときで、そのときに限る。一方

$$D''(\xi^j e_j) = d''\xi^j e_j + \xi^j D''e_j = d''(\xi^j e_j) + \xi^j D''e_j$$

だから、 $D''e_j = 0$  となるのは  $D'' = d''$  のときで、そのときに限る。

命題 4.2 正則ベクトル束の接続が  $D'' = d''$  を満たすならば、その曲率の  $(0, 2)$  次の成分は 0 である。

$D = D' + d''$  だから

$$R = D^2 = D' \circ D' + D' \circ d'' + d'' \circ D'$$

明らかに曲率の  $(0, 2)$  次の成分はない。

p64

E を X 上の複素ベクトル束とする。h を E に定義された Hermite 構造 ( ) とする。すなわち、各点  $x \in X$  で h はファイバー  $E_x$  に Hermite 内積  $h_x$  を与える：

- (a)  $h_x(\xi, \eta)$  は  $\xi$  に関して線形
- (b)  $h_x(\eta, \xi) = \overline{h_x(\xi, \eta)}$
- (c)  $\xi \neq 0$  ならば、 $h_x(\xi, \xi) > 0$
- (d)

E の局所枠  $e_1, \dots, e_r$  に対し

$$h_{i\bar{j}} = h(e_i, e_j)$$

とおけば、行列  $H = (h_{i\bar{j}})$  は正値 Hermite 行列である。

E の接続 D が条件

$$d(h(\xi, \eta)) = h(D\xi, \eta) + h(\xi, D\eta), \quad \xi, \eta \in A^0(E)$$

を満たすとき、D は h-接続であるとか、h を保つという。

$\omega = (\omega_j^i)$  を局所枠  $e_1, \dots, e_r$  に関する接続形式、 $R = (R_j^i)$  を曲率形式とする。(4.47) で  $\xi = e_i, \eta = e_j$  とおけば

$$dh_{i\bar{j}} = \sum h_{k\bar{j}} \omega_i^k + \sum h_{i\bar{k}} \bar{\omega}_j^k$$

となる。行列の記号  $H = (h_{i\bar{j}})$  で表わせば

$$dH = H\omega + (\overline{H\omega})^t = \quad (4.49)$$

定理 4.3 正則ベクトル束 E の Hermite 構造  $\{ \}$  h に対し、h を保つ  $D = D' + d''$  の形の接続が一つ、ただ一つ存在する。

このような接続 (E, h) を標準接続とよぶ。

(4.49) から

$$d'H = H\omega,$$

最初の式から

$$\omega = H^{-1}d'H \quad (4.53)\{ \}$$

によって  $\omega$  が決まる。

曲率形式が  $d\omega + \omega \wedge \omega$  の (1, 1) 次の成分であることと (4.53) から次の式を得る。

$$R = d''\omega = d''(H^{-1}d'H) = -H^{-1}d''HH^{-1} \wedge d'H + H^{-1}d''d'H \quad (4.54)\{ \}$$

正則局所枠を使って h を行列  $H =$  で表わしたが、その逆行列を  $h^{j\bar{k}}$  と書く。さらに X の局所座標系  $z^1, \dots, z^n$  を使って、。まず (4.53) から

$$\omega_j^i = \sum \Gamma_{j\alpha}^i dz^\alpha, \quad \text{ただし} \quad \Gamma_{j\alpha}^i = \sum h^{i\bar{k}} \frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha} \quad (4.55)\{ ? \}$$

を得る。

(4.55) で  $H =$  を  $\det H =$  でおきかえれば (4.60) を得るわけだから

$$\Gamma_\alpha = (\det H)^{-1} \frac{\partial(\det H)}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial \log(\det H)}{\partial z^\alpha}$$

と書ける。よって、接続形式は

$$\sum \omega_i^i = d' \log(\det H)$$

と書ける。(4.54) の特別な場合として、() の曲率  $tr(R)$  は

$$tr(R) = d'' d' \log \det(H) \quad (4.63)$$

によって与えられる。

p6

領域  $U \subset C^n$  で定義された複素微分形式は  $dz^1, \dots, dz^n, \dots$  を使って表わされる。そのとき

$$\omega = \sum f_{a_1 \dots a_p \bar{b}_1 \dots \bar{b}_q} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_p} \wedge d\bar{z}^{b_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{b_q}$$

のような微分形式を、 $(p, q)$  次の微分形式または単に  $(p, q)$ -形式とよぶ。

$$\omega = \sum f_{A\bar{B}} dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

$$d\omega = d'\omega + d''\omega$$

と書ける。ただし、ここで

$$d'\omega = \sum d' f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B, \quad d''\omega = \sum d'' f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

$$[d\omega = \sum \{ \sum \frac{\partial f_{A\bar{B}}}{\partial z^\lambda} dz^\lambda \} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B + \sum \{ \sum \frac{\partial f_{A\bar{B}}}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B]$$

$$[d\omega$$

$$= \sum \sum \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () + \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () \right\} - \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () - \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () \right\} \right\} \{ dx^\lambda + i dy^\lambda \} \wedge \{ dx^A + i dy^A \} \wedge \{ dx^B - i dy^B \}$$

$$+ \sum \sum \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () - \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () \right\} + \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () + \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () \right\} \right\} \{ dx^\lambda - i dy^\lambda \} \wedge \{ dx^A + i dy^A \} \wedge \{ dx^B - i dy^B \}$$

$d'' f_A = 0$ 。このような  $(p, 0)$  次の微分形式を正則  $p$ -形式、

多様体 p198

$$\omega_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} =$$

$(p, q)$  型微分形式  $\omega$  は一意的に

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p, j_1 < \dots < j_q} \omega_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}$$

### 8.3.2 { 理論 p271 }

これらの基底のもとで双次数  $(r,s)$  の微分形式  $\omega$  は

$$\omega = \frac{1}{r!s!} \omega_{a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_r} \wedge d\bar{z}^{b_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{b_s}$$

とかかれる。

$$\omega_{a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s} =$$

### 8.3.3 { 理論 p272 }

$$d\omega = \frac{1}{r!s!} \omega_{a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_r} \wedge d\bar{z}^{b_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{b_s}$$

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

$$d'\omega = \frac{\partial \omega_{A\bar{B}}}{\partial z^\lambda} dz^\lambda \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

$$d''\omega = \frac{\partial \omega_{A\bar{B}}}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

Dolbeault 作用素

定義 8.3  $M$  を複素多様体とする。 $\omega$  が  $\partial$  を満たすならば  $r$ -形式は正則  $r$ -形式とよばれる。

Dolbeault 複体。双対輪体。双対境界輪体、

次-コホモロジー群。

### 8.2.3 { 理論 p267 }

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)$$

$$dz^\alpha = dx^\alpha + i dy^\alpha \quad d\bar{z}^\alpha = dx^\alpha - i dy^\alpha$$

### 8.3.1 { 理論 p270 }

p96

$(p,0)$  形式の係数が正則関数なるときを正則  $p$  形式とよぶ。

曲面上の関数論 p69

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) == \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) == \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\right]$$

曲面上の関数論 p94

$$dz_\alpha = dx_\alpha + i dy_\alpha, \quad d\bar{z}_\alpha = dx_\alpha - i dy_\alpha$$

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

と表してもよい。

座標  $z_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha$  と関数  $f(x, y) = f(z)$  に対して  
ここで、

同様にして、微分形式  $\omega = f_\alpha dz_\alpha + g_\alpha d\bar{z}_\alpha$  に対しても

$$d\omega = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}_\alpha} d\bar{z}_\alpha \wedge dz_\alpha + \frac{\partial g_\alpha}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha$$

p87

p96

$$\varphi = \frac{1}{p!q!} \sum \varphi_{j\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{b}_1 \dots \bar{b}_q} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_p} \wedge \overline{dz_j^{b_1}} \wedge \dots \wedge \overline{dz_j^{b_q}}$$

$$\varphi^{(p,q)}$$

$$d\varphi^{(p,q)}$$

$$\partial\varphi = \quad \bar{\partial}\varphi =$$

と定義することはいうまでもない。

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

となることは明らかであろう。

p47

双対境界輪体。

を層係数をもつ  $q$  次のコホモロジー群。

複素関数入門 p50

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$



p6

領域  $U \subset C^n$  で定義された複素微分形式は  $dz^1, \dots, dz^n, d\bar{z}^1, \dots, d\bar{z}^n$  を使って表わされる。そのとき

$$\omega = \sum f_{a_1 \dots a_p \bar{b}_1 \dots \bar{b}_q} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{b}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{b}_q}$$

のような微分形式を、 $(p, q)$  次の微分形式または単にとよぶ。

$$\omega = \sum f_{A\bar{B}} dz^A \wedge d\bar{z}^{\bar{B}}$$

$$d\omega = d'\omega + d''\omega$$

と書ける。ただし、ここで

$$d'\omega = \sum d'f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^{\bar{B}}, \quad d''\omega = \sum d''f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^{\bar{B}}$$

$$[d\omega = \sum d'f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^{\bar{B}} + \sum d''f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^{\bar{B}}]$$

$$[d\omega = \sum \sum \frac{\partial f_{A\bar{B}}}{\partial z^\lambda} dz^\lambda \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^{\bar{B}} + \sum \sum \frac{\partial f_{A\bar{B}}}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^{\bar{B}}]$$

$$[d\omega$$

$$= \sum \sum \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () + \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () \right\} - \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () - \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () \right\} \right\} \{dx^\lambda + idy^\lambda\} \wedge \{dx^A + idy^A\} \wedge \{dx^{\bar{B}} - idy^{\bar{B}}\}$$

$$+ \sum \sum \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () - \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () \right\} + \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () + \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () \right\} \right\} \{dx^\lambda - idy^\lambda\} \wedge \{dx^A + idy^A\} \wedge \{dx^{\bar{B}} - idy^{\bar{B}}\}]$$

$d''f_A = 0$ 。このような  $(p, 0)$  次の微分形式を正則  $p$ -形式、

p96

$(p, 0)$  形式の係数が正則関数なるときを正則  $p$  形式とよぶ。

p69

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) \right] &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$

p94



$$dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dx - idy$$

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

と表してもよい。

座標  $z = x + iy$  と関数  $f(x, y) = f(z)$  に対して  
ここで、

同様にして、微分形式  $\omega = f_\alpha dz_\alpha + g_\alpha d\bar{z}_\alpha$  に対しても

$$d\omega = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}_\alpha} d\bar{z}_\alpha \wedge dz_\alpha + \frac{\partial g_\alpha}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha$$

理論 p271

複素関数入門 p50

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$



p1

一般に、複素数の値をとる関数を複素関数と呼ぶことにする。そして、領域  $UC^n$  で定義された複素関数  $f(z) = f(z^1, \dots, z^n)$  が次の 2 条件のどちらかを満足するとき、この関数は正則であるという。

- ( ) 各点に対して、関数はその近傍で収束するべき級数で表わされる。
- ( )  $f(z)$  は  $U$  上連続で、各変数  $z (= 1, \dots, n)$  に関して正則である。

$$z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4, \dots, z_n = x_{2n-1} + ix_{2n}$$

$$z = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$$

p4

定義 1.1 領域  $DC^n$  において  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  が連続で各変数  $z_k, k = 1, 2, \dots, n$ , について正則なるとき  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  は  $D$  で正則であるとい

p9

{ }{ }

定義 1.2.1  $u(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) + iv(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  が、
$$\begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix}$$
 において全微分可

能であるとは、次が成り立つ

$$\begin{aligned} & u(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) + iv(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \\ &= u(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) + iv(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \\ &+ \{\alpha_1 + i\beta_1\}\{x_1 + iy_1\} - \{a_1 + ib_1\} + \dots + \{\alpha_n + i\beta_n\}\{x_n + iy_n\} - \{a_n + ib_n\} \\ &+ \epsilon_R() + i\epsilon_I() \end{aligned}$$

どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < \left\| \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix} \right\| < \delta$  となるす

すべての  $\begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix}$  に対し 
$$\left\| \frac{\epsilon_R() + i\epsilon_I()}{\left\| \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix} \right\|} \right\| < \epsilon$$

となることを意味する。

p13

$n$  次元複素多様体とは、次のような 2 条件を満たす開被覆  $\{U_j\}$  と写像

$$: U_j \rightarrow C^n$$

をもつ Hausdorff 空間  $X$  である：

- (a) 各  $j$  に対し、 $(U_j)$  は  $C^n$  の開集合で、 $U_j$  からへの同相写像である。
- (b)  $U_j U_k$  が空集合でないときは、いつでも

が正則写像になっている。

いま

p34

連結 Hausdorff 空間の上に局所複素座標系  $\{z_1, z_2, \dots, z_j, \dots\}$  が定義されているとき上に複素構造が定義されているという。複素構造が定義されている連結 Hausdorff 空間、すなわち局所複素座標系が定義されている連結 Hausdorff 空間を複素多様体とよび、 $M, N$  等の文字で表わす。



P114

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

f を  $o(g)\{x \rightarrow a\}$  と

P120

$$f(a+h) - f(a) = ch + o(|h|) \quad \{h \rightarrow 0\}$$

P51 ~ 52

どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $|x - a| < \delta$  となるすべての  $x$  に対し  $|f(x) - b| < \epsilon$  となることを言う。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

[どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |x - a| < \delta$  となるすべての  $x$  に対し  $|\frac{f(x)}{g(x)} - 0| < \epsilon$  となることを言う。]

[どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |h| < \delta$  となるすべての  $h$  に対し  $|\frac{f(a+h) - f(a)}{|h|} - 0| < \epsilon$  となることを言う。]

$$\{\forall \epsilon > 0\} \{\exists \delta > 0\} \{\forall \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \in U\right\} \{0 < \left\| \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \right\| < \delta \implies \left| \frac{\epsilon_0(h_1, \dots, h_n)}{\left\| \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \right\|} < \epsilon\}$$

となることをいう。