

p64

E を X 上の複素ベクトル束とする。h を E に定義された Hermite 構造 () とする。すなわち、各点 $x \in X$ で h はファイバー E_x に Hermite 内積 h_x を与える：

- (a) $h_x(\xi, \eta)$ は ξ に関して線形
- (b) $h_x(\eta, \xi) = \overline{h_x(\xi, \eta)}$ { cn }
- (c) $\xi \neq 0$ ならば、 $h_x(\xi, \xi) > 0$
- (d)

E の局所枠 { } e_1, \dots, e_r に対し

$$h_{i\bar{j}} = h(e_i, e_j)$$

とおけば、行列 $H = (h_{i\bar{j}})$ は正値 Hermite 行列である。

E の接続 D が条件

$$d(h(\xi, \eta)) = h(D\xi, \eta) + h(\xi, D\eta), \quad \xi, \eta \in A^0(E) \quad \{ \}$$

を満たすとき、D は h-接続であるとか、h を保つという。

$\omega = (\omega_j^i)$ を局所枠 e_1, \dots, e_r に関する接続形式、 $R = (R_j^i)$ を曲率形式とする。(4.47) で $\xi = e_i, \eta = e_j$ とおけば

$$dh_{i\bar{j}} = \sum h_{k\bar{j}} \omega_i^k + \sum h_{i\bar{k}} \bar{\omega}_j^k \quad \{ c \}$$

となる。行列の記号 $H = (h_{i\bar{j}})$ で表わせば

$$dH = H\omega + (\overline{H\omega})^t = \quad (4.49)$$

これに d を作用させて

$$0 = HR + (\overline{HR})^t$$

を得る。 e_1, \dots, e_r が正規直交系になっていれば H は単位行列になるから *、(4.49) と () は

$$\omega + \bar{\omega}^t = 0, \quad = 0 \quad \{ c \}$$

となる *。

定理 4.3 正則ベクトル束 E の Hermite 構造 { } h に対し、h を保つ $D = D' + d''$ の形の接続が一つ、ただ一つ存在する。

このような接続 (E, h) を標準接続とよぶ。

(4.49) から

$$d'H = H\omega,$$

最初の式から

$$\omega = H^{-1}d'H \quad (4.53)\{ \}$$

によって ω が決まる。

上の接続の曲率に (0,2) 次の成分がないことは命題 4.2 で証明した。HR は交代だから (式 (4.50) の意味で)、曲率には (2,0) 次の成分もない。すなわち、

定理 4.4 正則 Hermite ベクトル束 (E, h) の標準接続 $D = D' + d''$ の曲率は

$$R = D' \circ d'' + d'' \circ D' \in$$

で与えられる。

曲率形式 $\{ \}$ が $d\omega + \omega \wedge \omega$ の $(1, 1)$ 次の成分であることと (4.53) から次の式を得る。

$$R = d''\omega = d''(H^{-1}d'H) = -H^{-1}d''HH^{-1} \wedge d'H + H^{-1}d''d'H \quad (4.54)\{ \}$$

正則局所枠を使って h を行列 $H =$ で表わしたが、その逆行列を $h^{j\bar{k}}$ と書く。さらに X の局所座標系 z^1, \dots, z^n を使って、まず (4.53) から

$$\omega_j^i = \sum \Gamma_{j\alpha}^i dz^\alpha, \quad \text{ただし} \quad \Gamma_{j\alpha}^i = \sum h^{i\bar{k}} \frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha} \quad (4.55)\{ ? \}$$

を得る。

(4.55) で $H =$ を $\det H =$ でおきかえれば (4.60) を得るわけだから

$$\Gamma_\alpha = (\det H)^{-1} \frac{\partial(\det H)}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial \log(\det H)}{\partial z^\alpha}$$

と書ける。よって、接続形式は

$$\sum \omega_i^i = d' \log(\det H)$$

と書ける。(4.54) の特別な場合として、 $()$ の曲率 $tr(R)$ は

$$tr(R) = d'' d' \log \det(H) \quad (4.63)$$

によって与えられる。

$$\begin{aligned} & d \begin{bmatrix} h(e_1, e_1) & \cdots & h(e_1, e_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h(e_r, e_1) & \cdots & h(e_r, e_r) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h(e_1, e_1) & \cdots & h(e_1, e_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h(e_r, e_1) & \cdots & h(e_r, e_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_r^1 & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{h(e_1, e_1)} & \cdots & \overline{h(e_r, e_1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{h(e_1, e_r)} & \cdots & \overline{h(e_r, e_r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\omega}_1^1 & \cdots & \bar{\omega}_1^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\omega}_r^1 & \cdots & \bar{\omega}_r^r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

p6

領域 $U \subset C^n$ で定義された複素微分形式は $dz^1, \dots, dz^n, \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n$ を使って表わされる。そのとき

$$\omega = \sum f_{a_1 \dots a_p \bar{b}_1 \dots \bar{b}_q} dz^{a_1} \wedge \cdots \wedge dz^{a_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{b}_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{\bar{b}_q}$$

のような微分形式を、 (p, q) 次の微分形式または単に (p, q) -形式とよぶ。

$$\omega = \sum f_{A\bar{B}} dz^A \wedge d\bar{z}^{\bar{B}}$$

$$d\omega = d'\omega + d''\omega$$

と書ける。ただし、ここで

$$\begin{aligned}
d'\omega &= \sum d'f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B, \quad d''\omega = \sum d''f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B \\
[d\omega &= \sum \{ \sum \frac{\partial f_{A\bar{B}}}{\partial z^\lambda} dz^\lambda \} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B + \sum \{ \sum \frac{\partial f_{A\bar{B}}}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B] \\
&= \sum \sum \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () + \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () \right\} - \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () - \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () \right\} \right\} \{ dx^\lambda + i dy^\lambda \} \wedge \{ dx^A + i dy^A \} \wedge \{ dx^B - i dy^B \} \\
&+ \sum \sum \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () - \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () \right\} + \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () + \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () \right\} \right\} \{ dx^\lambda - i dy^\lambda \} \wedge \{ dx^A + i dy^A \} \wedge \{ dx^B - i dy^B \} \\
d''f_A &= 0. \text{ このような } (p,0) \text{ 次の微分形式を正則 } p\text{-形式、}
\end{aligned}$$

多様体 p198

$$\omega_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} =$$

(p,q) 型微分形式 ω は一意的に

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p, \bar{j}_1 < \dots < \bar{j}_q} \omega_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}$$

8.3.2 { 理論 p271 }

これらの基底のもとで双次数 (r,s) の微分形式 ω は

$$\omega = \frac{1}{r!s!} \omega_{a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_r} \wedge d\bar{z}^{b_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{b_s}$$

とかかれる。

$$\omega_{a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s} =$$

8.3.3 { 理論 p272 }

$$d\omega = \frac{1}{r!s!} \omega_{a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_r} \wedge d\bar{z}^{b_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{b_s}$$

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

$$d'\omega = \frac{\partial \omega_{A\bar{B}}}{\partial z^\lambda} dz^\lambda \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

$$d''\omega = \frac{\partial \omega_{A\bar{B}}}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

Dolbeault 作用素

定義 8.3 M を複素多様体とする。がを満たすならば r -形式は正則 r -形式とよばれる。
 Dolbeault 複体。双対輪体。双対境界輪体、
 次-コホモロジー群。

8.2.3 { 理論 p267 }

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)$$

$$dz^\alpha = dx^\alpha + i dy^\alpha \quad d\bar{z}^\alpha = dx^\alpha - i dy^\alpha$$

8.3.1 { 理論 p270 }

p96

$(p,0)$ 形式の係数が正則関数なるときを正則 p 形式とよぶ。

曲面上の関数論 p69

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right]$$

曲面上の関数論 p94

$$dz_\alpha = dx_\alpha + i dy_\alpha, \quad d\bar{z}_\alpha = dx_\alpha - i dy_\alpha$$

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

と表してもよい。

座標 $z_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha$ と関数 $f(x, y) = f(z)$ に対して
 ここで、

同様に、微分形式 $\omega = f_\alpha dz_\alpha + g_\alpha d\bar{z}_\alpha$ に対しても

$$d\omega = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}_\alpha} d\bar{z}_\alpha \wedge dz_\alpha + \frac{\partial g_\alpha}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha$$

p87

p96

$$\varphi = \frac{1}{p!q!} \sum \varphi_{j\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{b}_1 \dots \bar{b}_q} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_p} \wedge \overline{dz_j^{b_1}} \wedge \dots \wedge \overline{dz_j^{b_q}}$$

$$\varphi^{(p,q)}$$

$$d\varphi^{(p,q)}$$

$$\partial\varphi = \quad \bar{\partial}\varphi =$$

と定義することはいうまでもない。

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

となることは明らかであろう。

p47

双対境界輪体。

を層係数をもつ q 次のコホモロジー群。

複素関数入門 p50

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

p6

領域 $U \subset C^n$ で定義された複素微分形式は $dz^1, \dots, dz^n, d\bar{z}^1, \dots, d\bar{z}^n$ を使って表わされる。そのとき

$$\omega = \sum f_{a_1 \dots a_p \bar{b}_1 \dots \bar{b}_q} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_p} \wedge d\bar{z}^{b_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{b_q}$$

のような微分形式を、 (p, q) 次の微分形式または単にとよぶ。

$$\omega = \sum f_{A\bar{B}} dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

$$d\omega = d'\omega + d''\omega$$

と書ける。ただし、ここで

$$d'\omega = \sum d'f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B, \quad d''\omega = \sum d''f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

$$[d\omega = \sum d'f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B + \sum d''f_{A\bar{B}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B]$$

$$[d\omega = \sum \sum \frac{\partial f_{A\bar{B}}}{\partial z^\lambda} dz^\lambda \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B + \sum \sum \frac{\partial f_{A\bar{B}}}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B]$$

$$[d\omega$$

$$= \sum \sum \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () + \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () \right\} - \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () - \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () \right\} \right\} \{dx^\lambda + idy^\lambda\} \wedge \{dx^A + idy^A\} \wedge \{dx^B - idy^B\}$$

$$+ \sum \sum \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () - \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () \right\} + \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial u_{A\bar{B}}}{\partial y^\lambda} () + \frac{\partial v_{A\bar{B}}}{\partial x^\lambda} () \right\} \right\} \{dx^\lambda - idy^\lambda\} \wedge \{dx^A + idy^A\} \wedge \{dx^B - idy^B\}$$

$d''f_A = 0$ 。このような $(p, 0)$ 次の微分形式を正則 p -形式、

p96

$(p, 0)$ 形式の係数が正則関数なるときを正則 p 形式とよぶ。

p69

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) \right] &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$

p94

$$dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dx - idy$$

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

と表してもよい。

座標 $z = x + iy$ と関数 $f(x, y) = f(z)$ に対して
ここで、

同様にして、微分形式 $\omega = f_\alpha dz_\alpha + g_\alpha d\bar{z}_\alpha$ に対しても

$$d\omega = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}_\alpha} d\bar{z}_\alpha \wedge dz_\alpha + \frac{\partial g_\alpha}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha$$

理論 p271

複素関数入門 p50

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

p1

一般に、複素数の値をとる関数を複素関数と呼ぶことにする。そして、領域 UC^n で定義された複素関数 $f(z) = f(z^1, \dots, z^n)$ が次の 2 条件のどちらかを満足するとき、この関数は正則であるという。

- () 各点に対して、関数はその近傍で収束するべき級数で表わされる。
- () $f(z)$ は U 上連続で、各変数 $z (= 1, \dots, n)$ に関して正則である。

$$z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4, \dots, z_n = x_{2n-1} + ix_{2n}$$

$$z = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$$

p4

定義 1.1 領域 DC^n において $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ が連続で各変数 $z_k, k = 1, 2, \dots, n$, について正則なるとき $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ は D で正則であるとい

p9

{ }{ }

定義 1.2.1 $u(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) + iv(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ が、 $\begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix}$ において全微分可

能であるとは、次が成り立つ

$$\begin{aligned} & u(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) + iv(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \\ &= u(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) + iv(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \\ &+ \{\alpha_1 + i\beta_1\}\{x_1 + iy_1\} - \{a_1 + ib_1\} + \dots + \{\alpha_n + i\beta_n\}\{x_n + iy_n\} - \{a_n + ib_n\} \\ &+ \epsilon_R() + i\epsilon_I() \end{aligned}$$

どんな $\epsilon > 0$ に対しても、 $\delta > 0$ が存在して、 $0 < \left\| \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix} \right\| < \delta$ となるす

すべての $\begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix}$ に対し $\left\| \frac{\epsilon_R() + i\epsilon_I()}{\left\| \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix} \right\|} \right\| < \epsilon$

となることを意味する。

p13

n 次元複素多様体とは、次のような 2 条件を満たす開被覆 $\{U_j\}$ と写像

$$: U_j \rightarrow C^n$$

をもつ Hausdorff 空間 X である：

- (a) 各 j に対し、 (U_j) は C^n の開集合で、 U_j からへの同相写像である。
- (b) $U_j U_k$ が空集合でないときは、いつでも

が正則写像になっている。

いま

p34

連結 Hausdorff 空間の上に局所複素座標系 $\{z_1, z_2, \dots, z_j, \dots\}$ が定義されているとき上に複素構造が定義されているという。複素構造が定義されている連結 Hausdorff 空間、すなわち局所複素座標系が定義されている連結 Hausdorff 空間を複素多様体とよび、 M, N 等の文字で表わす。

P114

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

f を $o(g)\{x \rightarrow a\}$ と

P120

$$f(a+h) - f(a) = ch + o(|h|) \quad \{h \rightarrow 0\}$$

P51 ~ 52

どんな $\epsilon > 0$ に対しても、 $\delta > 0$ が存在して、 $|x - a| < \delta$ となるすべての x に対し $|f(x) - b| < \epsilon$ となることを言う。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

[どんな $\epsilon > 0$ に対しても、 $\delta > 0$ が存在して、 $0 < |x - a| < \delta$ となるすべての x に対し $|\frac{f(x)}{g(x)} - 0| < \epsilon$ となることを言う。]

[どんな $\epsilon > 0$ に対しても、 $\delta > 0$ が存在して、 $0 < |h| < \delta$ となるすべての h に対し $|\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - 0| < \epsilon$ となることを言う。]

$$\{\forall \epsilon > 0\} \{\exists \delta > 0\} \{\forall \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \in U\right\} \{0 < \left\| \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \right\| < \delta \implies \left| \frac{\epsilon_0(h_1, \dots, h_n)}{\left\| \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \right\|} < \epsilon\}$$

となることをいう。