

定積分、積分可能 { 高木 p91 ~、杉浦 Ip206 ~ }

区間 $[a, b]$ において $f(x)$ は有界とする。

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b \quad \{ts\}$$

この分割法 Δ において、左から第 k 番の細区間の幅をとる。すなわち

$$\delta_k = x_k - x_{k-1} > 0$$

この分割 Δ における δ_k の最大値を $d()$ とする

、分割 Δ に関して各細区間 $[x_{k-1}, x_k]$ において任意の点 ξ_k を取って、和

=

を作れば、

のとき分割 Δ と ξ_k の選択に無関係にの極限が存在して、それが J である：

$$J = \lim_{d() \rightarrow 0} \sum f(\xi_k) \delta_k \quad (9) \{ts\}$$

$$[J = \lim_{d() \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \{x_k - x_{k-1}\}]$$

[任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $d() < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、代表点 $\xi_k()$ の取り方によらず常に

$$|\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \{x_k - x_{k-1}\} - J| < \epsilon$$

が成立つ]

この極限值 J を区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の 定積分 といい、それを次の記号で表わす：

$$J = \int_a^b f(x) dx \quad \{ts\}$$

極限值 (9) が存在するとき、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ において 積分可能 という。

$$|[f(\xi_1)\{x_1 - x_0\} + \cdots + f(\xi_n)\{x_n - x_{n-1}\} - J| < \epsilon]$$

例

$I = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 上で定義された $f(x) = x^2$ は I 上で可積分。 $\frac{1}{3}$

任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $Maxd(I_k) < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、

$$|\{\xi_1\}^2\{x_1 - x_0\} + \cdots + \{\xi_m\}^2\{x_m - x_{m-1}\} - \frac{1}{3}| < \epsilon$$

が成立つ。

$\epsilon = 20$ の場合、 $\delta = 0.5$ は OK { ちなみに $n = 3$ となる } $Maxd[0, 0.2], [0.2, 0.65], [0.65, 1] < 0.5$ 、

$$|0.1^2\{0.2 - 0\} + 0.45^2\{0.65 - 0.2\} + 0.7^2\{1 - 0.65\} - \frac{1}{3}| < 20$$

$Maxd[0, 0.11], [0.11, 0.3], [0.3, 0.5], [0.5, 0.8], [0.8, 1] < 0.5$ 、

$$|0.1^2\{0.11 - 0\} + 0.2^2\{0.3 - 0.11\} + 0.4^2\{0.5 - 0.3\} + 0.7^2\{0.8 - 0.5\} + 0.9^2\{1 - 0.8\} - \frac{1}{3}| < 20$$

$\epsilon = \cdots$

{ 解析入門 Ip206 ~ 208 }

$$I =$$

$$v(I) =$$

$d(I) =$ 、

一次元区間 $I = [a, b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$ の分割とは、内点を共有しない有限個の小区間の合併として I を表わすことをいう。この場合一つの分割 Δ は小区間の端点

$$\underline{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b} \quad \{t\}$$

を与えることによって定まる。

I_k の直径を $d(I_k)$ とするとき、

$$d(\Delta) = \max_{k \in K(\Delta)} d(I_k)$$

を

定義 1 n 次元有界閉区間 (2.1) 上で定義された実数値関数 f が与えられているとする。区間 I の任意の分割 Δ に対し、 Δ によって生ずる各小区間 $I_k()$ の中から任意に一点 ξ_k を取って作った和

$$s(f; \Delta; \xi) = \sum_{k \in K(\Delta)} f(\xi_k) v(I_k)$$

。もしもある実数 J が存在して、 I_k の代表点 ξ_k のとり方によらず

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} s(f; \Delta; \xi) = J \quad \{t\}$$

となるとき、 f は I 上で () 可積分であるといい、 J を f の I 上での () 積分という。そして

$$\underline{J = \int_I f(x) dx}$$

等と記す。

[任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $d(\Delta) [= \text{Max} d(I_k)] < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、代表点 $\xi_k()$ の取り方によらず常に

$$|s(f; \Delta; \xi) - J| < \epsilon$$

が成立つことを意味する。]

[任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $\text{Max}\{x_k - x_{k-1}\} < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、代表点 $\xi_k()$ の取り方によらず常に

$$|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - J| < \epsilon$$

$$[|f(\xi_1)\{x_1 - x_0\} + \cdots + f(\xi_n)\{x_n - x_{n-1}\} - J| < \epsilon]$$

が成立つ]

解析概論 p91 ~

$$\underline{a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b}$$

この分割法 Δ において、左から第 i 番の細区間の幅をとする。すなわち

$$\delta_i = x_i - x_{i-1} > 0$$

この分割 Δ における δ_i の最大幅を δ とする

その場合には、分割 Δ に関して各細区間 $[x_{i-1}, x_i]$ において任意の点 ξ_i を取って、和

$$=$$

を作れば、

のとき分割との選択に無関係にの極限が存在して、それが I である：

$$\underline{I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum f(\xi_i) \delta_i}$$

$$[I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum f(\xi_i) \{x_i - x_{i-1}\}]$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta (0 < |\delta - 0| < \delta), |\sum f(\xi_i) \{x_i - x_{i-1}\} - I| < \epsilon]$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta (0 < |\delta| < \delta), |f(\xi_1) \{x_1 - x_{1-1}\} + \cdots + f(\xi_n) \{x_n - x_{n-1}\} - I| < \epsilon]$$

この極限值 I を区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の定積分といい、それを次の記号で表わす：

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

極限值 (9) が存在するとき、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ において積分可能という。

小平解析入門

$$\delta[\Delta] = \max_k (x_k - x_{k-1}) \quad (\text{小平})$$

任意の正の実数に対応して正の実数が定まって、分割点の選び方の如何に關せず、

$$\left| \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - s \right| < \epsilon \quad (\text{小平})$$

となる。このことをのときの $\sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ の極限が s であるといい表わし、

$$s = \lim_{\delta[\Delta] \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (\text{小平})$$

と書く。

定義 $s = \lim_{\delta[\Delta] \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ を、区間における定積分といい、記号 $\int_a^b f(x)dx$ で表わす:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta[\Delta] \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

p83

この極限値を関数のからまでの定積分といい、
、関数はでリーマン積分可能であるという。

可積分の定義 { 解析入門 Ip206 ~ 208 }

一次元区間 $I = [a, b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$ の分割とは、内点を共有しない有限個の小区間の合併として I を表わすことをいう。この場合一つの分割 Δ は小区間の端点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \{t\}$$

を与えることによって定まる。

I_k の直径を $d(I_k)$ とするとき、

$$d(\Delta) = \max_{k \in K(\Delta)} d(I_k)$$

を

定義 1 n 次元有界閉区間 (2.1) 上で定義された実数値関数 f が与えられているとする。区間 I の任意の分割 Δ に対し、 Δ によって生ずる各小区間 $I_k()$ の中から任意に一点 ξ_k を取って作った和

$$s(f; \Delta; \xi) = \sum_{k \in K(\Delta)} f(\xi_k) v(I_k)$$

。もしもある実数 J が存在して、 I_k の代表点 ξ_k のとり方によらず

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} s(f; \Delta; \xi) = J \quad \{t\}$$

[任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $\text{Max}\{x_k - x_{k-1}\} < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、代表点 $\xi_k()$ の取り方によらず常に

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - J \right| < \epsilon$$

$$|f(\xi_1)\{x_1 - x_0\} + \cdots + f(\xi_n)\{x_n - x_{n-1}\} - J| < \epsilon$$

が成立つ]

となるとき、 f は I 上で () 可積分であるといい、 J を f の I 上での () 積分という。そして

$$J = \int_I f(x) dx$$

等と記す。

[任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $d(\Delta) [= \text{Max}d(I_k)] < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、代表点 $\xi_k()$ の取り方によらず常に

$$|s(f; \Delta; \xi) - J| < \epsilon$$

が成立つことを意味する。]

例

$I = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 上で定義された $f(x) = x^2$ は I 上で可積分。 $\frac{1}{3}$

任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $\text{Max}d(I_k) < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、

$$|\{\xi_1\}^2\{x_1 - x_0\} + \cdots + \{\xi_m\}^2\{x_m - x_{m-1}\} - \frac{1}{3}| < \epsilon$$

が成立つ。

$\epsilon = 20$ の場合、 $\delta = 0.5$ は OK { ちなみに $n = 3$ となる } $Maxd[0, 0.2], [0.2, 0.65], [0.65, 1] < 0.5$ 、

$$|0.1^2\{0.2 - 0\} + 0.45^2\{0.65 - 0.2\} + 0.7^2\{1 - 0.65\} - \frac{1}{3}| < 20$$

$Maxd[0, 0.11], [0.11, 0.3], [0.3, 0.5], [0.5, 0.8], [0.8, 1] < 0.5$ 、

$$|0.1^2\{0.11 - 0\} + 0.2^2\{0.3 - 0.11\} + 0.4^2\{0.5 - 0.3\} + 0.7^2\{0.8 - 0.5\} + 0.9^2\{1 - 0.8\} - \frac{1}{3}| < 20$$

$\epsilon = \dots$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta \{Max\{x_k - x_{k-1}\} < \delta\}, |f(\xi_1)\{x_1 - x_0\} + \dots + f(\xi_n)\{x_n - x_{n-1}\} - J| < \epsilon]$$

$$I = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$$

$\epsilon = 20$ のとき $\delta = 0.5$ で OK ということは { ちなみに $n = 3$ となる }

例えば $I_1 = [0, 0.2], I_2 = [0.2, 0.65], I_3 = [0.65, 1]$ や

$I_1 = [0, 0.11], I_2 = [0.11, 0.3], I_3 = [0.3, 0.5], I_4 = [0.5, 0.8], I_5 = [0.8, 1]$ 等でよいということである。{ 小区間の幅の最大値が 0.5 より小 }

記号

$$d(\Delta) = \text{Maxd}(I_k) \quad (\text{杉浦})$$

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} s(f; \Delta; \xi) = J \quad (\text{杉浦})$$

任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $d(\Delta) [= \text{Maxd}(I_k)] < \delta$ となる任意の分割 $\Delta \in$ に対し、代表点 $\xi_k()$ の取り方によらず常に

$$|s(f; \Delta; \xi) - J| < \epsilon \quad (\text{杉浦 2.7})$$

が成立つことを意味する。

$$\delta[\Delta] = \max_k (x_k - x_{k-1}) \quad (\text{小平})$$

$$\left| \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - s \right| < \epsilon \quad (\text{小平})$$

$$s = \lim_{\delta[\Delta] \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (\text{小平})$$

[任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $\max_k (x_k - x_{k-1}) < \delta$ となる任意の分割 $\Delta \in$ に対し、代表点 $\xi_k()$ の取り方によらず常に

$$\left| \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - J \right| < \epsilon$$

が成立つことを意味する。]

$$v = v_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + v_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p + \cdots + v_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p \quad (\text{松本})$$

$$v = \sum_{i=1}^m v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \quad (\text{松本})$$

[任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $\max_k (x_k - x_{k-1}) < \delta$ となる任意の分割 $\Delta \in$ に対し、代表点 $\xi_k()$ の取り方によらず常に

$$|f(\xi_1)(x_1 - x_{1-1}) + \cdots + f(\xi_m)(x_m - x_{m-1}) - J| < \epsilon$$

が成立つことを意味する。]

$$I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum f(\xi_i) \delta_i \quad (\text{高木 9})$$

$$[I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum f(\xi_i) \{x_i - x_{i-1}\}]$$

$$q: \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (\text{田島})$$

q : 任意の正の数 ϵ に対して、適当な正の数 δ を決めると、

$0 < |x - a| < \delta$ のすべての x について $|f(x) - b| < \epsilon$ (田島)

$q: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon$ (田島)

$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta (0 < |\delta - 0| < \delta), |\sum f(\xi_i)\{x_i - x_{i-1}\} - I| < \epsilon]$

$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta (0 < |\delta| < \delta), |f(\xi_1)\{x_1 - x_{1-1}\} + \dots + f(\xi_n)\{x_n - x_{n-1}\} - I| < \epsilon]$

イプシロン-デルタ p44 ~

$$q: \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

q : 任意の正の数 ϵ に対して、適当な正の数 δ を決めると、

$0 < |x - a| < \delta$ のすべての x について $|f(x) - b| < \epsilon$

$$q: \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$

$q: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon$

解析入門

任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $d(\Delta) < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、代表点の取り方によらず常に

$$|s(f; \Delta; \xi) - J| < \epsilon$$

$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta (d(\Delta) < \delta), |s(f; \Delta; \xi) - J| < \epsilon]$

が成立つことを意味する。

イプシロン-デルタ p44 ~

$$q : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

q : 任意の正の数 ϵ に対して、適当な正の数 δ を決めると、

$$0 < |x - a| < \delta \text{ のすべての } x \text{ について } |f(x) - b| < \epsilon$$

$$q : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

$$q : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon$$

小平

$$\delta[\Delta] = \max_k (x_k - x_{k-1})$$

$$\left| \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - s \right| <$$

$$s = \lim_{\delta[\Delta] \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \delta[\Delta] (0 < |\delta[\Delta] - 0| < \delta), \left| \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - s \right| < \epsilon]$$

P206 ~ 208

一次元の有界閉区間 $[a, b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$

$$I = \{x | a \leq x \leq b\}$$

$$v(I) =$$

と定義する。この区間の直径 $d(I) = b - a$

一次元区間 I の分割とは、内点を共有しない有限個の小区間の合併として I を表わすことをいう。
この m 個の小区間に適当な順序で番号をつけ、それを

$$I_k : k \in K(\Delta)$$

とする。

$$d(\Delta) = \max_{k \in K(\Delta)} d(I_k)$$

定義 1 n 次元有界閉区間 $\{2.1\}$ 上で定義された実数値関数 f が与えられているとする。区間 I の任意の分割 Δ に対し、 Δ によって生ずる各小区間 $I_k (k \in K(\Delta))$ の中から任意に一点 ξ_k を取って作った和

$$s(f; \Delta; \xi) = \sum_{k \in K(\Delta)} f(\xi_k) v(I_k)$$

を、 f の Δ に関するリーマン和という。もしもある実数 J が存在して、 I_k の代表点 ξ_k のとり方によらず

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} s(f; \Delta; \xi) = J$$

となるとき、 f は I 上で可積分であるとい

$$J = \int_I f(x) dx =$$

等と記す。

任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $\text{Max} d(I_k) < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、

$$|s(f; \Delta; \xi) - J| < \epsilon$$

$$[|\sum_{k \in K(\Delta)} f(\xi_k) v(I_k) - J| < \epsilon]$$

$$[|f(\xi_1)\{x_1 - x_0\} + \cdots + f(\xi_m)\{x_m - x_{m-1}\} - J| < \epsilon]$$

が成立つことを意味する。

p20

$$[a, b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$$

P51

定義 2 f を R^n の部分集合 A で定義され、 R^m の値を取る函数とし、 $a \in \bar{A}, b \in R^m$ とする。 x が a に近づくときの $f(x)$ の極限が b であるとは、どんな $\epsilon > 0$ に対しても、 $\delta > 0$ が存在して、 $|x - a| < \delta$ となるすべての $x \in A$ に対し $|f(x) - b| < \epsilon$ となることを言う。このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

などと表わす。

p148

定義 =

が成り立つとき、は積分可能であるといい、この値を

$$\int_a^b f(x) dx$$

と表わし、。

$f(x)$ を区間 $[a, b]$ で積分可能な関数とする。分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ に対応して、和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$[f(\xi_0)(x_{0+1} - x_0) + f(\xi_1)(x_{1+1} - x_1) + \dots + f(\xi_{n-1})(x_{n-1+1} - x_{n-1})]$$

を考える。

このとき分割の最大幅 $\max(x_{i+1} - x_i)$ がに近づくように分点をとっていくと、上の和は

$$\int_a^b f(x) dx$$

に近づく。

可積分の定義 { 解析入門 P206 ~ 207 }

一次元の有界閉区間

$$I = \{x | a \leq x \leq b\}$$

この区間の直径 $d(I) = b - a$

一次元区間 I の分割とは、内点を共有しない有限個の小区間の合併として I を表わすことをいう。

この m 個の小区間に適当な順序で番号をつけ、それを I_k とする。

定義 1 一次元有界閉区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が与えられているとする。区間 I の任意の分割 Δ に対し、 Δ によって生ずる各小区間 I_k の中から任意に一点 ξ_k を取

$f(x)$ が I 上で可積分であるとは、ある実数 J が存在して、 I_k の代表点 ξ_k のとり方によらず

$$\{\forall \epsilon > 0\} \{\exists \delta > 0\} \{\forall \Delta\} \{Maxd(I_k) < \delta \implies |f(\xi_1)\{x_1 - x_0\} + \cdots + f(\xi_m)\{x_m - x_{m-1}\} - J| < \epsilon\}$$

となることをいう。このとき

$$J = \int f(x) dx$$

等と記す。

例と説明 $I = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$

$\epsilon = 0.01$ のとき $\delta = 0.5$ で OK ということは { ちなみに $n = 3$ となる }

例えば $I_1 = [0, 0.2], I_2 = [0.2, 0.65], I_3 = [0.65, 1]$ や

$I_1 = [0, 0.11], I_2 = [0.11, 0.3], I_3 = [0.3, 0.5], I_4 = [0.5, 0.8], I_5 = [0.8, 1]$ 等でよいということである。{ 小区間の幅の最大値が 0.5 より小 }

$I = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 上で定義された $f(x) = x^2$ は I 上で可積分

ϵ にどんな数 $\{ > 0 \}$ を選んでも、 $Maxd(I_k) < \delta$ となるどんな Δ においても

$$|\{\xi_1\}^2\{x_1 - x_0\} + \cdots + \{\xi_m\}^2\{x_m - x_{m-1}\} - \frac{1}{3}| < \epsilon$$

となる。そういう δ が選べる。