

連続 { 解析入門 Ip50 ~ }

定義 2 f を R^n の部分集合 A で定義され、 R^m の値を取る函数とし、 $a \in \bar{A}, b \in R^m$ とする。 x が a に近づくときの $f(x)$ の極限が b であるとは、どんな $\epsilon > 0$ に対しても、 $\delta > 0$ が存在して、 $|x - a| < \delta$ となるすべての $x \in A$ に対し $|f(x) - b| < \epsilon$ となることを言う。このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$
$$f(x) \rightarrow b(x \rightarrow a)$$

などと表わす。

定義 3 定義 2 において、が与えられ、であるとき、任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して、 $|x - a| < \delta$ となる任意の $x \in B$ に対し $|f(x) - b| < \epsilon$ となるとき、 x が B 内で a に近づくときの $f(x)$ の極限が b であるといい、

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in B} f(x) = b, \quad \text{または} \quad f(x) \rightarrow b(x \rightarrow a, x \in B)$$

と記す。 $x \in B$ と記す代りに B を規定する条件を書くことも多い。

例えば $a \in A$ のとき $B = \{x \in A | x \neq a\}$ ならば $\lim_{x \rightarrow a, x \in B} f(x)$ を $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x)$ と記す。

説明 \bar{A}

例 $A = \{x | 0 < x < 10\}$ で定義された $f(x) = x^2$ 。 x が 1 に近づくときの $f(x)$ の極限は 1 である。

どんな $\epsilon > 0$ に対しても、 $\delta > 0$ が存在して、 $0 < |x - 1| < \delta$ となるすべての $x \in A$ に対し $|x^2 - 1| < \epsilon$ となる。

$|x^2 - 1| < 100$ とするには、 $0 < |x - 1| < 1$ で大丈夫。

$\{0 < |1.5 - 1| < 1, |1.5^2 - 1| < 100, \}$

とするには、

定義 5 $D \subset R^n, f: D \rightarrow R^m$ とする。 $a \in D$ に対し、極限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が存在するとき、 f は a で連続であるという。

[任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して $|x - a| < \delta$ となるすべての $x \in D$ に対し $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ となる。]

例 $I = \{x | 0 < x < 10\}$ で定義された $f(x) = x^2$ は 1 で連続である

任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して $|x - 1| < \delta$ となるすべての $x \in D$ に対し $|x^2 - 1^2| < \epsilon$ となる。

$|x^2 - 1^2| < 100$ とするには、 $|x - 1| < 1$ で大丈夫。

$\{|1.5 - 1| < 1, |1.5^2 - 1^2| < 100, \}$

とするには、

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon)$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \{0 < |x - a| < \delta\}, |f(x) - b| < \epsilon]$$

解析概論 p20

または二次元を例にとって $P = (x, y)$ 、 $A = (a, b)$ とすれば、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) =$$

詳しくいえば、 $\epsilon > 0$ を任意に取るとき、それに対応して $\delta > 0$ を定めて

$$|x - a| < \delta, |y - b| < \delta, P \neq A \quad \text{なるとき} \quad |f(x, y) - f(a, b)| < \epsilon$$

ならしめることをうるのである。

解析概論 p23

$f(x)$ が $x = a$ なる点において連続であるとは

のとき

であることにほかならない。

正なる ϵ が任意に与えられたとき、それに対応して正なる δ を適当に取って

$$|x - a| < \delta \quad \text{なるとき} \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

ならしめうるのである。

微分積分 p44

任意の正数 ϵ に対して、ある正数 δ が存在し、 $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - b| < \epsilon$ となるとき、
点とその近くで定義されている関数が
を満たすとき、 f が a で連続である (continuous) という。

イプシロン-デルタ p44 ~

$$q: \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

は、 ϵ と δ を用いて書くと、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

となるのであったが、

というのは、 ϵ と δ となるということであるから、これは
と書ける。結局、 q は、 ϵ と δ を用いて、

$$q: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta, |f(x) - b| < \epsilon)$$

複素解析 p23

定義 関数 $f(x)$ が x を a に近づけたときに極限 A をもつ、記号でかくと

というのは次のことが成り立つことである：

任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し、 $|x - a| < \delta, x \neq a$ をみたすすべての x に対し $|f(x) - A| < \epsilon$ が成り立つようにできる。

関数 $f(x)$ は、 a となるときに、 a で連続とよばれる。たんに連続関数といえば、定義されているすべての点で連続な関数のことである。

連続 { 解析入門 Ip55 } { 解析入門 Ip51 ~ 52、30 講 P42 ~ } { 大学院別 }

定義 5 $D \subset R^n, f : D \rightarrow R^m$ とする。 $a \in D$ に対し、極限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が存在するとき、 f は a で連続であるという。

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \{|x - a| < \delta\}, |f(x) - f(a)| < \epsilon]$$

[任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して $|x - a| < \delta$ となるすべての $x \in D$ に対し $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ となる。]

例 $I = \{x | 0 < x < 10\}$ で定義された $f(x) = x^2$ は 1 で連続である

任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して $|x - 1| < \delta$ となるすべての $x \in D$ に対し $|x^2 - 1^2| < \epsilon$ となる。

$|x^2 - 1^2| < 100$ とするには、 $|x - 1| < 1$ で大丈夫。

$\{|1.5 - 1| < 1, |1.5^2 - 1^2| < 100, \}$

とするには、

P55

定義 5 $D \subset R^n, f : D \rightarrow R^m$ とする。 $a \in D$ に対し、極限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が存在するとき、 f は a で連続であるという。

任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して $|x - a| < \delta$ となるすべての $x \in D$ に対し $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ となる。

30p42

関数が、

$$x a f(x) f(a)$$

という性質をみたすとき、 $x = a$ で連続であるという：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

大学院別入試問題と解法 P14

[4] が連続ならば f も連続である。

大学院別入試問題と解法 P58

[4] 実数値関数が有界閉区間上で連続ならば、上で一様連続であることを示せ。

大学院別入試問題と解法 P232

[4]

をで定義された連続関数で、となるものとする。

$\epsilon = 100$ の場合、 $\delta = 1$ は OK。