

p132 ~

定理 7. 領域  $\Omega$  から 1 点  $a$  を除いた領域を  $\Omega'$  とし、 $f(z)$  は  $\Omega'$  で解析的と仮定する。 $\Omega$  での解析関数で  $\Omega'$  では  $f(z)$  に等しいようなものが存在するための必要十分条件は  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$  である。。。

、。。中心の円を、とその内部がに含まれるようにとる。コーシーの公式は成り立つから、の内部の任意の点で、

$$f(z) =$$

とかける。しかし、右辺の積分はの内部全体で解析関数を表す。ゆえに、に対してはに等しく、での値は

とした関数は、で解析的になる。。

この結果を、コーシーの公式の証明に用いられた関数

$$F(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

に應用する\*。これは  $z = a$  では定義されていないが  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)F(z) = 0$  はみたしている。 $z$  が  $a$  に近づいたときの  $F(z)$  の極限は  $f'(a)$  である\*。ゆえに、 $z \neq a$  のときは  $F(z)$  に等しく  $z = a$  では  $f'(a)$  に等しい解析関数が存在する\*<sup>3</sup>。それを  $f_1(z)$  とおく。同じことを  $f_1(z)$  に対しくり返し、ではに等しくではに等しい解析関数が定義できる。これを続けることができる。

$f_n(z)$  を定義する帰納的な組立ては次の式でかける：

$$f(z) = f(a) + (z - a)f_1(z),$$

$$f_1(z) = f_1(a) + (z - a)f_2(z),$$

$$f_{n-1}(z) = f_{n-1}(a) + (z - a)f_n(z)$$

これは  $z = a$  でも正しく、これらの式から次の式をうる：

$$f(z) = f(a) + (z - a)f_1(a) + (z - a)^2 f_2(a) + \dots + (z - a)^{n-1} f_{n-1}(a) + (z - a)^n f_n(z)$$

両辺を  $n$  回微分して  $z = a$  を代入し、

$$f^{(n)}(a) = n! f_n(a)$$

をうる。これで係数  $f_n(a)$  は定まり、テイラーの定理の次の形をうる：

定理  $f(z)$  は領域  $\Omega$  で解析的 { } で  $a \in \Omega$  とすると、 $\Omega$  での解析関数  $f_n(z)$  が存在し  $\Omega$  で次の式が成立する：

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z - a) + \frac{f''(a)}{2!}(z - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z - a)^{n-1} + f_n(z)(z - a)^n \quad (28)$$

\*1p126

\*3 定理 7

同じ円を用いて、まず

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

とかける。 $f_n(\zeta)$  に (28) からえられる式を代入する。を含む主要な項はつである。残りの項は、定数の係数を無視すると

$$= \int_C \frac{d\zeta}{(\zeta - a)^\nu(\zeta - z)}, \quad \nu \geq 1$$

という形である。ところが、 $C$  の内部にある任意の  $a$  に対し恒等的に  
となる。

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^n(\zeta - z)} d\zeta$$

となる。 $z$  が  $C$  の内部にあればこの式は成立する。

p192

ここで、は  $|z - z_0| = \rho$  がに含まれるようにとった円周  $|z - z_0| = \rho$  である。

上での最大値をとかくと、直ちに評価

をうる。剰余項はで一樣に行くことがいえる。一方、。これで次の定理が証明できた：

定理 が点を含む領域で解析的であると、を中心とするに含まれる最大の開円板において  
が成り立つ。

{ IIp254 ~ }

定理 3.1 ( ) 函数  $f$  が  $C$  の領域  $D$  で正則  $\{ \}$  であるとする。 $D$  の任意の点  $a$  を中心とする円板  $D(a, R) = \{z \in D \mid |z - a| < R\}$  ( $R > 0$ ) が  $D$  に含まれるとき、 $f$  は  $D(a, R)$  上で収束する整級数で表わされる。また  $f$  は  $D$  上で任意回複素微分可能で  $f$  の  $n$  階導関数  $f^{(n)}$  は  $D$  で正則である。そしてこの整級数は、 $a$  を中心とする  $f$  のテーラー級数であり、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \quad (\forall z \in D(a, R))$$

が成立つ。

証明  $0 < r < R$  となる  $r$  を半径とし、 $a$  を中心とする正の向きの円周を  $C$  とすれば、コーシーの積分表示式 ( ) により、 $C$  の内部の点  $z$  に対し

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \rho = |z - a| < r \quad \{3.2\}$$

が成立つ。いま  $\zeta$  が  $C$  上にあるとき、 $z \in D(a, r)$  を固定すれば

が成立つ。このときだから、( ) の等比級数は、を固定するとき、上一様収束する。また正則なコンパクトな上で有界だから、

$$f(\zeta)/(\zeta - z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)(\zeta - a)^{-(n+1)}(z - a)^n \quad (3.4)$$

は、固定した  $z$  に対し、上一様収束する。そこで (3.2) の右辺の被積分函数をこの級数 (3.4) で表わしたとき、項別積分ができ、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad (z \in D(a, r))$$

が成立つ。ただし係数は

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n \in N)$$

で与えられる定数である。従って (3.5) の右辺は、 $a$  を中心とする変数  $z$  の整級数であり、 $f(z)$  は円板  $D(a, r)$  上で、収束するこの整級数によって表わされる。

従って整級数の項別微分定理 ( ) により、は上で何回でも複素微分可能で、すべての  $n$  に対し、の階導関数は上正則であってを回項別微分して得られる。従って特に

$$a_n = f^{(n)}(a)/n! \quad (n \in N)$$

留数の定義 { IIP303 ~ 304 } { 30 講 P205 } { }

定義 1 除外円板  $D_0(a+ib, R) = \{x+iy \in C | 0 < |\{x+iy\} - \{a+ib\}| < R\}$  で  $u()+iv()$  が正則であるとき、 $a+ib$  を中心とする  $u()+iv()$  のローラン展開を

$$\begin{aligned} & u(x, y) + iv(x, y) \\ = & \dots \\ & + \frac{a_{-n,R} + ia_{-n,I}}{\{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^n} \\ & + \dots \\ & + \frac{a_{-2,R} + ia_{-2,I}}{\{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^2} \\ & + \frac{a_{-1,R} + ia_{-1,I}}{\{x+iy\} - \{a+ib\}} \\ & + \{a_{0,R} + ia_{0,I}\} \\ & + \{a_{1,R} + ia_{1,I}\} \{\{x+iy\} - \{a+ib\}\} \\ & + \{a_{2,R} + ia_{2,I}\} \{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^2 \\ & + \dots \\ & + \{a_{n,R} + ia_{n,I}\} \{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^n \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$0 < |\{x+iy\} - \{a+ib\}| < R$$

とするとき、 $\{\{x+iy\} - \{a+ib\}\}^{-1}$  の係数  $a_{-1,R} + ia_{-1,I}$  を、 $u()+iv()$  の  $a+ib$  における留数といい、

$$a_{-1,R} + ia_{-1,I} = \text{Res}_R(u() + iv(), a+ib) + i\text{Res}_I(u() + iv(), a+ib)$$

と記す。

{ P304 }{ }

命題 8.1

証明 整数  $n$  が、 $-1$  でなければ、 $\{x + iy\} - \{a + ib\}$  は  $D$  における原始函数  $\frac{1}{n+1} \{x + iy\} - \{a + ib\}$  を持つから、定理 1.2 { } により

$$\int_C \{x + iy\} - \{a + ib\} \{x + iy\}'(t) dt = 0 + i0 \quad \{n \neq -1\}$$

である。そして  $n = -1$  のときは、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\{x + iy\}'(t) dt}{\{x + iy\} - \{a + ib\}} = 1 + i0$$

{ 概論 P226 } { 30 講 P207 } { }

定理 61.  $K$  内の閉曲線  $C$  の内部で、 $u(x,y)+iv(x,y)$  が、有限個の孤立する特異点以外で、正則ならば

$$\begin{aligned} & \int_C \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt \\ = & 2\pi i \{ \text{Res}_R(u() + iv(), a_{1,R} + ia_{1,I}) + i \text{Res}_I(u() + iv(), a_{1,R} + ia_{1,I}) \\ & + \cdots \\ & + \text{Res}_R(u() + iv(), a_{n,R} + ia_{n,I}) + i \text{Res}_I(u() + iv(), a_{n,R} + ia_{n,I}) \} \end{aligned}$$

$C$  内のの特異点における留数の和

P306 { 30P206 }

命題 8.3  $a$  が  $f$  の  $n$  次の極ならば、

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{\{n-1\}!} \lim_{z \rightarrow a, z \neq a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [\{z-a\}^n f(z)]$$

である。

複素解析

定義 3. 留数

$$f(z) = B_h(z-a)^{-h} + \dots + B_1(z-a)^{-1} +$$

をみて、留数は係数に等しいことを認めるだけでよい。実際、 $B_1(z-a)^{-1}$  という項を除けば、残りは明らかにある関数の導関数である。

留数の定義 P303 ~ 304 { 30P205 }

定義 1 除外円板  $D_0(a, R) = \{z \in C | 0 < |z - a| < R\}$  で  $f$  が正則であるとき、 $a$  を中心とする  $f$  のローラン展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < R$$

$$[f(z) = +\frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + +\frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a)^1 + a_2(z-a)^2 + +a_n(z-a)^n +]$$

とすると、 $(z-a)^{-1}$  の係数  $a_{-1}$  を、 $f$  の  $a$  における留数といい、

$$a_{-1} = \text{Res}(f, a) = \text{Res}_{z=a} f(z)$$

と記す。

P304 { 30P207 }

定理 8.2 (留数定理) 領域  $D$  において、 $f$  は有限個の孤立特異点  $a_1, \dots, a_n$  を除き正則とする。 $D$  内のサイクル  $C$  が、 $D$  内でホモローク 0 で、どの  $a_k$  も通らないとき、次の等式が成立つ。

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n n(C, a_k) \text{Res}(f, a_k)$$

P306 { 30P206 }

命題 8.3  $a$  が  $f$  の  $n$  次の極ならば、

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{\{n-1\}!} \lim_{z \rightarrow a, z \neq a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [\{z-a\}^n f(z)]$$

である。



P236

[12]

留数は  $\frac{1}{f'(a_k)}$  であることを示せ。

解

留数定理によ

P49

[6] 複素変数  $z$  の多項式をとす。このとき

$$\int_C \frac{z^k}{f(z)} dz = \begin{cases} 0, \\ 2\pi i, \end{cases}$$

となることを示せ。ただしここで  $C$  は正の向きの単純閉曲線であって、のすべての根は  $C$  の囲む領域の内部に含まれているものとする。

解

$$\text{ここで、自然数 } m \text{ に対して、} \int_C \frac{1}{\{z - z_i\}^m} dz = \begin{cases} 0, & m > 1 \\ 2\pi i, & m = 1 \end{cases}$$

$$1 = \{\forall \epsilon > 0\}$$

$$2 = \{\exists n_0 \in N\}$$

$$3 = \{n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\}$$

$$4 = \{x|0 \leq x \leq 1\}$$

$$5 = \delta$$

$$6 \cdot 6 \quad 7 \cdots 7 \quad 8 = \vec{a} \quad 9 = \sqrt{a}$$

$$10 = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

$$11 = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

$$12 = \sum_{i=1}^n$$

$$13 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$14 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$15 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 16 &= a \\ &= b \\ &= c \end{aligned}$$

$$17 = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

定義 18

[次のページへ続く。]

$$19 = \int_a^b$$

$$20 = \alpha \quad 21 = \beta \quad 22 = \theta \quad 23 = \mu \quad 24 = \pi \quad 25 = \rho \quad 26 = \phi \quad 27 = \psi \quad 28 = \Delta$$

$$29 = \partial$$