

p267

集合の任意の二つの元と数体の任意の元に対し、和と積、およびスカラー積が定義されていて、以下の条件が満たされるとき、はであるという。以後、多元環のことを単に代数とよぶことにする。

p276

まず、一般的な非可換代数 U を考え、そのなかの N 個の生成子 $\{ \}$ を $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ とする。これから導かれる微分作用素を

$$e_i = \text{ad}\lambda_i$$

と定義し、これらの導分が作る空間を $D(U)$ と書くことにする。そして、の双対基底は式と同様にして、

により定義されとする。ここで、 I は代数 $\{ \}$ U の単位元である。

1 形式 $\{ \}$ が張る空間のことを、可換の場合と同様に $()$ と表すことにする。

その写像 E を U 上線形であるとして、

$$E : \Omega^1(U) \otimes \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U)$$

とする。が上のテンソル積であることはいうまでもない。具体的には代数の中心要素 $() E^{ij}_{kl}$ を用いて、

$$E(\theta^i \otimes \theta^j) = E^{ij}_{kl} \theta^k \otimes \theta^l$$

とするのである。もし、このとき

$$E^{ij}_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j) I$$

であったならば、

$$E(\theta^i \otimes \theta^j) = \frac{1}{2}(\theta^i \otimes \theta^j - \theta^j \otimes \theta^i)$$

が成り立つ。写像はテンソルの交代化を意味していることになる。式はまさにこの一般化と考えられ、単なる反交換の積とは限らない場合も含む。そこで以後、これを単に $\theta^i \theta^j$ と表すことにする。...。改めて記すと、

$$E(\theta^i \otimes \theta^j) = E^{ij}_{kl} \theta^k \otimes \theta^l = \theta^i \theta^j$$

はの元であるから、の線形結合で表される。その係数を式 (6.57) との類似でと記すことにすると

$$(6.73)$$

p284

多様体における計量の定義から始める。それは 1 形式 $\{\theta^i\}$ を用いて、

$$g = g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j$$

と表される。

$$g_{ij} = g(e_i, e_j)$$

以上述べてきた事柄を拡張し、非可換代数上のものに置き換えねばならないが、 $\{\theta^i\}$ が張る空間 $\Omega^1(U)$ に対しての成分を定義したほうが便利である。

、それは $\Omega^1(U) \otimes \Omega^1(U)$ 上の作用素であり、

$$\sigma(\theta^i \otimes \theta^j) = S^{ij}_{kl} \theta^k \otimes \theta^l, \quad S^{ij}_{kl} \in U \quad (7.9)$$

として定義されるものである。最も簡単なフリップは

によって与えられるもので、式に代入してみると

となる。つまり、このときはテンソル積の順序を入れ換えるだけの操作をするのである。

p286

、。新たな空間として、 U の作用が左側からのみ許される U - 左加群 m_L を導入し、線形写像 $()D$ をつぎのようにして定義する。 D は

$$D :$$

であり、に対して

$$D(f\xi) = df \otimes \xi + fD\xi \quad (7.18)$$

を満たすものであるとする。

、両側加群 m の上で定義される両側接続について説明しよう。それには式 (7.9) で導入したフリップを用いる。ここでは

:

として、に対する右側則を

$$D(\xi f) = (7.38)$$

と定義する。

p291

非可換幾何学においてもそれを拡張して捩率を定義することができる。捩率を T と表すと、それは $D(U)^*$ に値をとる 2 形式であり、 $\forall \xi, \forall \eta \in D(U)$ に対して

$$T(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \{ (D\eta)(\xi) - (D\xi)(\eta) - [\xi, \eta] \}$$

として定義される。ここで、としての基底を、を代入してみると、

となるが、式と同様にして、基底に関する共変微分を

と定義すると、

が得られる。これはに値をとるので、両辺にを作用させると、に注意して、

$$(7.49)$$

ここで式 (6.73) を思い起こそう。それは

$$(7.50)$$

であった。

式 (6.75) より

$$= (7.51)$$

式 (7.51) より

であるので、結局

$$[e_j, e_k] = Q^i_{jk} e_i$$

一方、(7.50) 式から

$$=$$

であるので、式 (7.49) の右辺第三項は

$$=$$

と書き換えられる。したがって、式 (7.49) は

となる。が形式であることを考慮して、

$$=$$

となることを利用すると、結局

$$\theta^i(T(e_j, e_k)) = (\omega^i_l \theta^l + d\theta^i)(e_j, e_k)$$

が得られることになる。

そこで、この左辺を換率 $T(e_j, e_k)$ の $D(U)$ における第 i 成分として、 $\Theta^i(e_j, e_k)$ と表すことにすると、

$$\Theta^i = d\theta^i + \omega^i_l \theta^l$$

と書けることがわかる。これは、微分形式を用いて通常定義されている換率と同じ形をしている。

p294

、可換の場合と同様にして、の曲率形式

$$= d\omega^i_l + \omega^i_k \omega^k_l$$

を定義し、

群と表現 p106

、複素正則行列の作る群、またはその部分群が与えられたときに、そのリー代数とは任意の実数 t に対してその群の元が

$$\exp[tX] \in G$$

となるような行列 X の全体を指すとする。ただし、の左辺は

$$=$$

で定義されている。

d 個の独立なリー代数 $\{ \}$

$$L_1, L_2, \dots, L_d$$

が与えられ、これらが交換関係

$$[L_A, L_B] = iC_{AB}^C L_C \quad (A, B, C = 1, 2, \dots, d)$$

を満たすとする。() はつのリー代数を定義する。このときこれに対応するリー群の元 g は、 $t^A (A = 1, 2, \dots, d)$ を実数パラメータとして

$$g = \exp[-it^A L_A]$$

で与えられる。 L_A をリー群の生成子という。

p141

$$[L_A, L_B] = iC_{AB}^D L_D$$

。。これを随伴表現という。

連続群とその表現 p114

随伴表現

接続の微分幾何 p92 ~

接ベクトル束 TM に定義された内積を g と書く。

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

任意の接ベクトル場 $X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 、 $Y = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ に対し

$$g(X, Y) = \sum g_{ij} \xi^i \eta^j$$

であるから

$$g = \sum g_{ij} dx^i dx^j$$

と書く習慣がある。

接続の微分幾何 p103 ~

M は n 次元多様体とする $\{ \}$ 。 TM をその接ベクトル束とする。 TM で定義された内積 g を M のリーマン計量と呼ぶ。 すなわち、各点 $x \in M$ で g は接空間 $T_x M$ に内積 $\{ \}$ g_x を定義する $\{ s \}$ さらに g_x は x に関して微分可能と仮定する。 $()$ のように、 M の局所座標系 x^1, \dots, x^n に関して、 g を

$$g = \sum g_{ij} dx^i dx^j \quad \left(\text{ここで } g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \right)$$

と書く。

M の中に曲線 c が

$$x^i = x^i(t), \quad a \leq t \leq b, i = 1, \dots, n$$

で与えられたとき、その接ベクトル $()$ は、 $\sum \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$ 、または、その成分だけ書いてで表わされる。その長さは

$$\left(\sum g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}}$$

だから、曲線 c の長さは

$$L(c) = \int_a^b \left(\sum g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad \{ s \}$$

で与えられる。が常に 1 になるような助変数 t を s と書く習慣がある。そのような助変数 s を使うと、

$$\sum \left(g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds = ds$$

だから、リーマン計量 g を

$$ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j$$

と書く伝統がある $\{ \}$

接ベクトル束 TM の標構としてはでなく正規直交基をなす e_1, \dots, e_n を使う方が便利なが多い。そのとき、定義により

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

である。 e_1, \dots, e_n に対して双対基となる $()$ 1 次微分形式 $\theta^1, \dots, \theta^n$ をとれば、

定理 リーマン計量 $g = \sum \theta^i \theta^i$ に対し、1 次微分形式の行列 $\omega = (\omega_j^i)$ で次の性質をもつものがただ一つ存在する。

- () $\omega_j^i = -\omega_i^j$
 - () $d\theta^i = -\sum \omega_j^i \wedge \theta^j$
- 証明 求むべき ω_j^i を

$$\omega_j^i = \sum c_{jk}^i \theta^k, \quad c_{jk}^i = -c_{ik}^j$$

と書く。ただし、 c^i_{jk} は () 関数である。一方、

$$d\theta^i = \frac{1}{2} \sum a^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k, \quad a^i_{jk} = -a^i_{kj}$$

と書く*。これを

$$-\sum \omega_j^i \wedge \theta^j = \sum c^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k =$$

と比べて

を得る。。でとを入れかえ、またとを入れかえ、次の二式を得る。

ここを計算し、関係を使って

を得る。これでの存在と一意性が同時に証明された。

$$[g\left(\sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \xi^i \eta^j]$$

多様体 p39

微積分学において学んだように平面における滑らかな曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

で与えられる。

、被積分関数は接ベクトルの長さであると解釈される。

リーマン多様体において滑らかな曲線があるとき、その上の点の間の曲線の長さを

$$= \int_a^b \sqrt{g_{x(t)}(x'(t), x'(t))} dt$$

によって定義する。ここにはにおけるの接ベクトルを示す。

$$= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

$$[\sum g_{ij} \xi^i \eta^j = g_{11} \xi^1 \eta^1 + g_{12} \xi^1 \eta^2 + g_{21} \xi^2 \eta^1 + g_{22} \xi^2 \eta^2]$$

$$[= g\left(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\right) + g\left(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \eta^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\right) + g\left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\right) + g\left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \eta^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\right)]$$

$$[= g\left(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\right)]$$

例

相対論きき p114

2 点 (x, y) と $(x + dx, y + dy)$ の間の距離の 2 乗は、ピタゴラスの定理より

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = [dx, dy] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

次に平面を、極座標

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

で表わしてみよう。2 点 (r, θ) と $(r + dr, \theta + d\theta)$ は、 r 方向には dr 、 θ 方向には $r d\theta$ 程度ずれている。方向と方向は直交しているから、も微小ならばピタゴラスの定理を使うことはできて、

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 = (dr, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

一般の座標系をとすれば、もも

$$(ds)^2 = [dx^1, dx^2] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{bmatrix} = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$
$$[= g_{11} dx^1 dx^1 + g_{21} dx^2 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} dx^2 dx^2]$$

という形に書ける。

$$[g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) dr dr + + + g\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) d\theta d\theta = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2]$$

p115

半径 a の球面を考える。。この球面上の各点を、角度 θ と φ を使って図のように表わす。

微小にずれた 2 点との間の距離を考えよう。 φ を一定にしたまま θ が $d\theta$ だけ増せば、球面上の点は $a d\theta$ だけ動く。また φ のほうだけ動かせば、点は $a \sin \theta d\varphi$ だけ動く。この 2 つの方向は直交しているので、移動が微小ならばピタゴラスの定理を使うことができ、

$$(ds)^2 = a^2(d\theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$$

となる。したがって計量テンソルは

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

球面は曲面だから、どのような座標系を使っても計量テンソルはユークリッド計量にはならない。
相対論きき p120

$$I = \int_I ds [= \int_I \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}] = \int_I \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} ds$$
$$[\int_a^b \sqrt{g\left(\sum \frac{dx^i}{ds} \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum \frac{dx^i}{ds} \frac{\partial}{\partial x^i}\right)} ds]$$

理論 p202

$V^\mu(x + \Delta x)$ から $V^\mu(x)$ を引くには $V^\mu(x)$ を $x + \Delta x$ へ変化させずに移動してその違いを計算しなければならない。このベクトルの移動を平行移動とよぶ。ベクトル $V|_x$ を $x + \Delta x$ へ平行移動したものを $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$ で表す。ここで成分 \tilde{V}^μ は条件

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) \propto \Delta x$$

=

を満たすことを要請する。これらの条件は

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x)\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x)\Delta x^\nu \quad (7.9)$$

と選べば満たされる。V の x^ν に関する共変微分は

$$\lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

で定義される。平行移動の方法は数多くあり、 Γ を選ぶごとに平行移動の規則が 1 つ決まる。

例直交座標系 (x, y) において $\tilde{V}^\mu(x + \Delta x, y + \Delta y) = V^\mu(x, y)$ が任意の $\Delta x, \Delta y$ について成り立つので Γ の成分はすべてゼロとなる。次に極座標 (r, ϕ) を選ぶ。 $(r, \phi) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi)$ を埋め込みと考えると、

。 $V = V^r \partial / \partial r + V^\phi \partial / \partial \phi$ を (r, ϕ) におけるベクトル場とする。このベクトルを $(r + \Delta r, \phi)$ に平行移動すると、新しいベクトル $\tilde{V} = \tilde{V}^r \partial / \partial r|_{(r+\Delta r, \phi)} + \tilde{V}^\phi \partial / \partial \phi|_{(r+\Delta r, \phi)}$ を得る。 $V^r = V \cos \theta, V^\phi = V(\sin \theta / r)$ に注意せよ。但し V で、 θ は V と $\partial / \partial r$ の間の角度である *1。このとき $\tilde{V}^r = V^r$ と

$$\tilde{V}^\phi = \frac{r}{r + \Delta r} V^\phi \simeq V^\phi - \frac{\Delta r}{r} V^\phi$$

を得る。これらの成分を (7.9) と比べて容易に

$$\Gamma^r_{rr} = 0 \quad \Gamma^r_{r\phi} = 0 \quad \Gamma^\phi_{rr} = 0 \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}$$

が求まる *2。同様に V を $(r, \phi + \Delta \phi)$ に平行移動すると

$$\tilde{V} = \tilde{V}^r \frac{\partial}{\partial r} + \tilde{V}^\phi \frac{\partial}{\partial \phi}$$

となる。ここで

$$\tilde{V}^r = V \cos(\theta - \Delta \phi) \simeq$$

および

である。これから

$$\Gamma^r_{\phi r} = \Gamma^r_{\phi \phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \Gamma^\phi_{\phi \phi} =$$

*1 $\Delta x' = \Delta r, \Delta y' = r \Delta \phi, \tilde{V}^\phi = V(\sin \theta / r + \Delta r)$

*2

$$[\tilde{V}^\phi(x + \Delta x) = V^\phi(x) - V^\phi(x)\Gamma^\phi_{r\phi}(x)\Delta x^r]$$

$$[\tilde{V}^\phi(r + \Delta r, \phi) = V^\phi(r, \phi) - V^\phi(r, \phi)\Gamma^\phi_{r\phi}(r, \phi)\Delta r]$$

、M を n 次元部分多様体とする。

g を部分多様体 M のあるいはリーマン計量と呼ぶ。

$$\times g = \sum g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) dx^i dx^j = \sum g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} ds ds$$

$$\left(g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}\right) ds ds$$

$$\left(g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}\right) \frac{dx^i}{ds} \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{dx^j}{ds} \frac{\partial s}{\partial x^j}$$

$$[g\left(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + \eta^n \frac{\partial}{\partial x^n}\right) =]$$

多様体 p133

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{g_{x(t)}(x'(t), x'(t))} dt \quad (1)$$

$$g_{ij}(x) = g_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x\right) \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

$$x'(t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x(t)}$$

である。ゆえに (1) はつぎの形に書ける。

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

リーマン幾何学 p32

m 次元多様体 M の各点 p での接空間 $T_p M$ に内積 g_p が与えられ、級ベクトル場に対して上の関数が級であるとき、 M に C^r 級リーマン計量 g が与えられたといい、

リーマン計量 g を $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ と表わすこともある。

リーマン幾何学 p35

級曲線の長さを

$$L(c) =$$

で、

7.8.1

ここでは $\{ \}$ が直交系であることを要請する；

$$g(e, e) =$$

を使って計量を表すと

$$g =$$

となる。

Mirrorp12

$$= r^2, \quad =, \quad = r^2 \sin^2$$

相対性理論 p65

計量テンソル

内積、リーマン計量、リーマン多様体 { 多様体の基礎 p274 ~ }

定義 19 V を \mathbb{R} 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式 ω が対称 k 次形式であるとは、 $X_1, X_2, \dots, X_k \in V$ の間にどのような置換を施しても、 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ の値が変わらないことである。

定義を、置換群の言葉で表現すれば、次のようになる： V 上の k 次形式 ω が対称 k 次形式であるとは、 $\forall X_1, X_2, \dots, X_k \in V$ と、 $\forall \sigma \in S_k$ について、 $\omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ がなりたつことである。

{ 定義 級多様体 M 上のテンソル場 $\omega =$ が k 次対称テンソル場であるとは、 M の各点 p において、 ω_p が $T_p(M)$ 上の対称 k 次形式 ω_p になっていることである。 }

{ ベクトル空間 V 上の対称 2 次形式 $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ の大切な例に、 V の内積がある。これは、 V 上の対称 2 次形式 ω であって、更に次の意味で正定値なものである。すなわち、 V の任意の 0 でないベクトル X について、 $\omega(X, X) > 0$ がなりたつようなものである。 }

{ たとえば、次元数ベクトル空間 \mathbb{R}^m の場合、 $X = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 、 $Y = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ に対し、

$$\omega(X, Y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$$

とおけば、 }

{ 定義 19 級多様体 M 上の 2 次の対称テンソル場 ω が、 M の各点 p において正定値であるとき ω を M 上のリーマン計量という。

つまり、 M の各点 p の接ベクトル空間 $T_p(M)$ に内積 ω_p を与えるようなものがリーマン計量 ω である。通常、リーマン計量は g という記号で表わされる。リーマン計量 g がひとつ与えられた多様体 (M, g) のことをリーマン多様体 とよぶ。

{ 接ベクトル $X \in T_p(M)$ の長さ $\|X\|$ が

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)} \quad (\geq 0)$$

$$[= \sqrt{g\left(\xi^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \xi^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p + \dots + \xi^m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p, \xi^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \xi^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p + \dots + \xi^m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right)}]$$

という式で定義できる。曲線 c の長さが

$$\int_c^d \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt = \int_c^d \sqrt{g\left(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right)} dt$$

という式で、定義できるのである。 }

半径 a の球面を考える。

微小にずれた 2 点との間の距離を考えよう。を一定にしたまま θ が $d\theta$ だけ増せば、球面上の点は $ad\theta$ だけ動く。また φ のほうだけ動かせば、点は $a\sin\theta d\varphi$ だけ動く。この 2 つの方向は直交しているので、移動が微小ならばピタゴラスの定理を使うことができ、

$$(ds)^2 = a^2(d\theta)^2 + a^2\sin^2\theta(d\varphi)^2 = [d\theta, d\varphi] \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{bmatrix}$$

となる。したがって計量テンソルは

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

例

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = [dx, dy] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$(ds)^2 = [dx^1, dx^2] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{bmatrix} = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

$$[= g_{11}dx^1dx^1 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}dx^2dx^2]$$

$$I = \int_l ds = \int_l \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j} = \int_l \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} ds$$

計量テンソル

p115

$$(ds)^2 = a^2(d\theta)^2 + a^2\sin^2\theta(d\varphi)^2$$

p270

定義 19 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式 (正確には、 k 次の多重線型形式) とは、 V の k 個の直積から R への写像

$$\omega : V \times V \times \cdots \times V \rightarrow R$$

であって、 $\{\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ が各 X_i に関して線型であるようなものを言う。

たとえば、 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ が第 1 の変数 X_1 に関して線型であるというのは、任意の $X, Y \in V$ と任意の実数 $a, b \in R$ について、

$$\omega(aX + bY, X_2, \dots, X_k) = a\omega(X, X_2, \dots, X_k) + b\omega(Y, X_2, \dots, X_k)$$

がなりたつことである。

$\{V$ 上の k 個の 1 次形式を任意にとる。このとき、
という記号で表わされる V 上の k 次形式が、次の式で定義できる。

$$(\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \cdots \otimes \eta_k)(X_1, X_2, \dots, X_k) = \eta_1(X_1)\eta_2(X_2)\cdots\eta_k(X_k)$$

$\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \cdots \otimes \eta_k$ を $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ のテンソル積とよぶ。

多様体入門 p11

との直積集合からへの写像が条件

$$(a + b, a') = (a, a') + (b, a')$$

$$(a, a' + b') = (a, a') + (a, b')$$

$$()()()$$

をみたすとき、を上の双一次形式とよぶ。

さてを V 上の $(\)$ 双一次形式とする。任意のにたいして、

$$\alpha(a, b) = \alpha(b, a)$$

がなりたつとき、を V 上の対称双一次形式とよ

V 上の正則な対称双一次形式のことをの内積とよぶ。すなわち

V 上の対称双一次形式が

$$\alpha(x, x) > 0 \quad x \in V, x \neq 0$$

をみたすとき、をの正値内積とよぶ。

多様体入門 p41

M の各点 p における接ベクトル空間 $T_p(M)$ に正値な内積 $g_p(u, v) (u, v \in T_p(M))$ が与えられているとする。 $g_{ij}(q) = g_q((\frac{\partial}{\partial x^i})_q, (\frac{\partial}{\partial x^j})_q)$

g_{ij} がすべて M の各点の近傍で C^r 級であるとき、 M の各点 p に $T_p(M)$ の正値な内積 g_p を対応させる対応 $g : pg_p$ を M の C^r 級リーマン計量とよび、。リーマン計量が与えられたとき、における接ベクトル v の長さ $\|v\|$ を

$$\|v\|^2 = g_p(v, v)$$

により 定義 する。

リーマン計量 g をそなえた 多様体のことをリーマン多様体とよぶ。

を开区間で定義された可積分曲線、のにおける接ベクトルをとすとはの連続関数である。とするとき、

$$= \int_c^d \|v_t\| dt$$

をとの間の長さという。

幾何学 p144

一般の実線形空間に対しが 2 次形式とは、 $\wedge^2 V$ に対し、という双 1 次形式 $B : V \times V \rightarrow R$ があることである。さらに次形式が正値であるとは $q(v)=0$ ならば $v=0$ を満たすことである。上の双 1 次形式は、対称性 $B(u, v) = B(v, u)$ を満たす。

この g をリーマン計量と呼ぶ。

x のまわりの座標近傍 (U, \cdot) により、に対し $T_x M$ の基底 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ が同時に定まる。そのような基底について、は $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と書かれ、 $= g(v, v) = g_{ij}(x) v_i v_j$ と書かれる。

このようなリーマン計量を持つ多様体をリーマン多様体と呼ぶ。

定義 7.2.1 リーマン計量と呼ぶことが多い。

2.2.4 { 幾何学 p43 }

内積

7.1.1 { 幾何学 p199 }

定義 M を微分多様体とする。 M 上の Riemann 計量 g とは、各点 $p \in M$ で次の公理

$$g_p(U, V) = g_p(V, U)$$

$g_p(U, U) \geq 0$ 、ただし等式は $U=0$ のときのみ成り立つ

を満たす M 上の型テンソルである。ここで $U, V \in T_p M$ 、である。手短かにいえばは正定値な対称双 1 次形式である。

計量 g が存在する場合は、2 つのベクトル $U, V \in T_p M$ の内積を $g_p(U, V)$ によって定義する。 g_p は写像 $T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ なので、線形写像 $g_p(U, \cdot) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ を $V \mapsto g_p(U, V)$ によって定義することができる。

微分多様体 M が Riemann 計量 g をもつとき、対 (M, g) を Riemann 多様体とよぶ。

記号

点 p における M の接ベクトルとは

$$v = a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + a_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p + \cdots + a_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p \quad (\text{本 8.14})$$

$$v = \sum_{i=1}^n \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \quad (\text{島})$$

接ベクトル X

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)} \quad (\geq 0)$$

$$[= \sqrt{g \left(\xi^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \xi^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p + \cdots + \xi^m \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p, \xi^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \xi^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p + \cdots + \xi^m \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p \right) }]$$

多様体の基礎 p

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (\text{松本 16.14})$$

$$X = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^m \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$[g(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \eta^m \frac{\partial}{\partial x^m})]$$

微分形式の幾何学 p40

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

曲線と曲面の微分幾何 p97

$$\{\xi + \eta\}_{(u,v)=(a,b)}$$

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v} \right)_{(u,v)=(a,b)}$$

という微分作用そのものを接ベクトルと考えることにする。

領域 D の各点に 1 つずつ接ベクトルをつけたとき、それを D 上の接ベクトル場と呼ぶ。

いま、 M の各点 x に対し、接空間に、内積が与えられているとする。
 局所座標近傍上での基底
 を考え、各点に対して

$$=$$

とおく。

定義 各点 x に対し $T(M)_x$ に与えられた内積 $(\cdot, \cdot)_x$ が、次の条件 (R) をみたすとき、 M にリーマン計量が与えられたという：

(R) 各

p11

を上のベクトル空間とする。との直積集合からへの写像が条件
 をみたすとき、を上の双一次形式とよぶ。

p12

を V 上の (\cdot, \cdot) 双一次形式とする。任意の v, w に対して、

$$(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)$$

がなりたつとき、を V 上の対称双一次形式と

V 上の正則な対称双一次形式のことを V の内積とよぶ。すなわち、

の二条件をみたす場合をいう。 V 上の対称双一次形式が

をみたすとき、を V の正値内積とよぶ。

p153

座標基底 $\{e_i\} = \{\partial/\partial x^i\}$ を選ぶ。この基底で ω の成分は

$$\omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}) = \omega_{i_1 i_2 \dots i_r}$$

$$[\omega(\partial/\partial x^{i_1}, \partial/\partial x^{i_2}, \dots, \partial/\partial x^{i_r}) = \omega_{i_1 i_2 \dots i_r}]$$

である。

p280

定理 19.3 V の基底をとり、それに対応するの双対基底をとる。このとき、 ω がの基底になる。

ω をの任意の元として、実数を

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$$

と定義すれば、

$$\omega =$$

がなりたつ。

ω の各点において、 ω が、に対応するの双対基底になっている。したがって、定理 19.3 により、 ω の各点における交代次形式を

$$\omega =$$

の形に一意的に表わすことができる。この係数は、点で決まる実数だから、これを、

という関数とみなせる。

と局所座標表示できたわけである。

p108

複素多様体 X の Hermite 計量はとしても定義できるが、ここでは X の Riemann 計量 g で次の条件を満たすものとして定義する。

$$g(J, J) = g(J, J)$$

多様体入門 p99

M のリーマン計量 g が M の各点 p と任意の $u, v \in T_p(M)$ について

$$g_p(J_p u, J_p v) = g_p(u, v)$$

をみたすとき、 g を複素多様体 M のエルミット計量とよぶ。

p275

複素多様体 M の Riemann 計量 g が、各点 $p \in M$ と任意の $X, Y \in T_p M$ に対して

$$g_p(J_p X, J_p Y) = g_p(X, Y)$$

を満たすとき g は Hermite 計量とよばれる。

p115

上の定理の条件を満たすような Hermite 計量 g を Kahler 計量とよび、

p280

定義 8.4 Kahler 多様体とは Hermite 多様体 (M, g) で、その Kahler 形式が閉形式であるものをいう。計量 g は M の Kahler 計量とよばれる。

p259

定義 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の 1 次形式とは、 V から R への写像

$$\omega : V \rightarrow R$$

であって、任意のベクトル $X, Y \in V$ と任意の実数 $a, b \in R$ について

$$\omega(aX + bY) = a\omega(X) + b\omega(Y)$$

がなりたつようなものをいう（すなわち、 V から R への線型写像 $\omega : V \rightarrow R$ のことである）。

V 上の 1 次形式全体のなす集合を V^* と書くことにする。

定義 V^* を、 V の双対ベクトル空間または双対空間という。

e_1, e_2, \dots, e_m を、任意に選んだ V の基底とする。 V の任意のベクトル X は

$$X = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m \quad (a_i \in R)$$

のように、 e_1, e_2, \dots, e_m の次結合で書ける。番号 $i (1 \leq i \leq m)$ をひとつ固定して、ベクトル X に、 e_i の係数 a_i を対応させる写像 $\omega_i : V \rightarrow R$ を考える：

$$\omega_i(X) = a_i$$

この写像 $\omega_i : V \rightarrow R$ は明らかに線型写像であるから、 ω_i は V 上の 1 次形式と考えられる。

番号 i を 1 から m まで動かして得られる $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ という m 個の 1 次形式が、実は V^* の基底になるのである。

定義 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ を、に対応する双対基底という。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} f_{i_1 \cdots i_k}() dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_j}() dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \right] \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} f_{i_1 i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \{f_{1i_2} dx_1 \wedge dx_{i_2} + f_{2i_2} dx_2 \wedge dx_{i_2} + f_{3i_2} dx_3 \wedge dx_{i_2}\} \\
&= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{21} dx_2 \wedge dx_1 + f_{22} dx_2 \wedge dx_2 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{31} dx_3 \wedge dx_1 + f_{32} dx_3 \wedge dx_2 + f_{33} dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \{f_{23} - f_{32}\} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \{f_{31} - f_{13}\} dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \\
d\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \frac{\partial f_{i_1 i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \left\{ \frac{\partial f_{1i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{2i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{3i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_{i_2} \right\} \\
&= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \{f_{23} - f_{32}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \{f_{31} - f_{13}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
d\omega &= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \right] + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{22}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \left[+ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] \\
& + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \left[+ \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{33}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_3 \right]
\end{aligned}$$

{ P290 }

m 次元級多様体 M 上の k 次微分形式を座標近傍 $(U; x_1, x_2, \dots, x_m)$ 上で局所座標表示したものが

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

であったとする。

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

微分形式の幾何学 p61

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

を R^n 上の k 次の微分形式、。上記を簡単に、 $f_I(x)$ と記す場合もある。外微分とは、つぎのように定義される線形写像

$$d: A^k(R^n) \rightarrow A^{k+1}(R^n)$$

のことである。すなわち $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ に対して

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

30p213

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

微分位相 p35

$$\sum_{h_1} \dots \sum_{h_p} a_{h_1 \dots h_p} dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_p}$$

$$du \wedge du = 0, \quad dv \wedge dv = 0, \quad du \wedge dv = -dv \wedge du$$

次に外微分 d を

0 次微分形式 (f) に対しては

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

1 次微分形式 $= f du + g dv$ に対しては

$$= df \wedge du + dg \wedge dv$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv$$

2 次微分形式 $= f du \wedge dv$ に対しては

$$= df \wedge du \wedge dv$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du \wedge dv = 0$$

と定義する。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \\ &= 0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + 0 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + 0 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{21} dx_2 \wedge dx_1] + [f_{22} dx_2 \wedge dx_2] + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{31} dx_3 \wedge dx_1] + [f_{32} dx_3 \wedge dx_2] + [f_{33} dx_3 \wedge dx_3] \\ &= f_{23} dx_2 \wedge dx_3 - f_{13} dx_3 \wedge dx_1 + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

ストークスの定理 { P305 }

定理 { ストークスの定理 }

$$\int_N d\eta = \int_{\partial N} \eta$$

証明

$$\eta = \sum_{i=1}^m g_i dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_i \wedge \dots \wedge dx_m$$

$d\hat{x}_i$ は dx_i を除くことを表わす。

$$d\eta = \sum_{i=1}^m \{-1\}^{i-1} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_m$$

。により、

$$\begin{aligned} \int_N d\eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) dx_m dx_1 \dots \\ &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \{g_1(a, \dots, x_m) - g_1(0, \dots, x_m)\} \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a \{g_m(x_1, \dots, a) - g_m(x_1, \dots, 0)\} dx_1 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial N} \eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots g_1(a, \dots, x_m) \dots dx_m - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots g_1(0, \dots, x_m) \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a g_m(x_1, \dots, a) dx_1 \dots - \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a g_m(x_1, \dots, 0) dx_1 \dots \end{aligned}$$

[次のページへ続く。]

例

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(a, x_2) dx_2 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(0, x_2) dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, a) dx_1 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, 0) dx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(a, x_2, x_3) dx_2 dx_3 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(0, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, a, x_3) dx_1 dx_3 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, 0, x_3) dx_1 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, a) dx_1 dx_2 - \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

{ 微分幾何 P124 }

$$\begin{aligned}& \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right\} du dv \\&= \int_0^b \int_0^a \frac{\partial g}{\partial u} du dv - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial f}{\partial v} dv du \\&= \int_0^b [g(a, v) - g(0, v)] dv - \int_0^a [f(u, b) - f(u, 0)] du\end{aligned}$$