

{ 線型代数学 p114 ~ }

集合  $V$  が次の二つの条件を満たすとき、 $V$  はベクトル空間であるという。()

$a, b \in V$  に対し  $a + b \in V$  が定義され、これに関し次の法則が成立する。()

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + b = b + c$$

特別なベクトル  $0()$  が存在し、任意の  $a \in V$  に対し

$$a + 0 = a$$

任意の  $a$  に対し  $0()$  が存在し

$a \in V, c$  : スカラーに対しスカラー倍  $ca \in V$  が定義され、これとの加法とに関して次の法則が成立する。()

$$(cd)a = c(da)$$

$$1a = a$$

$$c(a + b) = ca + cb$$

$$(c + d)a = ca + da$$

線型代数入門 p96

定義 集合  $V$  がつぎの二条件 ( ), ( ) を充すとき、 $V$  を複素線型空間あるいは複素ベクトル空間と言う。

( ) の二元に対して和と呼ばれる第三 ( ) の元が定まり、つぎの法則が成立つ :

( )

( )

( )

( )

( )

( ) の任意の元と任意の複素数に対し、の倍と呼ばれるもう一つの元 ( ) が定まり、つぎの法則が成立つ :

( )

( )

( )

( )

定義 上の線型空間  $V$  から上の線型空間  $V'$  への写像  $T$  が二条件

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(ax) = aTx$$

を充すとき、 $T$  を  $V$  から  $V'$  への線型写像と言う。

線形代数 p91

定義、 $V$  をベクトル空間あるいは線形空間といい、 $V$  の元をベクトルという。

{ 線型代数入門 P99 }

$K$  上の線形空間  $V$  を固定する。

$V$  のベクトル  $a_1, a_2, \dots, a_k$  に対し、

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k, \quad c_i \in K \quad ()$$

の形のベクトルを、 $a_1, a_2, \dots, a_k$  の線型結合と言う。ベクトル  $a_1, a_2, \dots, a_k$  のあいだの関係

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k = \mathbf{0}$$

を線型関係と言う。それは  $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$  としたもので、自明な線型関係と呼ばれる。

$a_1, a_2, \dots, a_k$  のあいだに自明でない線型関係が存在するとき、 $a_1, a_2, \dots, a_k$  は線型従属である  
と言い、自明でない線型関係が存在しないとき、 $a_1, a_2, \dots, a_k$  は線型独立であると言う。

定義 線形空間  $V$  の有限個のベクトル  $e_1, e_2, \dots, e_n$  が次の二条件を充すとき、 $e_1, e_2, \dots, e_n$  は  
 $V$  の基底であると言う：

- 1)  $e_1, e_2, \dots, e_n$  は線型独立である；
- 2)  $V$  の任意のベクトルは、 $e_1, e_2, \dots, e_n$  の線型結合として表わされる。

[3.6] を上のたがいに同型な線形空間とし、 $V$  から  $V'$  への同型写像とする。のベクトルが線型独立ならば、 $V'$  のベクトルも線型独立である。

証明 のあいだに線型関係

があれば、のあいだに同じ係数による線型関係  
がある。。。

一次独立、基底 { 線型代数学 p115 ~ }

$a_1, \dots, a_r \in V$  は

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_r a_r = \mathbf{0}$$

$$\iff c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$$

のとき、一次独立であるという。

$V$  が  $n$  次元であるとき、 $V$  に属する  $n$  個の一次独立なベクトル  $a_1, \dots, a_n$  をとれば、 $V$  の  
任意のベクトル  $x$  は

$$x = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$$

の形に一意的に表わされる。このような  $\{a_1, \dots, a_n\}$  を  $V$  の基底という。

線型代数学 p115 ~

$a_1, \dots, a_r \in V$  は

$$\sum_{i=1}^r c_i a_i = \mathbf{0} \iff c_i = 0 \quad (1ir)$$

のとき、一次独立であるという。

$V$  が  $n$  次元であるとき、 $V$  に属する  $n$  個の一次独立なベクトルをとれば、 $V$  の任意のベクトルは

$$x = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$$

の形に一意的に表わされる。このような  $\{a_1, \dots, a_n\}$  を  $V$  の底という。

線型代数入門 P99

$K$  上の線型空間  $V$  を固定する。

$V$  のベクトル  $a_1, a_2, \dots, a_k$  に対し、

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k$$

の形のベクトルを、 $a_1, a_2, \dots, a_k$  の線型結合と言う。ベクトル  $a_1, a_2, \dots, a_k$  のあいだの関係

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k = \mathbf{0}$$

を線型関係と言う。 $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ 、自明な線型関係。

自明でない線型関係が存在するとき、 $a_1, a_2, \dots, a_k$  は線型従属であると言い、自明でない線型関係が存在しないとき、 $a_1, a_2, \dots, a_k$  は線型独立であると言う。

p8

定義  $V$  を線形空間とし、 $0$  をの元とする。 $B$  が基底であるとは、 $V$  の任意の元に対し、 $B$  の元をみたすベクトルが、ただ 1 つ存在することをいう。

p25

定義  $V$  を線形空間とし、 $0$  をの元とする。 $B$  が基底  $\{ \}$  であるとき、 $B$  は 1 次独立であるという。  
 $B$  の元をみたすベクトルが、ただ 1 つ存在することを線形独立であるともいう。

微分・位相幾何 p7

$V$  を  $k$  個のベクトルの集合としよう。

$V$  をみたすのが、 $0$  の場合に限るとき、 $V$  は線形独立または 1 次独立であるという。

$V$  の任意の元が、 $V$  の元で一意に書かれるならば、 $V$  を  $V$  の基底という。

基底の定義 { P101 } { 30 講 P } { 大学院別 P }

定義 線型空間  $V$  の有限個のベクトル  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  が次の二条件を充すとき、 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  は  $V$  の基底であると言う：

- 1 }  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  は線型独立 { } である；
- 2 }  $V$  の任意のベクトルは、 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  の線型結合 { } として表わされる。



線型結合、線型独立の定義 { P99 } { 30 講 P } { 大学院別 P68 }

C 上の線型空間 V

V のベクトル  $a_1, a_2, \dots, a_k$  に対し、

$$\{c_{1,R} + ic_{1,I}\}a_1 + \{c_{2,R} + ic_{2,I}\}a_2 + \dots + \{c_{k,R} + ic_{k,I}\}a_k$$

の形のベクトルを、 $a_1, a_2, \dots, a_k$  の線型結合と言う。ベクトル  $a_1, a_2, \dots, a_k$  のあいだの関係

$$\{c_{1,R} + ic_{1,I}\}a_1 + \{c_{2,R} + ic_{2,I}\}a_2 + \dots + \{c_{k,R} + ic_{k,I}\}a_k = 0$$

を線型関係と言う。 $c_{1,R} + ic_{1,I} = c_{2,R} + ic_{2,I} = \dots = c_{k,R} + ic_{k,I} = 0 + i0$ 、自明な線型関係。

自明でない線型関係が存在しないとき、 $a_1, a_2, \dots, a_k$  は線型独立であると言う。

{ P99 ~ 100 } { }

[3.1]  $a_1, a_2, \dots, a_k$  が線型従属 { } であるということと、そのうちのある一個が、他の  $k - 1$  個のベクトルの線型結合 { } として表わされるということとは同値である。

証明  $a_1, a_2, \dots, a_k$  が線型従属ならば、自明でない線型関係

$$\{c_{1,R} + ic_{1,I}\}a_1 + \{c_{2,R} + ic_{2,I}\}a_2 + \dots + \{c_{k,R} + ic_{k,I}\}a_k = 0$$

が存在する。 $c_{p,R} + ic_{p,I} \neq 0 + i0$  なる p があるから、

$$a_p = -\frac{c_{1,R} + ic_{1,I}}{c_{p,R} + ic_{p,I}}a_1 - \dots - \frac{c_{p-1,R} + ic_{p-1,I}}{c_{p,R} + ic_{p,I}}a_{p-1} - \frac{c_{p+1,R} + ic_{p+1,I}}{c_{p,R} + ic_{p,I}}a_{p+1} - \dots - \frac{c_{k,R} + ic_{k,I}}{c_{p,R} + ic_{p,I}}a_k$$

となる。

逆に、ある p に対して、

$$a_p = \{b_{1,R} + ib_{1,I}\}a_1 + \dots + \{b_{p-1,R} + ib_{p-1,I}\}a_{p-1} + \{b_{p+1,R} + ib_{p+1,I}\}a_{p+1} + \dots + \{b_{k,R} + ib_{k,I}\}a_k$$

ならば、 $a_1, a_2, \dots, a_p, \dots, a_k$  のあいだの線型関係

$$\{b_{1,R} + ib_{1,I}\}a_1 + \dots + \{b_{p-1,R} + ib_{p-1,I}\}a_{p-1} - a_p + \{b_{p+1,R} + ib_{p+1,I}\}a_{p+1} + \dots + \{b_{k,R} + ib_{k,I}\}a_k = 0^{*1}$$

は自明でない線型関係である。

説明 \*1 30 講 P

この  $a_p$  の係数は 0 でない。



大学院別入試問題と解法 P57

[1]

線形空間  $V$  で、 $\alpha, \beta$  がともに 1 次独立であるならば、  
解  
線形結合として表される。

大学院別入試問題と解法 P48

[1]  $T$  を実ベクトル空間  $V$  の線形変換、 $\alpha$  を、固有値に属する固有ベクトルとする。  
 $\alpha$  は 1 次独立である。