

{ 線型代数学 p114 ~ }

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \in V$ は

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_r \mathbf{a}_r = \mathbf{0}^* \iff c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$$

のとき、一次独立であるという。V に n 個の一次独立なベクトルが存在し、 $(n+1)$ 個以上の一次独立なベクトルは存在しないとき、V は n 次元であるという。V が n 次元であるとき、V に属する n 個の一次独立なベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ をとれば、V の任意のベクトルは

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{a}_1 + \dots + c_n \mathbf{a}_n$$

の形に一意的に表わされる。このような $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ を V の基底という。

線型代数入門

基底は幾通りも存在する。

線型代数学 p114 ~

$a_1, \dots, a_r \in V$ は

$$\sum_{i=1}^r c_i a_i = \mathbf{0}^* \iff c_i = 0 \quad (1ir)$$

のとき、一次独立であるという。V に n 個の一次独立なベクトルが存在し、(n+1) 個以上の一次独立なベクトルは存在しないとき、V は n 次元であるという。V が n 次元であるとき、V に属する n 個の一次独立なベクトル a_1, \dots, a_n をとれば、V の任意のベクトルは

$$x = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$$

の形に一意的に表わされる。このような $\{a_1, \dots, a_n\}$ を V の底という。

{ 線型代数入門 P99 }

K 上の線型空間 V を固定する。

V のベクトル a_1, a_2, \dots, a_k に対し、

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k, \quad c_i K \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

の形のベクトルを、 a_1, a_2, \dots, a_k の線型結合と言う。ベクトル a_1, a_2, \dots, a_k のあいだの関係

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k = \mathbf{0}$$

を線型関係と言う。。それは $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ としたもので、自明な線型関係と呼ばれる。

a_1, a_2, \dots, a_k のあいだに自明でない線型関係が存在するとき、 a_1, a_2, \dots, a_k は線型従属であると言い、自明でない線型関係が存在しないとき、 a_1, a_2, \dots, a_k は線型独立であると言う。

定義 線型空間 V の有限個のベクトル e_1, e_2, \dots, e_n が次の二条件を充すとき、 e_1, e_2, \dots, e_n は V の基底であると言う：

- 1) e_1, e_2, \dots, e_n は線型独立 $\{p\}$ である；
- 2) V の任意のベクトルは、 e_1, e_2, \dots, e_n の線型結合 $\{ \}$ として表わされる。

[3.6] を上のたがいに同型な線形空間とし、をからへの同型写像とする。のベクトルが線型独立 $\{ \}$ ならば、のベクトルも線型独立 $\{ \}$ である。

証明 のあいだに線型関係

があれば、のあいだに同じ係数による線型関係

がある。。

一次独立、底 { 線型代数学 p115 ~ }

$a_1, \dots, a_r \in V$ は

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_r a_r = \mathbf{0}$$

$$\iff c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$$

のとき、一次独立であるという。

V が n 次元であるとき、 V に属する n 個の一次独立 $\{ \}$ なベクトル a_1, \dots, a_n をとれば、 V の任意のベクトル x は

$$x = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$$

の形に一意的に表わされる。このような $\{a_1, \dots, a_n\}$ を V の底という。

線型代数入門 P99

K 上の線型空間 V を固定する。

V のベクトル a_1, a_2, \dots, a_k に対し、

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k$$

の形のベクトルを、 a_1, a_2, \dots, a_k の線型結合と言う。ベクトル a_1, a_2, \dots, a_k のあいだの関係

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k = \mathbf{0}$$

を線型関係と言う。 $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ 、自明な線型関係。

自明でない線型関係が存在するとき、 a_1, a_2, \dots, a_k は線型従属であると言い、自明でない線型関係が存在しないとき、 a_1, a_2, \dots, a_k は線型独立であると言う。

線形代数 p94

ベクトルについて

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_l a_l = \mathbf{0}$$

が成立するのが $c_1 = c_2 = \dots = c_l = 0$ の組に限られる場合には、「線形独立である」という。

V の任意のベクトルが定まった線形独立な n 個のベクトルの線形結合であらわされるとき、 n を V の次元といい

。この個の線型独立なベクトルを基底という。

p8

定義 V を線形空間とし、 0 を V の元とする。 B が V の基底であるとは、 V の任意の元 v に対し、 v を B の元のみで表すベクトルが、ただ 1 つ存在することをいう。

p25

定義 V を線形空間とし、 0 を V の元とする。 B が V の基底 $\{ \}$ であるとき、 B は 1 次独立であるという。
であることを線形独立であるともいう。

微分・位相幾何 p7

B を k 個のベクトルの集合としよう。

B をみたすのが、 0 の場合に限るとき、 B は線形独立または 1 次独立であるという。

B のベクトルは 0 であるとする。 V の任意の元 v が、 B の元で一意に表されるとき、 B を V の基底という。

基底の定義 { P101 } { 30 講 P } { 大学院別 P }

定義 線型空間 V の有限個のベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ が次の二条件を充すとき、 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ は V の基底であると言う：

- 1 } $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ は線型独立 { } である；
- 2 } V の任意のベクトルは、 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ の線型結合 { } として表わされる。

線型結合、線型独立の定義 { P99 } { 30 講 P } { 大学院別 P68 }

C 上の線型空間 V

V のベクトル a_1, a_2, \dots, a_k に対し、

$$\{c_{1,R} + ic_{1,I}\}a_1 + \{c_{2,R} + ic_{2,I}\}a_2 + \dots + \{c_{k,R} + ic_{k,I}\}a_k$$

の形のベクトルを、 a_1, a_2, \dots, a_k の線型結合と言う。ベクトル a_1, a_2, \dots, a_k のあいだの関係

$$\{c_{1,R} + ic_{1,I}\}a_1 + \{c_{2,R} + ic_{2,I}\}a_2 + \dots + \{c_{k,R} + ic_{k,I}\}a_k = 0$$

を線型関係と言う。 $c_{1,R} + ic_{1,I} = c_{2,R} + ic_{2,I} = \dots = c_{k,R} + ic_{k,I} = 0 + i0$ 、自明な線型関係。

自明でない線型関係が存在しないとき、 a_1, a_2, \dots, a_k は線型独立であると言う。

{ P99 ~ 100 } { }

[3.1] a_1, a_2, \dots, a_k が線型従属 { } であるということと、そのうちのある一個が、他の $k-1$ 個のベクトルの線型結合 { } として表わされるということとは同値である。

証明 a_1, a_2, \dots, a_k が線型従属ならば、自明でない線型関係

$$\{c_{1,R} + ic_{1,I}\}a_1 + \{c_{2,R} + ic_{2,I}\}a_2 + \dots + \{c_{k,R} + ic_{k,I}\}a_k = 0$$

が存在する。 $c_{p,R} + ic_{p,I} \neq 0 + i0$ なる p があるから、

$$a_p = -\frac{c_{1,R} + ic_{1,I}}{c_{p,R} + ic_{p,I}}a_1 - \dots - \frac{c_{p-1,R} + ic_{p-1,I}}{c_{p,R} + ic_{p,I}}a_{p-1} - \frac{c_{p+1,R} + ic_{p+1,I}}{c_{p,R} + ic_{p,I}}a_{p+1} - \dots - \frac{c_{k,R} + ic_{k,I}}{c_{p,R} + ic_{p,I}}a_k$$

となる。

逆に、ある p に対して、

$$a_p = \{b_{1,R} + ib_{1,I}\}a_1 + \dots + \{b_{p-1,R} + ib_{p-1,I}\}a_{p-1} + \{b_{p+1,R} + ib_{p+1,I}\}a_{p+1} + \dots + \{b_{k,R} + ib_{k,I}\}a_k$$

ならば、 $a_1, a_2, \dots, a_p, \dots, a_k$ のあいだの線型関係

$$\{b_{1,R} + ib_{1,I}\}a_1 + \dots + \{b_{p-1,R} + ib_{p-1,I}\}a_{p-1} - a_p + \{b_{p+1,R} + ib_{p+1,I}\}a_{p+1} + \dots + \{b_{k,R} + ib_{k,I}\}a_k = 0^{*1}$$

は自明でない線型関係である。

説明 *1 30 講 P

この a_p の係数は 0 でない。

大学院別入試問題と解法 P57

[1]

線形空間 V で、 α, β がともに 1 次独立であるならば、
解
線形結合として表される。

大学院別入試問題と解法 P48

[1] T を実ベクトル空間 V の線形変換、 α を、固有値に属する固有ベクトルとする。
 α は 1 次独立である。