

接続の微分幾何 p92 ~

接ベクトル束  $TM$  に定義された内積を  $g$  と書く。

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

任意の接ベクトル場  $X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 、 $Y = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  に対し

$$g(X, Y) = \sum g_{ij} \xi^i \eta^j$$

であるから

$$g = \sum g_{ij} dx^i dx^j$$

と書く習慣がある。

接続の微分幾何 p103 ~

$M$  は  $n$  次元多様体とする。  $TM$  をその接ベクトル束とする。  $TM$  で定義された内積  $g$  を  $M$  のリーマン計量と呼ぶ。すなわち、各点  $x \in M$  で  $g$  は接空間  $T_x M$  に内積  $\{ \} g_x$  を定義する  $\{ s \}$ 。さらに  $g_x$  は  $x$  に関して微分可能と仮定する。() のように、 $M$  の局所座標系  $x^1, \dots, x^n$  に関して、 $g$  を

$$g = \sum g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{ここで } g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right))$$

と書く。

$M$  の中に曲線  $c$  が

$$x^i = x^i(t), \quad a \leq t \leq b, i = 1, \dots, n$$

で与えられたとき、その接ベクトル ( ) は、 $\sum \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$ 、または、その成分だけ書いてで表わされる。その長さは

$$\left( \sum g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}}$$

だから、曲線  $c$  の長さは

$$L(c) = \int_a^b \left( \sum g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad \{ s \}$$

で与えられる。が常に 1 になるような助変数  $t$  を  $s$  と書く習慣がある。そのような助変数  $s$  を使うと、

$$\sum \left( g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds = ds$$

だから、リーマン計量  $g$  を

$$ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j$$

と書く伝統がある  $\{ \}$

接ベクトル束  $TM$  の標構としてはでなく正規直交基をなす  $e_1, \dots, e_n$  を使う方が便利なが  
多い。そのとき、定義により

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

である。 $e_1, \dots, e_n$  に対して双対基となる  $(\ )$  1 次微分形式  $\theta^1, \dots, \theta^n$  をとれば、

定理 リーマン計量  $g = \sum \theta^i \theta^i$  に対し、1 次微分形式の行列  $\omega = (\omega_j^i)$  で次の性質をもつもの  
がただ一つ存在する。

$$\begin{aligned} () \quad & \omega_j^i = -\omega_i^j \\ () \quad & d\theta^i = -\sum \omega_j^i \wedge \theta^j \end{aligned}$$

証明 求むべき  $\omega_j^i$  を

$$\omega_j^i = \sum c^i_{jk} \theta^k, \quad c^i_{jk} = -c^j_{ik}$$

と書く。ただし、 $c^i_{jk}$  は  $(\ )$  関数である。一方、

$$d\theta^i = \frac{1}{2} \sum a^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k, \quad a^i_{jk} = -a^i_{kj}$$

と書く\*。これを

$$-\sum \omega_j^i \wedge \theta^j = \sum c^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k =$$

と比べて

を得る。。でとを入れかえ、またとを入れかえ、次の二式を得る。

ここを計算し、関係を使って

を得る。これでの存在と一意性が同時に証明された。

$$[g(\sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \xi^i \eta^j]$$

$$[g(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial x^2})]$$

$$[g(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1}) + g(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \eta^2 \frac{\partial}{\partial x^2}) + g(\xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1}) + g(\xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \eta^2 \frac{\partial}{\partial x^2})]$$

$$[g(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}) \xi^1 \eta^1 + g(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}) \xi^1 \eta^2 + g(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}) \xi^2 \eta^1 + g(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2}) \xi^2 \eta^2]$$

多様体 p39

微積分学において学んだように平面における滑らかな曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} dt$$

で与えられる。

、被積分関数は接ベクトルの長さであると解釈される。

リーマン多様体において滑らかな曲線があるとき、その上の点の間の曲線の長さを

$$= \int_a^b \sqrt{g_{x(t)}(x'(t), x'(t))} dt$$

によって定義する。ここにはにおけるの接ベクトルを示す。

$$= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

例

相対論きき p114

2 点  $(x, y)$  と  $(x + dx, y + dy)$  の間の距離の 2 乗は、ピタゴラスの定理より

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = [dx, dy] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

次に平面を、極座標

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

で表わしてみよう。2 点  $(r, \theta)$  と  $(r + dr, \theta + d\theta)$  は、 $r$  方向には  $dr$ 、 $\theta$  方向には  $r d\theta$  程度ずれている。方向と方向は直交しているから、も微小ならばピタゴラスの定理を使うことはできて、

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 = (dr, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

一般の座標系をとすれば、もも

$$(ds)^2 = [dx^1, dx^2] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{bmatrix} = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

という形に書ける。

\*1

$$\begin{aligned} & [= g_{11} dx^1 dx^1 + g_{21} dx^2 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} dx^2 dx^2] \\ & [g \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right) dx dx + + + g \left( \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right) dy dy = (dx)^2 + (dy)^2] \\ & [g \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) dr dr + + + g \left( \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) d\theta d\theta = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2] \end{aligned}$$

p115

半径  $a$  の球面を考える。。この球面上の各点を、角度  $\theta$  と  $\varphi$  を使って図のように表わす。

微小にずれた 2 点との間の距離を考えよう。 $\varphi$  を一定にしたまま  $\theta$  が  $d\theta$  だけ増せば、球面上の点は  $a d\theta$  だけ動く。また  $\varphi$  のほうだけ動かせば、点は  $a \sin \theta d\varphi$  だけ動く。この 2 つの方向は直交しているので、移動が微小ならばピタゴラスの定理を使うことができ、

$$(ds)^2 = a^2 (d\theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$$

となる。したがって計量テンソルは

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

球面は曲面だから、どのような座標系を使っても計量テンソルはユークリッド計量にはならない。

理論 p202

$V^\mu(x + \Delta x)$  から  $V^\mu(x)$  を引くには  $V^\mu(x)$  を  $x + \Delta x$  へ変化させずに移動してその違いを計算しなければならない。ベクトル  $V|_x$  を  $x + \Delta x$  へ平行移動したものを  $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$  で表す。ここで成分  $\tilde{V}^\mu$  は条件

を満たすことを要請する。これらの条件は

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x) \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) \Delta x^\nu \quad (7.9)$$

と選べば満たされる。 $V$  の  $x^\nu$  に関する共変微分は

$$\lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

で定義される。平行移動の方法は数多くあり、 $\Gamma$  を選ぶごとに平行移動の規則が 1 つ決まる。

例直交座標系  $(x, y)$  において  $\tilde{V}^\mu(x + \Delta x, y + \Delta y) = V^\mu(x, y)$  が任意の  $\Delta x, \Delta y$  について成り立つので  $\Gamma$  の成分はすべてゼロとなる。次に極座標  $(r, \phi)$  を選ぶ。 $(r, \phi) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi)$  を埋め込みと考えると、

$V = V^r \partial / \partial r + V^\phi \partial / \partial \phi$  を  $(r, \phi)$  におけるベクトル場とする。このベクトルを  $(r + \Delta r, \phi)$  に平行移動すると、新しいベクトル  $\tilde{V} = \tilde{V}^r \partial / \partial r|_{(r+\Delta r, \phi)} + \tilde{V}^\phi \partial / \partial \phi|_{(r+\Delta r, \phi)}$  を得る。 $V^r = V \cos \theta, V^\phi = V(\sin \theta / r)$  に注意せよ。但し  $V =$  で、 $\theta$  は  $V$  と  $\partial / \partial r$  の間の角度である<sup>\*1</sup>。このとき  $\tilde{V}^r = V^r$  と

$$\tilde{V}^\phi = \frac{r}{r + \Delta r} V^\phi \simeq V^\phi - \frac{\Delta r}{r} V^\phi$$

を得る。これらの成分を (7.9) と比べて容易に

$$\Gamma^r_{rr} = 0 \quad \Gamma^r_{r\phi} = 0 \quad \Gamma^\phi_{rr} = 0 \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}$$

が求まる<sup>\*2</sup>。同様に  $V$  を  $(r, \phi + \Delta \phi)$  に平行移動すると

$$\tilde{V} = \tilde{V}^r \frac{\partial}{\partial r} \Big| + \tilde{V}^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|$$

となる。ここで

$$\tilde{V}^r = V \cos(\theta - \Delta \phi) \simeq$$

および

である。これから

$$\Gamma^r_{\phi r} = \Gamma^r_{\phi\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \Gamma^\phi_{\phi\phi} =$$

\*2

$$\begin{aligned}
V &= V^r \frac{\partial}{\partial r} + V^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} = V \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + V \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \\
\tilde{V} &= \tilde{V}^r \frac{\partial}{\partial r} \big|_{(r+\Delta r, \phi)} + \tilde{V}^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \big|_{(r+\Delta r, \phi)} = V \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \big|_{(r+\Delta r, \phi)} + V \frac{\sin \theta}{r + \Delta r} \frac{\partial}{\partial \phi} \big|_{(r+\Delta r, \phi)} \\
&= V^r \frac{\partial}{\partial r} \big|_{(r+\Delta r, \phi)} + \left\{ V^\phi - \frac{\Delta r}{r} V^\phi \right\} \frac{\partial}{\partial \phi} \big|_{(r+\Delta r, \phi)} \\
\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{V^r(r + \Delta r, \phi) - \tilde{V}^r(r + \Delta r, \phi)}{\Delta r} \frac{\partial}{\partial r} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{V^r(r + \Delta r, \phi) - \{V^r(r, \phi) - V^\lambda(r, \phi) \Gamma^r_{r\lambda}(r, \phi) \Delta r\}}{\Delta r} \frac{\partial}{\partial r} \\
&= \left( \frac{\partial V^r}{\partial r} + V^\lambda \Gamma^r_{r\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial r} \\
\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{V^\phi(r + \Delta r, \phi) - \tilde{V}^\phi(r + \Delta r, \phi)}{\Delta r} \frac{\partial}{\partial \phi} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{V^\phi(r + \Delta r, \phi) - \{V^\phi(r, \phi) - V^\lambda(r, \phi) \Gamma^\phi_{r\lambda}(r, \phi) \Delta r\}}{\Delta r} \frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= \left( \frac{\partial V^\phi}{\partial r} + V^\lambda \Gamma^\phi_{r\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

$$*1 \quad \Delta x' = \Delta r, \Delta y' = r\Delta\phi, \tilde{V}^\phi = V(\sin\theta/r + \Delta r)$$

\*2

$$[\tilde{V}^\phi(x + \Delta x) = V^\phi(x) - V^\phi(x)\Gamma_{r\phi}^\phi(x)\Delta x^r]$$

$$[\tilde{V}^\phi(r + \Delta r, \phi) = V^\phi(r, \phi) - V^\phi(r, \phi)\Gamma_{r\phi}^\phi(r, \phi)\Delta r]$$

相対論きき p120

$$I = \int_l ds [= \int_l \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}] = \int_l \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} ds$$

$$[\int_a^b \sqrt{g(\sum \frac{dx^i}{ds} \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum \frac{dx^i}{ds} \frac{\partial}{\partial x^i})} ds]$$

### 7.3.1 {p209}

$$= dx^\lambda, T(e_\mu, e_\nu) = dx^\lambda, \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu$$

### 7.3.2 {p210}

、 $X = \varepsilon^\mu e_\mu$  と  $Y = \delta^\mu e_\mu$  を  $T_p M$  の無限小ベクトルとする。これらのベクトルを微小な移動と見なすと、それらは  $p$  の近くに 2 つの点  $q$  と  $s$  を定める。ベクトル  $X$  を直線  $ps$  に沿って平行移動すると、その成分が  $\varepsilon^\mu - \varepsilon^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \delta^\nu$  であるベクトル  $sr_1$  を得る。 $p$  と  $r_1$  を結ぶ位置ベクトルは

$$pr_1 = ps + sr_1 = \delta^\mu + \varepsilon^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \varepsilon^\lambda \delta^\nu$$

である。同様に  $\delta^\mu$  を  $pq$  に沿って平行移動すると、ベクトル

$$pr_2 = pq + qr_2 = \varepsilon^\mu + \delta^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \varepsilon^\lambda \delta^\nu$$

となる。

$$r_2 r_1 = pr_2 - pr_1 = (\Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}) \varepsilon^\lambda \delta^\nu = T^\mu_{\nu\lambda} \varepsilon^\lambda \delta^\nu$$

となる。従って捩率テンソルは無限小変位ベクトルおよびそれらの平行移動によりできる図形の、平行四辺形から欠けた部分を測る。

、M を n 次元部分多様体とする。

$g$  を部分多様体 M のあるいはリーマン計量と呼ぶ。

$$\times g = \sum g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) dx^i dx^j = \sum g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} ds ds$$

$$\left(g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}\right) ds ds$$

$$\left(g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}\right) \frac{dx^i}{ds} \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{dx^j}{ds} \frac{\partial s}{\partial x^j}$$

$$[g\left(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + \eta^n \frac{\partial}{\partial x^n}\right) =]$$

多様体 p133

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{g_{x(t)}(x'(t), x'(t))} dt \quad (1)$$

$$g_{ij}(x) = g_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x\right) \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

$$x'(t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x(t)}$$

である。ゆえに (1) はつぎの形に書ける。

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$



リーマン幾何学 p32

$m$  次元多様体  $M$  の各点  $p$  での接空間  $T_p M$  に内積  $g_p$  が与えられ、級ベクトル場に対して上の関数が級であるとき、 $M$  に  $C^r$  級リーマン計量  $g$  が与えられたといい、

リーマン計量  $g$  を  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$  と表わすこともある。

リーマン幾何学 p35

級曲線の長さを

$$L(c) =$$

で、

7.8.1

ここでは  $\{ \}$  が直交系であることを要請する；

$$g(e, e) =$$

を使って計量を表すと

$$g =$$

となる。

Mirrorp12

$$= r^2, =, = r^2 \sin^2$$

相対性理論 p65

計量テンソル

内積、リーマン計量、リーマン多様体 { 多様体の基礎 p274 ~ }

定義 19  $V$  を  $\mathbb{R}$  上の  $m$  次元ベクトル空間とする。 $V$  上の  $k$  次形式  $\omega$  が対称  $k$  次形式であるとは、 $X_1, X_2, \dots, X_k \in V$  の間にどのような置換を施しても、 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$  の値が変わらないことである。

定義を、置換群の言葉で表現すれば、次のようになる： $V$  上の  $k$  次形式  $\omega$  が対称  $k$  次形式であるとは、 $\forall X_1, X_2, \dots, X_k \in V$  と、 $\forall \sigma \in S_k$  について、 $\omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$  がなりたつことである。

{ 定義 級多様体  $M$  上のテンソル場  $\omega =$  が  $k$  次対称テンソル場であるとは、 $M$  の各点  $p$  において、 $\omega_p$  が  $T_p(M)$  上の対称  $k$  次形式  $\omega_p$  になっていることである。 }

{ ベクトル空間  $V$  上の対称 2 次形式  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  の大切な例に、 $V$  の内積がある。これは、 $V$  上の対称 2 次形式  $\omega$  であって、更に次の意味で正定値なものである。すなわち、 $V$  の任意の 0 でないベクトル  $X$  について、 $\omega(X, X) > 0$  がなりたつようなものである。 }

{ たとえば、次元数ベクトル空間  $\mathbb{R}^m$  の場合、 $X = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 、 $Y = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  に対し、

$$\omega(X, Y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$$

とおけば、 }

{ 定義 19 級多様体  $M$  上の 2 次の対称テンソル場  $\omega$  が、 $M$  の各点  $p$  において正定値であるとき  $\omega$  を  $M$  上のリーマン計量という。

つまり、 $M$  の各点  $p$  の接ベクトル空間  $T_p(M)$  に内積  $\omega_p$  を与えるようなものがリーマン計量  $\omega$  である。通常、リーマン計量は  $g$  という記号で表わされる。リーマン計量  $g$  がひとつ与えられた多様体  $(M, g)$  のことをリーマン多様体 とよぶ。

{ 接ベクトル  $X \in T_p(M)$  の長さ  $\|X\|$  が

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)} \quad (\geq 0)$$

$$[ = \sqrt{g\left(\xi^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \xi^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p + \dots + \xi^m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p, \xi^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \xi^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p + \dots + \xi^m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right)} ]$$

という式で定義できる。曲線  $c$  の長さが

$$\int_c^d \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt = \int_c^d \sqrt{g\left(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right)} dt$$

という式で、定義できるのである。 }

半径  $a$  の球面を考える。

微小にずれた 2 点との間の距離を考えよう。を一定にしたまま  $\theta$  が  $d\theta$  だけ増せば、球面上の点は  $ad\theta$  だけ動く。また  $\varphi$  のほうだけ動かせば、点は  $a\sin\theta d\varphi$  だけ動く。この 2 つの方向は直交しているので、移動が微小ならばピタゴラスの定理を使うことができ、

$$(ds)^2 = a^2(d\theta)^2 + a^2\sin^2\theta(d\varphi)^2 = [d\theta, d\varphi] \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{bmatrix}$$

となる。したがって計量テンソルは

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

例

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = [dx, dy] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$(ds)^2 = [dx^1, dx^2] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{bmatrix} = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

$$[= g_{11}dx^1dx^1 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}dx^2dx^2]$$

$$I = \int_l ds = \int_l \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j} = \int_l \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} ds$$

計量テンソル

p115

$$(ds)^2 = a^2(d\theta)^2 + a^2\sin^2\theta(d\varphi)^2$$



p270

定義 19  $V$  を  $R$  上の  $m$  次元ベクトル空間とする。 $V$  上の  $k$  次形式 (正確には、 $k$  次の多重線型形式) とは、 $V$  の  $k$  個の直積から  $R$  への写像

$$\omega : V \times V \times \cdots \times V \rightarrow R$$

であって、 $\{\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$  が各  $X_i$  に関して線型であるようなものを言う。

たとえば、 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$  が第 1 の変数  $X_1$  に関して線型であるというのは、任意の  $X, Y \in V$  と任意の実数  $a, b \in R$  について、

$$\omega(aX + bY, X_2, \dots, X_k) = a\omega(X, X_2, \dots, X_k) + b\omega(Y, X_2, \dots, X_k)$$

がなりたつことである。

{  $V$  上の  $k$  個の 1 次形式を任意にとる。このとき、

という記号で表わされる  $V$  上の  $k$  次形式が、次の式で定義できる。

$$(\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \cdots \otimes \eta_k)(X_1, X_2, \dots, X_k) = \eta_1(X_1)\eta_2(X_2)\cdots\eta_k(X_k)$$

$\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \cdots \otimes \eta_k$  を  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$  のテンソル積とよぶ。}

多様体入門 p11

との直積集合からへの写像が条件

$$(a + b, a') = (a, a') + (b, a')$$

$$(a, a' + b') = (a, a') + (a, b')$$

$$()()()$$

をみたすとき、を上の双一次形式とよぶ。

さてを  $V$  上の  $(\ )$  双一次形式とする。任意のにたいして、

$$\alpha(a, b) = \alpha(b, a)$$

がなりたつとき、を  $V$  上の対称双一次形式とよ

$V$  上の正則な対称双一次形式のことをの内積とよぶ。すなわち

$V$  上の対称双一次形式が

$$\alpha(x, x) > 0 \quad x \in V, x \neq 0$$

をみたすとき、をの正値内積とよぶ。

多様体入門 p41

$M$  の各点  $p$  における接ベクトル空間  $T_p(M)$  に正値な内積  $g_p(u, v) (u, v \in T_p(M))$  が与えられているとする。  $g_{ij}(q) = g_q((\frac{\partial}{\partial x^i})_q, (\frac{\partial}{\partial x^j})_q)$

$g_{ij}$  がすべて  $M$  の各点の近傍で  $C^r$  級であるとき、 $M$  の各点  $p$  に  $T_p(M)$  の正値な内積  $g_p$  を対応させる対応  $g : p \mapsto g_p$  を  $M$  の  $C^r$  級リーマン計量とよび、リーマン計量が与えられたとき、における接ベクトル  $v$  の長さ  $\|v\|$  を

$$\|v\|^2 = g_p(v, v)$$

により定義する。

リーマン計量  $g$  をそなえた多様体のことをリーマン多様体とよぶ。

を开区間で定義された可積分曲線、のにおける接ベクトルをとするとはの連続関数である。とするとき、

$$= \int_c^d \|v_t\| dt$$

をとの間の長さという。

幾何学 p144

一般の実線形空間に対しが2次形式とは、 $B$  に対し、という双1次形式  $B : V \times V \rightarrow R$  があることである。さらに2次形式が正値であるとは  $q(v) \geq 0$  ならば  $q(v) = 0$  を満たすことである。上の双1次形式は、対称性  $B(u, v) = B(v, u)$  を満たす。

この  $g$  をリーマン計量と呼ぶ。

$x$  のまわりの座標近傍  $(U, )$  により、に対し  $T_x M$  の基底  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  が同時に定まる。そのような基底について、は  $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  と書かれ、 $= g(v, v) = g_{ij}(x) v_i v_j$  と書かれる。

このようなリーマン計量を持つ多様体をリーマン多様体と呼ぶ。

定義 7.2.1 リーマン計量と呼ぶことが多い。

## 2.2.4 { 幾何学 p43 }

内積

## 7.1.1 { 幾何学 p199 }

定義  $M$  を微分多様体とする。 $M$  上の Riemann 計量  $g$  とは、各点  $p \in M$  で次の公理

$$g_p(U, V) = g_p(V, U)$$

$g_p(U, U) \geq 0$ 、ただし等式は  $U=0$  のときのみ成り立つ

を満たす  $M$  上の型テンソルである。ここで  $U, V \in T_p M$  である。手短かにいえばは正定値な対称双 1 次形式である。

計量  $g$  が存在する場合は、2 つのベクトル  $U, V \in T_p M$  の内積を  $g_p(U, V)$  によって定義する。 $g_p$  は写像  $T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  なので、線形写像  $g_p(U, \cdot) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  を  $V \mapsto g_p(U, V)$  によって定義することができる。

微分多様体  $M$  が Riemann 計量  $g$  をもつとき、対  $(M, g)$  を Riemann 多様体とよぶ。

記号

点  $p$  における  $M$  の接ベクトルとは

$$v = a_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + a_2 \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p + \cdots + a_m \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p \quad (\text{本 8.14})$$

$$v = \sum_{i=1}^n \xi^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \quad (\text{島})$$

接ベクトル  $X$

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)} \quad (\geq 0)$$

$$[ = \sqrt{g \left( \xi^1 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \xi^2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p + \cdots + \xi^m \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p, \xi^1 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \xi^2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p + \cdots + \xi^m \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p \right) } ]$$

多様体の基礎 p

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (\text{松本 16.14})$$

$$X = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^m \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$[g(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \eta^m \frac{\partial}{\partial x^m})]$$

微分形式の幾何学 p40

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

曲線と曲面の微分幾何 p97

$$\{\xi + \eta\}_{(u,v)=(a,b)}$$

$$\left( \xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v} \right)_{(u,v)=(a,b)}$$

という微分作用そのものを接ベクトルと考えることにする。

領域  $D$  の各点に 1 つずつ接ベクトルをつけたとき、それを  $D$  上の接ベクトル場と呼ぶ。



いま、 $M$  の各点  $x$  に対し、接空間に、内積が与えられているとする。  
 局所座標近傍上での基底  
 を考え、各点に対して

$$=$$

とおく。

定義 各点  $x$  に対し  $T(M)_x$  に与えられた内積  $(\cdot, \cdot)_x$  が、次の条件 (R) をみたすとき、 $M$  にリーマン計量が与えられたという：

(R) 各

p11

を上のベクトル空間とする。との直積集合からへの写像が条件  
 をみたすとき、を上の双一次形式とよぶ。

p12

を  $V$  上の  $(\cdot, \cdot)$  双一次形式とする。任意の  $v, w$  に対して、

$$(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)$$

がなりたつとき、を  $V$  上の対称双一次形式と

$V$  上の正則な対称双一次形式のことを  $V$  の内積とよぶ。すなわち、

の二条件をみたす場合をいう。 $V$  上の対称双一次形式が

をみたすとき、を  $V$  の正値内積とよぶ。

p153

座標基底  $\{e_i\} = \{\partial/\partial x^i\}$  を選ぶ。この基底で  $\omega$  の成分は

$$\omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}) = \omega_{i_1 i_2 \dots i_r}$$

$$[\omega(\partial/\partial x^{i_1}, \partial/\partial x^{i_2}, \dots, \partial/\partial x^{i_r}) = \omega_{i_1 i_2 \dots i_r}]$$

である。















