

共変微分 { 接続の微分幾何 p36 ~ }

、 M は n 次元多様体、 E はファイバーが R^r の M 上のベクトル束 { p2 } とする { }。 E の切断 { p4 } の全体を $\Gamma(E)$ と書く。 M 上の () 関数の全体を $A^0(M)$ と書くことにした。 関数 $f \in A^0(M)$ と切断 $\xi \in \Gamma(E)$ の積はまた切断 $f\xi \in \Gamma(E)$ である。

(一般に $A^p(M)$ は M 上の p 次微分形式のつくるベクトル空間と定義した)。

、 E の共変微分作用素あるいは単に共変微分とは、線形写像 { }

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

で Leibniz の公式

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f \cdot \nabla\xi, \quad f \in A^0(M), \xi \in \Gamma(E)$$

を満たすものであると定義する *1。 $\Gamma(T^*M \otimes E)$ の元を E に値をもつ 1 次微分形式と呼んだりする。 接ベクトル { } $X \in T_x M$ に対し $\nabla\xi$ の値 $\nabla\xi(X)$ は E_x の元である *。

$$\nabla\xi(X) = \nabla_X \xi$$

とも書き *、 $\nabla_X \xi$ を ξ の X 方向の 共変微分 と呼ぶ { s }。 したがって各 $X \in T_x M$ に対し

$$\nabla_X : \Gamma(E) \longrightarrow E_x$$

は線形写像で

$$\nabla_X(f\xi) = (Xf) \cdot \xi + f \cdot \nabla_X \xi, \quad f \in A^0(M), \xi \in \Gamma(E) \quad \{ sn \}$$

を満たし *3、また ∇_X は X に関しても線形である。

共変微分を接続とも呼ぶ。

ベクトル束 E は局所的には直積だから、局所的には一次独立 { s } な切断 e_1, \dots, e_r が存在する。 そのような (e_1, \dots, e_r) を E の局所標構場と呼ぶ。 E の任意の切断 ξ は局所的には、

$$\xi = \sum \xi^\lambda e_\lambda$$

と一意的に書ける *4。 ∇ を E の共変微分とすると、 $\nabla e_\lambda \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ は e_1, \dots, e_r の一次結合として書けるから

$$\nabla e_\lambda = \sum \omega_\lambda^\mu e_\mu$$

とおく。ここで、 ω_λ^μ は (局所的に定義された) 1 次微分形式である *5。 (1.2) により

$$\nabla\xi = \sum \{ d\xi^\lambda + \sum \omega_\mu^\lambda \xi^\mu \} e_\lambda \quad (1.9)$$

となる *。 $\omega = (\omega_\lambda^\mu)$ を ∇ の接続形式と呼ぶ。

次に局所標構場 { } を (e_1, \dots, e_r) から (e'_1, \dots, e'_r) に変えたとき、

$$e'_\lambda = \sum a_\lambda^\mu e_\mu \quad (1.10)$$

とおく。次に

$$\nabla e'_\lambda = \sum \omega'_\lambda{}^\mu e'_\mu$$

により、1 次微分形式の行列 $\omega' = (\omega'_\lambda{}^\mu)$ を定義する。これに (1.10) を代入し、(1.9) を使えば

$$\sum \omega_\mu{}^\lambda a_\nu{}^\mu + da_\nu{}^\lambda = \sum a_\mu{}^\lambda \omega'_\nu{}^\mu \quad (1.12)$$

を得る。、(1.12) は

$$\omega a + da = a \omega'$$

すなわち、

$$\omega' = a^{-1} \omega a + a^{-1} da$$

となる。

[解説](#)

*3

$$[\nabla(f\xi)](X) = df(X) \otimes \xi + f \cdot \nabla \xi(X)$$

*4

$$[[\nabla_X(f\xi)] = \left\{ \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right\} \cdot \sum_{\lambda=1}^r \xi^\lambda e_\lambda + f \cdot \nabla \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \sum_{\lambda=1}^r \xi^\lambda e_\lambda \right\}]$$

*5 *1

$$\nabla \xi = \sum \alpha^\lambda e_\lambda$$

$$\nabla_X \xi = \sum \alpha^\lambda(X) e_\lambda$$

$$\xi = \sum \xi^\lambda e_\lambda$$

$$\nabla \xi() = \sum \alpha^\lambda() e_\lambda$$

$$\nabla_X \xi = \sum \alpha^\lambda(X) e_\lambda$$

$$\nabla e_\lambda() = \sum \omega_\lambda{}^\mu() e_\mu$$

$$\nabla_X \xi = \sum \alpha^\lambda \left(\sum a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) e_\lambda$$

*1

$$\begin{aligned} [&= df \otimes \sum_{\lambda=1}^r \xi^\lambda e_\lambda + f \cdot \nabla \sum_{\lambda=1}^r \xi^\lambda e_\lambda] \\ \nabla \xi &= \sum \alpha^\lambda e_\lambda \end{aligned}$$

*2

$$\nabla_X \xi = \sum \alpha^\lambda(X) e_\lambda$$

*3 p2、*4

$$[= \left\{ \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right\} \cdot \sum_{\lambda=1}^r \xi^\lambda e_\lambda + f \cdot \nabla \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \sum_{\lambda=1}^r \xi^\lambda e_\lambda \right\}]$$

線形写像だから書ける。×

$$\begin{aligned} e_1 &= 1e_1 + +0e_r \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \times \nabla e_1 &\longrightarrow \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^r & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^1 \\ \vdots \\ \omega_1^r \end{bmatrix} \longleftarrow \omega_1^1 e_1 + +\omega_1^r e_r \\ [\nabla e_\lambda() &= \sum \omega_\lambda^\mu() e_\mu] \end{aligned}$$

$$[\nabla(f\xi)(X) = df(X) \otimes \xi + f \cdot \nabla \xi(X)]$$

$$[\nabla(f\xi)() = df() \otimes \xi + f \cdot \nabla \xi()]$$

例

の開集合において二つのベクトル場 X, Y があるとき、 Y の X による共変微分と呼ぶところのやはり上のベクトル場 $\nabla_X Y$ をつぎのように定義する。

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とするとき

$$\nabla_X Y = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^j \eta^k \Gamma_{j \ k}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

。

$$[\nabla_X(fY) = \xi^j \frac{\partial f \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_{j \ k}^i \xi^j f \eta^k \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^j f \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_{j \ k}^i \xi^j f \eta^k \frac{\partial}{\partial x^i} = (Xf)Y + f \nabla_X Y]$$

リーマン幾何学 p26

$\tau: E \rightarrow M$ をベクトル束、 (E) を E の断面のつくる加群とする。 M のベクトル場 $X \in$ と E の断面に対してが対応し次の条件

$$\nabla_{fX+gY}\xi = f\nabla_X\xi + g\nabla_Y\xi$$

$$\nabla_X(\xi+\eta) = \nabla_X\xi + \nabla_X\eta$$

$$\nabla_X(f\xi) = (Xf)\xi + f\nabla_X\xi, \quad \xi \in (E), f \in$$

をみたすとき、 E に線形接続が与えられたといひ、 $\nabla_X\xi$ を ξ の X による共変微分という。 $(\nabla_X\xi)(p) = \sum X^i(p)(\nabla_{\partial/\partial x^i}\xi)(p)$

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

これを捩率テンソルという。

理論 p202

からを引くにはをへ変化させずに移動してその違いを計算しなければならない。このベクトルの移動を平行移動とよぶ。ベクトル $V|_x$ を $x + \Delta x$ へ平行移動したものを $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$ で表す。ここで成分は条件

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) \propto \Delta x$$

$$=$$

を満たすことを要請する。これらの条件は

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x)\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(x)\Delta x^\nu \quad (7.9)$$

と選べば満たされる。 V の x^ν に関する共変微分は

$$\lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

で定義される。平行移動の方法は数多くあり、 Γ を選ぶごとに平行移動の規則が 1 つ決まる。

理論 p204

アファイン接続 ∇ とは、写像 : で次の条件を満たすものである :

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$$

ここで f および X, Y, Z である。

M 上で、座標 $x =$ をもつチャート $(,)$ を選び m^3 個の接続係数と呼ばれる関数を

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$$

で定義する。ここで $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ は $T_p M$ の座標基底である。接続係数は基底ベクトルが点から点へいかに変化するかを指定するものである。 $V = V^\mu e_\mu$ と $W = W^\nu e_\nu$ をの元とする。このとき

$$\begin{aligned}\nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu [W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) e_\lambda \\ &= \left[V^\mu \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} e_\lambda + V^\mu W^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e_\lambda \right]\end{aligned}$$

となる。

多様体 p153

M を n 次元多様体としてそこに一つの線形接続が与えられているとする。 M の開集合 O において二つのベクトル場 X, Y があるとき、 Y の X による共変微分と呼ぶところのやはり O の上のベクトル場 $\nabla_X Y$ をつぎのように定義する。 O に含まれる局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ において、線形接続の成分を $\{\Gamma_j^i{}^k\}$ とし U において、

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とするとき

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

で、ここに

$$\zeta^i = \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_j^i{}^k \xi^j \eta^k$$

とする。

$$= \sum_{h=1}^n \frac{\partial x^h}{\partial y^i} \nabla_{X_h} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial x^l}{\partial y^j} X_l \right)$$

$$\xi = \xi^1 e_1 + \dots + \xi^r e_r \longrightarrow \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^r \end{bmatrix}$$

$$\nabla \xi \longrightarrow \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^r & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^1 \xi^1 + \dots + \omega_r^1 \xi^r \\ \vdots \\ \omega_1^r \xi^1 + \dots + \omega_r^r \xi^r \end{bmatrix} \longleftarrow \{\omega_1^1 \xi^1 + \dots + \omega_r^1 \xi^r\} e_1 + \dots + \{\omega_1^r \xi^1 + \dots + \omega_r^r \xi^r\} e_r$$

$$X = 1 \frac{\partial}{\partial x^1} + 0 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$\nabla_X Y = 1 \frac{\partial \eta^1}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + 1 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$\nabla e_\lambda = \sum \omega_\lambda{}^\mu e_\mu$$

$$[\mathbf{x} \cdot \nabla] \xi = \sum \{d\xi^\lambda + \sum \omega_\mu{}^\lambda \xi^\mu\} e_\lambda = \begin{bmatrix} d\xi^1 + \sum \omega_\mu{}^1 \xi^\mu & \cdots & d\xi^r + \sum \omega_\mu{}^r \xi^\mu \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_r \end{bmatrix}$$

$$[? \cdot \nabla] \begin{bmatrix} \nabla e_1 \\ \vdots \\ \nabla e_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_r^1 & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_r \end{bmatrix}$$

1.4.2

$$D(fs) = (df) \otimes s + f \cdot Ds$$

相对性理論 p79

共变微分

記号

接続 p2

、 $X \in T_p M$ を

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$df(X) = X(f) \quad (\text{接続 2.6})$$

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f \cdot \nabla \xi, \quad f \in A^0(M), \xi \in \Gamma(E) \quad (\text{接続 1.2})$$

$$\nabla \xi(X) = \nabla_X \xi \quad (\text{接続 1.3})$$

$$\nabla_X(f\xi) = (Xf) \cdot \xi + f \cdot \nabla_X \xi, \quad f \in A^0(M), \xi \in \Gamma(E) \quad (\text{接続 1.5})$$

$$\xi = \sum \xi^\lambda e_\lambda \quad (\text{接続 1.7})$$

$$[\nabla_X(f\xi) = (Xf) \cdot \sum \xi^\lambda e_\lambda + f \cdot \nabla_X \sum \xi^\lambda e_\lambda]$$

$$[\nabla_X(f\xi) = (\sum a^j \frac{\partial f}{\partial x^j}) \cdot \sum \xi^\lambda e_\lambda + f \cdot \nabla \sum a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \sum \xi^\lambda e_\lambda]$$

$$[\nabla_X(f\xi) = (\sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial f}{\partial x^j}) \cdot \sum_{\lambda=1}^r \xi^\lambda e_\lambda + f \cdot \nabla \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \sum_{\lambda=1}^r \xi^\lambda e_\lambda]$$

$$[\nabla(f \sum \eta^i e_i) \left(\sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = df \left(\sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \otimes \sum \eta^i e_i + f \cdot \nabla \sum \eta^i e_i \left(\sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right)]$$

ベクトル場 $X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 、 $Y = \sum \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ に対しと (9.19) を使って $\nabla_X Y$ を計算すると { 酒 }

$$\nabla_X Y = \sum \xi^j \nabla_j \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{ただし、} \nabla_j \eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma_{jk}^i \eta^k \quad (\text{接続 9.20})$$

$$[\nabla_X Y = \sum \xi^j \{ \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma_{jk}^i \eta^k \} \frac{\partial}{\partial x^i}]$$

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とすると

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{村上 1})$$

$$= \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \xi^j \eta^k \quad (\text{村上 2})$$

$$\nabla_X Y = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^j \eta^k \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

。

$$[\nabla_X(fY) = \xi^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial \eta^i}{\partial x^i} + \Gamma_{jk}^i \xi^j f \eta^k \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^j f \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \eta^k f \frac{\partial}{\partial x^i} = (Xf)Y + f \nabla_X Y]$$

多様体 p140

定義 n 次元可微分多様体 M の各局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ ごとに、 U 上の n^3 個の C^∞ 関数の組 $\{\Gamma_{j\ k}^i; 1 \leq i, j, k \leq n\}$ が与えられつぎの条件がみたされるとき、 M に線形接続 (またはアファイン接続) が与えられたといい、 $\{\Gamma_{j\ k}^i\}$ をこの線形接続の $(U; x^1, \dots, x^n)$ における成分という。いま、 $\{\Gamma_{j\ k}^i\}$ 、 $\{\Lambda_{j\ k}^i\}$ をそれぞれ局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ 、 $(V; y^1, \dots, y^n)$ における成分とし $U \cap V \neq \emptyset$ とすれば、 $U \cap V$ においては

$$\Lambda_{j\ k}^i = \sum_{p,q,r=1}^n \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial x^q}{\partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^r} \Gamma_{p\ q}^r + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^j \partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^l}$$

がなりたつ。

測地線

曲線 C に沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ とは曲線上の各点 $x(t)$ において M への接ベクトル $Y(t)$ が与えられ、しかも M の $U \cap C \neq \emptyset$ なる局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ では表示

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n \eta^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x(t)}$$

の係数 $\eta^i(t) (1 \leq i \leq n)$ はいずれも t の C^∞ 関数であるものとする。

補題 1. 曲線 $C = \{x(t)\}$ に沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ に対して、 C に沿ったベクトル場 $\{\nabla_{x'} Y(t)\}$ がつぎの条件によって () 一意的に定義される。、 $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ 、 $Y(t) = (\eta^1(t), \dots, \eta^n(t))$ とするとき、 $\nabla_{x'} Y(t)$ は U において () の左辺を成分とするベクトル場である。すなわち

$$\nabla_{x'} Y(t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\eta^i}{dt} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j\ k}^i(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \eta^k(t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x(t)}$$

曲線 $C = \{x(t)\}$ とそれに沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ に対して同じく C に沿った補題 1 のベクトル場 $\{\nabla_{x'} Y(t)\}$ を $\{Y(t)\}$ の共変微分という。

定理 が存在して、。

この状況において、の点におけるへの接ベクトルををに沿って平行移動して得られる接ベクトルという。

多様体 p161

$$T(X, Y) =$$

多様体 p153

M を n 次元多様体としてそこに一つの線形接続が与えられているとする。M の開集合 O において二つのベクトル場 X, Y があるとき、{ Y の X による共変微分と呼ぶところのやはり O の上のベクトル場 $\nabla_X Y$ をつぎのように定義する。} O に含まれる局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ において、線形接続の成分を $\{\Gamma_{j\ k}^i\}$ とし U において、

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \{ \text{小} \}$$

とするとき

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \{ \text{小} \}$$

$$[\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j\ k}^i \xi^j \eta^k \frac{\partial}{\partial x^i}]$$

で、ここに

$$\zeta^i = \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j\ k}^i \xi^j \eta^k \quad \{ \text{小} \}$$

とする。

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$$

$$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$$

この定理は線形接続をば M 上のベクトル場 X, Y に対し第三のベクトル場 $\nabla_X Y$ を対応させる法則で (i) (ii) (iii) (iv) をみたすものとして定義できることを示している。

微分形式の幾何学 p197

定義 多様体 M 上のベクトルバンドル $\pi : E \rightarrow M$ の接続とは、双線形写像

$$\nabla : (M)(E)$$

であって、任意の $f \in \Gamma(E)$, $s \in \Gamma(E)$ に対して、二つの条件

$$() \quad \nabla_{fX}s = f\nabla_X s$$

$$() \quad \nabla_X(fs) = f\nabla_X s + (Xf)s$$

をみたすものをいう。 $\nabla_X s$ を s の X に関する共変微分という。

微分形式の幾何学 p201

構造方程式と呼ばれる。

線形写像

を誘導し、この場合、接続の条件 (ii) は

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$$

と表わされることになる。

p215

をみたすように値をとる上の形式が、ただ一つ存在する。

理論 p204

アファイン接続 ∇ とは、写像 ∇ で次の条件を満たすものである：

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$$

ここで f および X, Y, Z である。

p38

定理 リーマン多様体 M には次の条件をみたす TM の線形接続がただ 1 つ存在する： に対して

- () $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_XZ + \nabla_YZ, \quad \nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$
- () $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ, \quad \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_XY$
- () $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$
- ()

この線形接続をレビ・チビタ接続、特にチャート $(\)$ に関する自然基底 $\{\partial_i = \partial/\partial x^i\}$ に対して、 m^3 個の U 上の級関数 $\Gamma_i^k{}_j$ が

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_i^k{}_j\partial_k$$

によって決まる。 $\Gamma_i^k{}_j$ をクリストッフェルの記号と呼ぶ。逆に $X|U = X^i\partial_i, Y|U = Y^j\partial_j$ と成分表示するとき

$$(\nabla_XY)|U = (X \cdot Y^k + \Gamma_i^k{}_j X^i Y^j)\partial_k$$

と書ける。

理論 p204

アファイン接続 ∇ とは、写像 ∇ で次の条件を満たすものである：

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_XZ + \nabla_YZ$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_XY$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_XY$$

ここで f および X, Y, Z である。

M 上で、座標 $x =$ をもつチャート $(\)$ を選び m^3 個の接続係数と呼ばれる関数を

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$$

で定義する。ここで $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ は $T_p M$ の座標基底である。接続係数は基底ベクトルが点から点へいかに変化するかを指定するものである。 $V = V^\mu e_\mu$ と $W = W^\nu e_\nu$ をの元とする。このとき

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu[W^\nu]e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \right) e_\lambda \\ &= \left[V^\mu \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} e_\lambda + V^\mu W^\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} e_\lambda \right] \end{aligned}$$

となる。

多様体 p153

M を n 次元多様体としてそこに一つの線形接続が与えられているとする。M の開集合 O において二つのベクトル場 X, Y があるとき、{ Y の X による共変微分と呼ぶところのやはり O の上のベクトル場 $\nabla_X Y$ をつぎのように定義する。} O に含まれる局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ において、線形接続の成分を $\{\Gamma_{j \ k}^i\}$ とし U において、

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \{ \text{小} \}$$

とするとき

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \{ \text{小} \}$$

$$[\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j \ k}^i \xi^j \eta^k \frac{\partial}{\partial x^i}]$$

で、ここに

$$\zeta^i = \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j \ k}^i \xi^j \eta^k \quad \{ \text{小} \}$$

とする。

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$$

$$\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$$

この定理は線形接続をば M 上のベクトル場 X, Y に対し第三のベクトル場 $\nabla_X Y$ を対応させる法則でをみたすものとして定義できることを示している。

接続の微分幾何 p76

、TM の接続を M のアフィン接続と呼ぶ。

$$T(X, Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \quad (9.1)$$

とくと、

M の各点 x で T は写像

$$T_x M \times T_x M \longrightarrow T_x M$$

を定義するからタイプ (1,2) のテンソル場である {酒} T をアフィン接続 ∇ の ねじれ率テンソル とか捩率と呼ぶ。

接ベクトル束 TM の局所標構 e_1, \dots, e_n とその双対基 $\theta^1, \dots, \theta^n$ を考える。

ねじれ率 T を

$$T = \sum \Theta^i e_i \in \quad (9.4)$$

と書いてみる。ここで $\Theta^i, i = 1, \dots, n$, は 2 次微分形式。(9.1) で $X = e_j, Y = e_k$ とおき、

$$\nabla e_k = \sum \omega_k^i e_i, \quad \nabla_{e_j} e_k = \sum \omega_k^i(e_j) e_i$$

を使うと

$$2T(e_j, e_k) = \sum (\omega_k^i(e_j) - \omega_j^i(e_k)) e_i - [e_j, e_k]$$

となる。これを $\theta^i(*)$ の * のところに代入し、1 章の (2.3)、(2.11) を使って

$$2\theta^i(T(e_j, e_k)) = \omega_k^i(e_j) - \omega_j^i(e_k) - \theta^i([e_j, e_k]) = 2 \sum (\omega_l^i \wedge \theta^l)(e_j, e_k) + 2d\theta^i(e_j, e_k)$$

を得る。左辺は、(9.4) を見れば $2\Theta^i(e_j, e_k)$ となるから *

$$\Theta^i = d\theta^i + \sum \omega_j^i \wedge \theta^j \quad ()$$

を得るが、

アフィン接続の第一および第二構造方程式と呼ぶ。

M の局所座標系 x^1, \dots, x^n を使い

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n},$$

としたとき

$$\nabla_{e_j} e_k = \sum \Gamma_{jk}^i e_i$$

により n^3 個の関数 Γ_{jk}^i を定義する。これらの関数を ∇ の x^1, \dots, x^n に関する Christoffel の記号と呼ぶ。

ベクトル場 $X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}, Y = \sum \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ に対しと (9.19) を使って $\nabla_X Y$ を計算すると {酒}

$$\nabla_X Y = \sum \xi^j \nabla_j \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{ただし、} \nabla_j \eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma_{jk}^i \eta^k$$

を得る。

例

$\nabla_X Y$ をつぎのように定義する。

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とするとき

$$\nabla_X Y = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^j \eta^k \Gamma_{j \ k}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$X = 1 \frac{\partial}{\partial x^1} + 0 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$\nabla_X Y = 1 \frac{\partial \eta^1}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + 1 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2}$$

説明

$$\theta^i(\Theta^i e_i) = \Theta^i \theta^i(e_i) = \Theta^i$$

7.3.1 { p209 }

多様体の曲がり具合を測る「ものさし」としての本質的な幾何学的意味をもち得ない。そこで本質的な意味をもつものとして捩率テンソル T : と曲率テンソルを、それぞれ

$$T(X, Y) \equiv$$

$$R(X, Y, Z)$$

によって定義する。

p235

正規直交標構

p236

定理接続 1-形式は Cartan 構造方程式

=

を満たす。ここで捩率形式と曲率形式を導入した。

9.4.2 { p21 }

フレーム束

接続 p76

M の局所座標系 x^1, \dots, x^n を使い

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n},$$

としたとき

$$\nabla_{e_j} e_k = \sum \Gamma_{jk}^i e_i$$

により n^3 個の関数 Γ_{jk}^i を定義する。これらの関数を ∇ の x^1, \dots, x^n に関する Christoffel の記号と呼ぶ。ベクトル場 $X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 、 $Y = \sum \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ に対しと (9.19) を使って $\nabla_X Y$ を計算すると、

$$\nabla_X Y = \sum \xi^j \nabla_j \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{ただし、} \nabla_j \eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma_{jk}^i \eta^k$$

を得る。

多様体 p133

、U 上の各点 x で正定値対称行列 $(g_{ij}(x))$ の逆行列をとって $(g^{ij}(x))$ とする。すなわち

$$\sum_{k=1}^n g^{ik}(x)g_{kj}(x) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

とする。すると、U 上の C^∞ 関数を係数とする n 次正方行列 (g^{ij}) を得るが、これを用いて U 上の関数系 $\{\Gamma_{j\ k}^i; 1 \leq i, j, k \leq n\}$ を

$$\Gamma_{j\ k}^i = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n g^{ih} \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} \right) \quad (10)$$

によって定義しよう。

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j\ k}^i(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad () \quad (11)$$

定義 リーマン多様体 (M, g) における滑らかな曲線 $C = \{x(t); a \leq t \leq b\}$ が測地線であるとは、C が通るような各局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ において

とるとき、 $x^1(t), \dots, x^n(t)$ が方程式 (11) を満足することとする。ここに $\{\Gamma_{j\ k}^i; 1 \leq i, j, k \leq n\}$ は (10) によって定義され、クリストッフェルの記号と名づけられる U 上の関数系である。

多様体 p140

定義 n 次元可微分多様体 M の各局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ ごとに、U 上の n^3 個の C^∞ 関数の組 $\{\Gamma_{j\ k}^i; 1 \leq i, j, k \leq n\}$ が与えられつぎの条件がみたされるとき、 M に線形接続 (またはアファイン接続) が与えられたといい、 $\{\Gamma_{j\ k}^i\}$ をこの線形接続の $(U; x^1, \dots, x^n)$ における成分という。いま、 $\{\Gamma_{j\ k}^i\}$ 、 $\{\Lambda_{j\ k}^i\}$ をそれぞれ局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ 、 $(V; y^1, \dots, y^n)$ における成分とし $U \cap V \neq \emptyset$ とすれば、 $U \cap V$ においては

$$\Lambda_{j\ k}^i = \sum_{p,q,r=1}^n \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial x^q}{\partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^r} \Gamma_{p\ q}^r + \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^j \partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^l}$$

がなりたつ。

測地線

曲線 C に沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ とは曲線上の各点 $x(t)$ において M への接ベクトル $Y(t)$ が与えられ、しかも M の $U \cap C \neq \emptyset$ なる局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ では表示

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n \eta^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x(t)}$$

の係数 $\eta^i(t) (1 \leq i \leq n)$ はいずれも t の C^∞ 関数であるものとする。

補題 1. 曲線 $C = \{x(t)\}$ に沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ に対して、 C に沿ったベクトル場 $\{\nabla_{x'} Y(t)\}$ がつぎの条件によって () 一意的に定義される。、 $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ 、 $Y(t) = (\eta^1(t), \dots, \eta^n(t))$ とするとき、 $\nabla_{x'} Y(t)$ は U において () の左辺を成分とするベクトル場である。すなわち

$$\nabla_{x'} Y(t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\eta^i}{dt} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j\ k}^i(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \eta^k(t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x(t)}$$

曲線 $C = \{x(t)\}$ とそれに沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ に対して同じく C に沿った補題 1 のベクトル場 $\{\nabla_{x'} Y(t)\}$ を $\{Y(t)\}$ の共変微分という。

定理 が存在して、

この状況において、の点におけるへの接ベクトルををに沿って平行移動して得られる接ベクトルという。

多様体 p147

いま、区分的に滑らかな曲線 $C = \{x(t)\}$ の上の 2 点 $x(a), x(b)$ をとる。点 $x(a)$ における M への接ベクトル u_a に対して、これを C に沿って平行移動して得られる $x(b)$ における M への接ベクトルを u_b とすれば、対応 $u_a u_b$ によって M の接ベクトル空間の写像

:

が定義される。これを曲線 C に沿った接ベクトル空間 $T_{x(a)}(M)$ の $T_{x(b)}(M)$ への平行移動という。

レヴィ・チヴィタの平行移動という。

$$du \wedge du = 0, \quad dv \wedge dv = 0, \quad du \wedge dv = -dv \wedge du$$

次に外微分 d を

0 次微分形式 (f) に対しては

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

1 次微分形式 $= f du + g dv$ に対しては

$$= df \wedge du + dg \wedge dv$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv$$

2 次微分形式 $= f du \wedge dv$ に対しては

$$= df \wedge du \wedge dv$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du \wedge dv = 0$$

と定義する。

[次のページへ続く。]

例

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(a, x_2) dx_2 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(0, x_2) dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, a) dx_1 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, 0) dx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(a, x_2, x_3) dx_2 dx_3 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(0, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, a, x_3) dx_1 dx_3 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, 0, x_3) dx_1 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, a) dx_1 dx_2 - \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

{ 微分幾何 P124 }

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right\} du dv \\ &= \int_0^b \int_0^a \frac{\partial g}{\partial u} du dv - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial f}{\partial v} dv du \\ &= \int_0^b [g(a, v) - g(0, v)] dv - \int_0^a [f(u, b) - f(u, 0)] du \end{aligned}$$