

p42

、M は n 次元多様体、E は M 上のベクトル束 { } でそのファイバーは R^r とする。M 上の p 次微分形式の全体を $A^p(M)$ と書くが、E に値をもつ M 上の p 次微分形式の全体を $A^p(E)$ と書くことにする。

外積によって写像

$$A^q(M) \times A^p(E) \longrightarrow A^{p+q}(E)$$

が定義される *1。

$A^p(E)$ の元は、 $\xi \cdot \theta$ の形の元 (、 $\xi \in A^0(E) = \Gamma(E)$ 、 $\theta \in A^p(M)$) の和として書けるから

$$D(\xi \cdot \theta) = \nabla \xi \wedge \theta + \xi \cdot d\theta, \quad \xi \in A^0(E), \theta \in A^p(M) \quad (2.2)$$

によって *2、写像

$$D : A^p(E) \longrightarrow A^{p+1}(E)$$

を定義する。例えば $p = 1$ のとき $\varphi \in A^1(E)$ ならば $D\varphi \in A^2(E)$ は

$$(D\varphi)(X, Y) = \frac{1}{2} \{ \nabla_X(\varphi(Y)) - \nabla_Y(\varphi(X)) - \varphi([X, Y]) \}, \quad X, Y \in \Gamma(TM) \quad (2.3)$$

与えられる *3。 $\xi \in A^0(E)$ に対しては $D\xi = \nabla \xi$ である *4。

{ 次の公式は容易に確かめられる。

$$D(\varphi \wedge \theta) = D\varphi \wedge \theta + (-1)^p \varphi \wedge d\theta, \quad \varphi \in A^p(E), \theta \in A^q(M)$$

$$[D\varphi \in A^{p+1}(E), d\theta \in A^{q+1}(M)]$$

曲率 { p43 }

{。(2.2) にさらに D を作用させると、(}

$$\begin{aligned} D^2(\xi \cdot \theta) &= D^2\xi \wedge \theta - D\xi \wedge d\theta + D\xi \wedge d\theta + \xi d^2\theta \\ &= D^2\xi \wedge \theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$[D^2\xi \in A^2(E), D\xi \in A^1(E), d\theta \in A^{p+1}(M), d^2\theta \in A^{p+2}(M)]$$

を得る。}

、各点 x で D^2 は線形写像 $D^2 : E_x \longrightarrow \bigwedge^2 T^*M \otimes E_x$ を定義する。

$$R = D^2 \in A^2(\text{End} E)$$

とにおいて、R を接続 ∇ の曲率と呼ぶ { s }

(2.3) で $\varphi = D\xi$ とにおいて $D^2\xi$ を計算すると *5、

$$R(X, Y)\xi = \frac{1}{2}(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})\xi \quad \{ sn \}$$

$$\left[R \left(\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \sum_{\lambda=1}^r \zeta^\lambda e_\lambda \right]$$

となる。

$\{e_1, \dots, e_r\}$ に関する接続形式 $\{\omega\}$ を $\omega = (\omega_\mu^\lambda)$ とすると

$$\begin{aligned} D^2 e_\lambda &= D\left(\sum \omega_\lambda^\mu e_\mu\right) = \sum d\omega_\lambda^\mu e_\mu - \sum \omega_\lambda^\mu \wedge D e_\mu \\ &= \sum (d\omega_\lambda^\mu - \sum \omega_\lambda^\nu \wedge \omega_\nu^\mu) e_\mu \\ &= \left[d \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^r & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_1^1 \wedge \omega_1^1 + \cdots + \omega_1^r \wedge \omega_r^1 & \cdots & \omega_r^1 \wedge \omega_1^1 + \cdots + \omega_r^r \wedge \omega_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^1 \wedge \omega_1^r + \cdots + \omega_1^r \wedge \omega_r^r & \cdots & \omega_r^1 \wedge \omega_1^r + \cdots + \omega_r^r \wedge \omega_r^r \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

だから

$$\Omega_\lambda^\mu = \underbrace{d\omega_\lambda^\mu}_{\in A^2(M)} - \sum \omega_\lambda^\nu \wedge \omega_\nu^\mu = d\omega_\nu^\mu + \sum \omega_\nu^\mu \wedge \omega_\lambda^\nu \quad (2.9)$$

と定義すれば

(2.9) を接続の構造方程式と呼ぶ。行列の記号を使って、構造方程式を

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \quad (2.11)$$

$$= d \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^r & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^r & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^r & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix}$$

と書いておこう。 (Ω) をの曲率形式と呼ぶ。

(2.5) によれば

$$D^2 \varphi = R \wedge \varphi, \quad \varphi \in A^p(E)$$

これを $\varphi = D\xi$ に適用して、

$$D^2(D\xi) = R \wedge D\xi$$

他方、を使って

$$D(D^2\xi) = D(R\xi) =$$

したがって、次の Bianchi の恒等式を得る。

$$DR = 0$$

$\{\omega\}$ 、接続形式で表わした場合には構造方程式 (2.11) を外微分して、

$$d\Omega = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega = -\omega \wedge \omega \wedge \omega + \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$$

したがって、Bianchi の恒等式を次の形で得る。

$$d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega = 0$$

$\omega \in A^p(M)$ 、 $\omega' \in A^q(M)$ のとき、外積 $\omega \wedge \omega' \in A^{p+q}(M)$ は

$$(\omega \wedge \omega')(X_1, \dots, X_{p+q}) =$$

一番よく使うのは $p = q = 1$ の場合で、その場合には、

$$(\omega \wedge \omega')(X, Y) = \frac{1}{2}(\omega(X)\omega'(Y) - \omega(Y)\omega'(X))$$

となる。

M 上の任意のベクトル場 X, Y に対して

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2}\{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\}$$

解説

*2 基礎 p283、 p9、 *1

$$[D(\xi \cdot \theta)](X, Y) = \{\nabla \xi \wedge \theta\}(X, Y) + \xi \cdot d\theta(X, Y),$$

$$\xi \in A^0(E), \theta(X) \in A^p(M), \nabla \xi(X) \in A^1(E), d\theta(X, Y) \in A^{p+1}(M)$$

*3 基礎 p279

$$\begin{aligned} (D(\xi \cdot \theta))(X, Y) &= (\nabla \xi \wedge \theta)(X, Y) + \xi \cdot d\theta(X, Y) \\ &= \text{基礎 p292、 p10} \frac{1}{2}\{\nabla \xi(X)\theta(Y) - \nabla \xi(Y)\theta(X)\} + \xi \cdot \frac{1}{2}\{X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X, Y])\} \\ &= \frac{1}{2}\{\nabla_X(\xi \cdot \theta(Y)) - \nabla_Y(\xi \cdot \theta(X)) - \xi \cdot \theta([X, Y])\} \end{aligned}$$

*5 *4

$$\begin{aligned} D^2(X, Y)\xi &= \frac{1}{2}\{\nabla_X(D\xi(Y)) - \nabla_Y(D\xi(X)) - D\xi([X, Y])\} \\ &= \frac{1}{2}\{\nabla_X(\nabla \xi(Y)) - \nabla_Y(\nabla \xi(X)) - \nabla \xi([X, Y])\} \end{aligned}$$

$$[= D^2(X, Y)\xi]$$

{ 理論 p209 ~ }

{ 理論 p210 ~ }

p36

ベクトルの記号で $\xi^\lambda e_\lambda$ を $e \cdot \xi$ 、と書けば、

$$\Omega_\lambda^\mu = \underbrace{d\omega_\lambda^\mu}_{\in A^2(M)} - \sum \omega_\lambda^\nu \wedge \omega_\nu^\mu = d\omega_\nu^\mu + \sum \omega_\nu^\mu \wedge \omega_\lambda^\nu \quad (2.9)$$

$$[= d \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_r^1 & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_r^1 & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_r^1 & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix}]$$

$$[= d \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_r^1 & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_1^1 \wedge \omega_1^1 + \cdots + \omega_1^r \wedge \omega_r^1 & \cdots & \omega_1^1 \wedge \omega_1^r + \cdots + \omega_1^r \wedge \omega_r^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_r^1 \wedge \omega_1^1 + \cdots + \omega_r^r \wedge \omega_r^1 & \cdots & \omega_r^1 \wedge \omega_1^r + \cdots + \omega_r^r \wedge \omega_r^r \end{bmatrix}]$$

$$\begin{aligned}
& \left[= d \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^r & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^r & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^r & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} \right] \\
& \left[= d \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^r & \cdots & \omega_r^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^1 \wedge \omega_1^1 + \cdots + \omega_r^1 \wedge \omega_1^r & \cdots & \omega_1^1 \wedge \omega_r^1 + \cdots + \omega_r^1 \wedge \omega_r^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^r \wedge \omega_1^1 + \cdots + \omega_r^r \wedge \omega_1^r & \cdots & \omega_1^r \wedge \omega_r^1 + \cdots + \omega_r^r \wedge \omega_r^r \end{bmatrix} \right]
\end{aligned}$$

リーマン p26

さて $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して

$$R(X, Y)\xi := \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]}\xi$$

とおけばでをみたし $R(X, Y)\xi(p)$ はのみによって決まる。これを線形接続の曲率テンソルという。

リーマン p46

定理 $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ に対して

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z \quad (\in \mathcal{X}(M))$$

と定義すれば R は級型テンソル場であり、次の性質をみたす。

()

$$() \quad R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

()

()

$$() \quad (\nabla_X R)(Y, Z)U + (\nabla_Y R)(Z, X)U + (\nabla_Z R)(X, Y)U = 0$$

多様体 p168

多様体 M の線形接続の曲率テンソル場 R とは M 上の次テンソル場であってつぎのように定義された写像 $R; \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ によって与えられる。

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z$$

なお、この式は、 $R(X, Y)$ を与えたとき、 $R(X, Y)$ をに写す写像として \mathcal{X} から \mathcal{X} への線形写像 $R(X, Y)$ が

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

によって与えられることを示している。

7.3.1 { p209 }

そこで本質的な意味をもつものとしてと Riemann 曲率テンソル $R : \rightarrow$ を、

$$R(X, Y, Z) \equiv \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

によって定義する。

$$R(X, Y)Z = X^\lambda Y^\mu Z^\nu R(e_\lambda, e_\mu)e_\nu$$

座標基底 $\{e_\mu\}$ とその双対基底 $\{dx^\mu\}$ に関してこれらのテンソルの成分は

$$\begin{aligned} R^\kappa_{\lambda\mu\nu} &= dx^\kappa, R(e_\mu, e_\nu)e_\lambda \\ &= dx^\kappa, (\partial_\mu \Gamma^\eta_{\nu\lambda})e_\eta + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\xi_{\mu\eta} e_\xi - (\partial_\nu \Gamma^\eta_{\mu\lambda})e_\eta - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\xi_{\nu\eta} e_\xi \end{aligned}$$

7.3.2 { }

そこで無限小の平行四辺形 pqrs をとり、その座標をそれぞれ $\{\}, \{\}, \{\}, \{\}$ とする。ベクトル $V_0 \in$ を $C = pqr$ に沿って平行移動するとベクトル $V_C(r) \in$ を得る。C に沿って q へ平行移動されたベクトル V_0 は

$$V_C^\mu(q) = V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) \varepsilon^\nu$$

となる。このとき $V_C^\mu(r)$ は

$$\begin{aligned} V_C^\mu(r) &= V_C^\mu(q) - V_C^\kappa(q) \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(q) \delta^\nu \\ &= \end{aligned}$$

で与えられる。同様に $C' = psr$ に沿って V_0 を平行移動したものは別のベクトル $V_{C'}(r) \in$ であり、
で与えられる。r において 2 つのベクトルは

$$\begin{aligned} V_{C'}(r) - V_C(r) &= V_0^\kappa [\partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\lambda\kappa}(p) \\ &\quad - \Gamma^\rho_{\lambda\kappa}(p) \Gamma^\mu_{\nu\rho}(p) + \Gamma^\rho_{\nu\kappa}(p) \Gamma^\mu_{\lambda\rho}(p)] \varepsilon^\lambda \delta^\nu \\ &= V_0^\kappa R^\mu_{\kappa\lambda\nu} \varepsilon^\lambda \delta^\nu \end{aligned}$$

だけ異なる。

7.4.5 { p221 }

定理 ()

= 0 第 Bianchi 恒等式

= 0 第 Bianchi 恒等式

7.8.2 { p236 }

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

定理 7.3 接続 1-形式は Cartan 構造方程式

$$d\omega + \omega \wedge \omega = R$$

(7.146) の外微分を取ると、Bianchi 恒等式を得る。

$$dR + \omega \wedge R - R \wedge \omega = 0$$

微分・位相幾何 p152

以上を行列の記法、

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^1 & \cdots & \omega_n^n \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$$

を使ってまとめると、

となる。

曲率行列 $\Theta = (\theta_j^i)$ を、

$$\Theta = d\Omega - \Omega \wedge \Omega$$

$$[= d \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^1 & \cdots & \omega_n^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^1 & \cdots & \omega_n^n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^1 & \cdots & \omega_n^n \end{pmatrix}]$$

において定義すれば、

$$d\Theta =$$

$$= \Omega \wedge \Theta - \Theta \wedge \Omega$$

□

この式は、ビアンキ恒等式とよばれる。

1.4.4. Curvature

$$R(X, Y) = [\cdot, \cdot] -$$

記号

p38

局所的には一次独立な切断 e_1, \dots, e_r が存在する。そのような (e_1, \dots, e_r) をの局所標構場と呼ぶ。ベクトルの記号で $\sum \xi^\lambda e_\lambda$ を $e \cdot \xi$ 、と書けば、

$$D(\xi \cdot \theta) = \nabla \xi \wedge \theta + \xi \cdot d\theta, \quad (2.2)$$

$$(D\varphi)(X, Y) = \frac{1}{2} \{ \nabla_X(\varphi(Y)) - \nabla_Y(\varphi(X)) - \varphi([X, Y]) \}, \quad X, Y \in \Gamma(TM) \quad (2.3)$$

$$2\theta^i(T(e_j, e_k)) = \omega_k^i(e_j) - \omega_j^i(e_k) - \theta^i([e_j, e_k]) = 2 \sum (\omega_l^i \wedge \theta^l)(e_j, e_k) + 2d\theta^i(e_j, e_k) \quad (p77)$$

$$D : A^1(TM) \rightarrow A^2(TM)$$

$$D(\sum \theta^i e_i) = \sum d\theta^i e_i - \sum \theta^i \wedge \nabla e_i \quad (9.7)$$

$$[D(\sum \theta^\lambda \xi_\lambda) = \sum \nabla \xi_\lambda \wedge \theta^\lambda + \sum d\theta^\lambda \xi_\lambda]$$

$$[D(\sum \theta^\lambda \xi_\lambda) = \sum d\theta^\lambda \xi_\lambda + \{-1\}^p \sum \theta^\lambda \wedge \nabla \xi_\lambda]$$

$$[\{D(\xi \cdot \theta)\}(\cdot, \cdot) = \{\nabla \xi \wedge \theta\}(\cdot, \cdot) + \xi \cdot d\theta(\cdot, \cdot),]$$

$$R(X, Y)\xi = \frac{1}{2}(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})\xi \quad (2.8)$$

p26

M 上のベクトル場 $X \in \mathcal{X}(M)$ との断面 $\xi \in$ に対して

次にの周りののチャートを選び $X = X^i \partial / \partial x^i$ と成分表示すれば、さて $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して

$$R(X, Y)\xi := \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]}\xi \quad (\text{酒井 3.4})$$

$$R(X, Y)Z = XYZR(e, e)e \quad (\text{理論 7.39})$$

$$[R(\sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}) \sum \xi^\lambda e_\lambda$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \nabla \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \nabla \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla [\sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}]) \sum \xi^\lambda e_\lambda]$$

$$[R(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}) \sum_{\lambda=1}^r \xi^\lambda e_\lambda$$

すべてのでない $\xi = \sum \xi^i e_i \in E_x, v = \sum v^\alpha (\partial / \partial z^\alpha) \in T_x X$ に対して

(複素幾何 4.59)

p42

M 上の p 次微分形式の全体を $A^p(M)$ と書くが、E に値をもつ M 上の p 次微分形式の全体を $A^p(E)$ と書くことにする。

外積によって写像

$$A^q(M) \times A^p(E) \longrightarrow A^{p+q}(E)$$

が定義される。

$A^p(E)$ の元は、 $\xi \cdot \theta$ の形の元 ($\xi \in A^0(E) = \Gamma(E)$, $\theta \in A^p(M)$) の和として書けるから

$$D(\underbrace{\xi \cdot \theta}_{\in A^p(E)}) = \underbrace{\nabla \xi}_{\in A^1(E)} \wedge \theta + \xi \cdot \underbrace{d\theta}_{\in A^{p+1}(M)}, \quad \xi \in A^0(E), \theta \in A^p(M) \quad (2.2)$$

によって、写像

$$D : A^p(E) \longrightarrow A^{p+1}(E)$$

を定義する。例えば $p = 1$ のとき $\varphi \in A^1(E)$ ならば $D\varphi \in$ は

$$(D\varphi)(X, Y) = \frac{1}{2} \{ \nabla_X(\varphi(Y)) - \nabla_Y(\varphi(X)) - \varphi([X, Y]) \}, \quad X, Y \in \Gamma(TM) \quad (2.3)$$

で与えられる。。 $\xi \in A^0(E)$ に対しては $D\xi = \nabla\xi$ である。

次の公式は容易に確かめられる。

$$D(\varphi \wedge \theta) = \underbrace{D\varphi}_{\in A^{p+1}(E)} \wedge \theta + (-1)^p \varphi \wedge \underbrace{d\theta}_{\in A^{q+1}(M)}, \quad \varphi \in A^p(E), \theta \in A^q(M)$$

p43

。(2.2) にさらに D を作用させると、()

$$\begin{aligned} D^2(\xi \cdot \theta) &= \underbrace{D^2\xi}_{\in A^2(E)} \wedge \theta - \underbrace{D\xi}_{\in A^1(E)} \wedge \underbrace{d\theta}_{\in A^{p+1}(M)} + D\xi \wedge d\theta + \xi \underbrace{d^2\theta}_{\in A^{p+2}(M)} \\ &= D^2\xi \wedge \theta \quad (2.5) \end{aligned}$$

を得る。

各点 x で D^2 は線形写像 $D^2 : E_x \longrightarrow \bigwedge^2 T^*M \otimes E_x$ を定義する。

$$R = D^2$$

とにおいて、 R を 接続 ∇ の曲率 と呼ぶ。

(2.3) で $\varphi = D\xi$ とにおいて $D^2\xi$ を計算すると、

$$\underline{R(X, Y)\xi = \frac{1}{2}(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})\xi}$$

となる。

接続 p71

$\dot{x}(t)$ をその接ベクトル () とする。切断が微分方程式

$$\nabla_{\dot{x}(t)} \xi = 0 \quad (8.1)$$

$$\nabla_{\dot{x}(t)} \xi = \sum \left\{ \frac{d\xi^\lambda(x(t))}{dt} + \sum \Gamma_\mu{}^\lambda{}_i(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \xi^\mu(x(t)) \right\} e_\lambda$$

を得る。したがって、(8.1) は斉次常微分方程式の系

$$\frac{d\xi^\lambda}{dt} + \sum \Gamma_\mu{}^\lambda{}_i \frac{dx^i}{dt} \xi^\mu = 0$$

にほかならない。初期値に対し (8.1) の解 ξ が一意に定まる。そのとき、 ξ は $x(t)$ に沿って平行移動して得られたという。

平行移動

リーマン p38

平行

平行移動

7.2.3 { p205 }

X を $()c(t)$ に沿って定義されているベクトル場とする ;

$$X|_{c(t)} = X^\mu(c(t)) e_\mu|_{c(t)}$$

ここで $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$ である。 X が条件

$$\text{任意の } t \in (a, b) \text{ に対して } \nabla_V X = 0 \quad (7.18a)$$

を満たせば X は $c(t)$ に沿って平行移動されたという。但し $V = d/dt = ()e_\mu|_{c(t)}$ は $c(t)$ における接ベクトルである。条件 (7.18a) は成分でかくと

$$\frac{dX^\lambda}{dt} + \Gamma^\mu{}_{\lambda i} \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^\mu = 0$$

となる。

$$= 0$$

ならば曲線は測地線とよばれる。

p182

を多様体とする。M 上の各点における接空間をすべて集めた集合

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

を考えよう。

微分形式の幾何学 p183

定義 M を多様体とする。このとき、 $\xi = (E, \pi, M)$ が M 上の n 次元実ベクトルバンドルであるとは、 $\pi: E \rightarrow M$ が C^∞ 多様体 E から M の上への C^∞ 写像であって、つぎの二つの条件をみたすときをいう。

() 各点 $p \in M$ に対し、 $\pi^{-1}(p)$ は R 上の n 次元ベクトル空間の構造を持つ。

() () 任意の点 $p \in M$ に対し、そのある開近傍 U と微分同相写像 $\varphi_U: \pi^{-1}(U) \cong U \times R^n$ が存在し、各点 $q \in U$ に対しその $\pi^{-1}(q)$ への制限は、線形同型写像 $\varphi_U: \pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times R^n$ を与えている。

、。

E, π, M をそれぞれベクトルバンドルの全空間、射影、底空間という。また $\pi^{-1}(p)$ を p 上のファイバーといい、

定義 ベクトルバンドル $\pi: E \rightarrow M$ に対して、 $\pi \circ s = id_M$ となるような写像 $s: M \rightarrow E$ を切断という。すなわち切断とは、底空間上の任意の点に対して、その上のファイバーの点を対応させるもので、に関して級のものをいう。

、U 上の切断 $s_i: U \rightarrow E (i = 1, n)$ で、任意の点 $p \in U$ において $s_1(p), \dots, s_n(p)$ が E_p の基底となっているものを与えることとは同値である。このような切断の組 $\{s_i\}$ を U 上の枠と呼ぶ場合がある。

p186

これをのによる商バンドルという。

N を多様体 M の部分多様体とする。、 TN は $TM|_N$ の部分バンドルとなるが、対応する商バンドルを N の M における法バンドルという。

$\pi: E \rightarrow M$ を実ベクトルバンドルとする。このとき

$$E^* =$$

とおけば、これは E と同じ次元のベクトルバンドルとなる。ここで E_p^* は E_p の双対ベクトル空間、すなわち $Hom(E_p, R)$ を表わす。これを E の双対バンドルという。

接続の微分幾何 p2

接空間を全部集めて、 $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ と定義すると、
 TM もも共にベクトル束の例である。

一般に、多様体 M 上のベクトル束 E とは、

- () まず、 E も 多様体 であり、
- () E から M の上への () 写像 π があり、
- () 各点 $x \in M$ に対し、 $E_x = \pi^{-1}(x)$ (x 上のファイバーと呼ぶ) は一定次元 () の ベクトル空間

で、

() E は、次の意味で、局所的に M とファイバーの直積である。すなわち、各点 $x \in M$ に対し、近傍 U があり、 $\pi^{-1}(U)$ と $U \times R^r$ の間に 微分同相写像

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times R^r$$

が存在し て、 $\varphi(y) : E_y = \pi^{-1}(y) \longrightarrow \{y\} \times R^r \approx R^r$ はベクトル空間としての 同型写像 になっている。

各 ファイバー E_x から一つ元をえらび出したものを E の切断と呼ぶ。すなわち、切断とは、写像 $\sigma : M \rightarrow E$ であって、

$$\pi \circ \sigma(x) = x, \quad x \in M$$

となる ものである。

p9

さて $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ を M の接ベクトル全体の集合としを τ に対して τ を対応させる写像とする。
 TM を M の接束という。

p22

定義 $\tau : E \rightarrow M$ が M 上の k 次元 (実) ベクトル束であるとは

(1) E, M は、級多様体で τ は上への級写像であり、 $\tau^{-1}(p) (p \in M)$ は k 次元 (実) ベクトル空間の構造を持つ。

(2) M の各点に p 対して p の座標近傍 U と微分同相写像 $\Phi_U : \tau^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ で次の性質をみたすものが存在する。、を標準的な射影とするととき、

()

(1) 各 $q \in U$ に対して $\Phi_q^U := pr_2 \circ \Phi_U|_{\tau^{-1}(q)} : \tau^{-1}(q) \rightarrow \mathbb{R}^k$ は線形同形写像である。

また E を全空間、 M を底空間、 τ を射影、 $\tau^{-1}(p)$ を p 上のファイバーという。

一般にベクトル束 $\tau : E \rightarrow M$ に対しても級写像で $\tau = id_M$ をみたすものを断面と呼ぶ。

{ 理論 p1 }

m 次元多様体 M 上の接ベクトル束 TM とは M のすべての接空間の集まりである :

$$TM \equiv \bigcup_{p \in M} T_p M$$

TM がその上に定義されている多様体 M を底空間という。{ U_i } を M の開被覆とする。 $x^\mu = \varphi_i(p)$ が U_i 上の座標であるとき、

$$TU_i \equiv \bigcup_{p \in U_i} T_p M$$

の元は点 $p \in M$ とベクトル $V = V^\mu(p) \partial / \partial x^\mu|_p \in T_p M$ によって決まる。 U_i が R^m の開集合 $\varphi_i(U_i)$ に同相で、各 $T_p M$ が R^m に同相であることに注意すると、 TU_i が直積 $R^m \times R^m$ と同一視されることがわかる。もし $(p, V) \in TU_i$ ならば、さらに、 TU_i は直積 $U_i \times R^m$ に分解される。もし TU_i の点 u を選ぶと u がもつ情報を点 $p \in M$ とベクトル $V \in T_p M$ に体系的に分解できる。こうして、自然に射影 $\pi : TU_i \rightarrow U_i$ の概念に導かれる。 $\pi^{-1}(p) = T_p M$ であることを検証せよ。 $T_p M$ は p におけるファイバーとよばれる。

切断

9.2.1 { p3 }

定義 (微分可能) ファイバー束 (E, π, M, F, G) とは次のものからなる :

- (i) 全空間とよばれる微分可能多様体 E。
- (ii) 底空間とよばれる微分可能多様体 M。
- (iii) ファイバー() とよばれる微分可能多様体 F。
- (iv) 射影とよばれる全射 $\pi : E \rightarrow M$ 。逆像 $\pi^{-1}(p)$ は点 p におけるファイバーとよばれる。
- (v)
- (vi) M の開被覆 $\{U_i\}$ 、および $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times F$ を満たす微分同相写像 $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ 。写像 ϕ_i は、 ϕ_i^{-1} が $\pi^{-1}(U_i)$ を直積 $U_i \times F$ の上に移すので、局所自明化とよばれる。

()

$\phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ は、微分同相写像である。

切断(あるいは断面)

p10

ベクトル束

微分・位相幾何 p165

接空間、すなわち接線、を互いに平行に描くと図のようになる。

図で接空間 $()T_p$ 上の各点は、点 p で M に接するベクトルを表わす。

こうした曲線をファイバー束の断面とよぶ。

微分・位相幾何 p166

円柱 T 。線分 L 、円周 S^1 として、大域的に $T = L \times S^1$ と表わすことができる。

微分・位相幾何 p170

ファイバー束 E ; 接ベクトル束 $T(M)$

底空間 X ; 微分多様体 M

ファイバー F ; 接空間 $T_p(M) \approx R^n$

構造群 G ; 一般線形変換群 $GL(n, R)$

変換関数 $g_{\alpha\beta}$; $g_{\alpha\beta} = (\partial x_\alpha^i / \partial x_\beta^j)$

ファイバー自身が構造群となっているようなファイバー束を、主ファイバー束あるいは主束といい、

$$P(M, G) \quad \text{または単に}$$

で表わす。一番簡単な主ファイバー束は、

ファイバー束 E ; 主ファイバー束 P

底空間 X ; 微分多様体 M

ファイバー F ; 構造群 G

微分形式の幾何学 p254

定義。G を構造群とし G をファイバーとするファイバーバンドル (π, P, M, G) は、G の G 自身への作用が自然な左作用であるとき、G を構造群とする主バンドルあるいは主 G バンドルという。

接続の微分幾何 p50

Lie 群 G を構造群とする M 上の主ファイバー束 P とは次の性質をもつ多様体のことである。

(i) まず、微分可能な写像 $\pi: P \rightarrow M$ が与えられていて

$$\pi(P) = M$$

(ii) 群 G が P に右から作用している。すなわち、微分可能な写像

$$P \times G \longrightarrow P, \quad (u, s) \longmapsto u \cdot s$$

が与えられていて、

$$(us)s' = u(ss'), \quad u \in P, s, s' \in G$$

$$u \cdot e = u \quad (e \text{ は } G \text{ の単位元})$$

が成り立っている。さらに、この作用は次の条件を満たす。

(i) $\pi(us) = \pi(u)$ 、すなわち、G は $\pi^{-1}(x)$ を $\pi^{-1}(x)$ に移す。

(ii) $\pi(u) = \pi(u')$ ならば、 $u' = us$ となる G の元 s がちょうど一つある。()

(iii) M に開被覆 $\{U_\alpha\}$ があり、各 U_α 上に微分可能切断 $\sigma_\alpha: U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \subset P$ が存在する。

()

以上のようなときに、あるいは単にはを構造群とする主ファイバー束、または簡単に主束とか束であるという。

9.4.1 { p15 }

主束は、構造群 G と同一のファイバー F をもつ、主束 PM は、 $P(M, G)$ とも表されることもあり、しばしば M 上の G 束とよばれることもある。

微分・位相幾何 p

ファイバー自身が構造群となっているようなファイバー束を、主ファイバー束あるいは主束といい、

$$P(M, G) \quad \text{または単に}$$

で表わす。一番簡単な主ファイバー束は、

ファイバー束 E ; 主ファイバー束 P

底空間 X ; 微分多様体 M

ファイバー F ; 構造群 G

p277

H_u に属するベクトルを水平なベクトルという。

$c: [a, b] \rightarrow B$ を底空間 B 内の滑らかな曲線とする。 E 内の曲線 $\tilde{c}: [a, b] \rightarrow E$ は任意の $t \in [a, b]$ に対してであるとき、速度ベクトル $\dot{\tilde{c}}(t)$ が水平であるとき、 \tilde{c} を水平な持ち上げという。

p32

u を主束 $P(M, G)$ の元とし、 G_p を $p = \pi(u)$ におけるファイバーとする。 u において、 G_p に接する $T_u P$ の部分空間を垂直部分空間 $V_u P$ とよぶ。 [$T_u P$ は P の接空間であり、 M の接空間 $T_p M$ と混同してはならない。]

水平部分空間 $H_u P$ は $T_u P$ における $V_u P$ の補空間で、 P に接続が定義されれば一意に決まる。

定義 $P(M, G)$ を主束とする。 P 上の接続とは、接空間 $T_u P$ を垂直部分空間 $V_u P$ と水平部分空間 $H_u P$ へ一意に分解する操作で、以下の条件を満たすものである：

p37

定義 $P(M, G)$ を G 束とし、 $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ を M における曲線とする。このとき、ある曲線 $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$ が $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ を満たし、 $\tilde{\gamma}(t)$ の接ベクトルが常に $H_{\tilde{\gamma}(t)} P$ に属するならば、 $\tilde{\gamma}$ は γ の水平もち上げとよばれる。

を曲線とし、点をとる。を通るの一意的な水平もち上げが存在するので、点が一意的に決まる。。点は曲線に沿ったの平行移動とよばれる。

p174

、主ファイバー束もまた微分可能多様体である。したがって、接ベクトル束 $T(P)$ および余接ベクトル束を考えることができる。

微分・位相幾何 p175

P は M 上のファイバー束、。主ファイバー束 P の点を u 、。

点 u を通るファイバーの接ベクトル全体は、接空間 $T_u(P)$ の部分空間である。これを u での垂直部分空間といい、 $V_u(P)$ で表わす、。水平部分空間 $H_u(P)$ は $T_u(P)$ における $V_u(P)$ の補空間として定義される、

微分・位相幾何 p181

多様体 M 上の点 p と p' を通る曲線を γ とする。ここで定義したい平行移動は、 p 上のファイバー $\pi^{-1}(p)$ から p' 上のファイバー $\pi^{-1}(p')$ の上への移動である。ファイバーを γ に沿って点 p から点 p' へ平行移動する規則は、次のように定義される。 $\tilde{\gamma}$ は γ の上方にあり、つまり $\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$ でその上の任意の点 u での接ベクトルは水平であるとする。すなわち、その接ベクトルはつねに $H_u(P)$ に属するとする。与えられた γ と点 $u_0 \in P$ に対し、始点 u_0 をもつ $\tilde{\gamma}$ がただ 1 つある。この曲線 $\tilde{\gamma}$ は γ の水平持ち上げとよばれる。

微分形式の幾何学 p197

定義 多様体上のベクトルバンドルの接続とは、双線形写像

$$\nabla : (M)(E)$$

であって、任意のに対して、二つの条件

$$\nabla_{fX}s = f\nabla_X s$$

$$\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + (Xf)s$$

をみたすものをいう。をのに対する共変微分という。

p36

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f \cdot \nabla \xi$$

共変微分を接続とも呼ぶ。

p42

定義とする。の共変微分は

によって定義される。ここに、である。

p48

におけるのに沿った共変微分は

によって定義される。ここで、はにおけるの接ベクトルである。

p53

を、正定値内積 g をもち、各点で作用が

となるベクトル束とする。このとき g は E 上の Riemann 計量を定めるという。

多様体 p153

M を n 次元多様体としてそこに一つの線形接続が与えられているとする。 M の開集合 O において二つのベクトル場 X, Y があるとき、 $\{Y$ の X による共変微分と呼ぶところのやはり O の上のベクトル場 $\nabla_X Y$ をつぎのように定義する。 $\} O$ に含まれる局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ において、線形接続の成分を $\{\Gamma_{jk}^i\}$ とし U において、

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \{ \text{小} \}$$

とするとき

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \{\text{小}\}$$

で、ここに

$$\zeta^i = \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \xi^j \eta^k \quad \{\text{小}\}$$

とする。

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$$

$$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$$

この定理は線形接続をば M 上のベクトル場 X, Y に対し第三のベクトル場 $\nabla_X Y$ を対応させる法則でをみたすものとして定義できることを示している。

接続 p76

M の局所座標系 x^1, \dots, x^n を使い

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n},$$

としたとき

$$\nabla_{e_j} e_k = \sum \Gamma_{jk}^i e_i$$

により n^3 個の関数 Γ_{jk}^i を定義する。これらの関数を ∇ の x^1, \dots, x^n に関する Christoffel の記号と呼ぶ。ベクトル場 $X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 、 $Y = \sum \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ に対しと (9.19) を使って $\nabla_X Y$ を計算すると、

$$\nabla_X Y = \sum \xi^j \nabla_j \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{ただし、} \nabla_j \eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma_{jk}^i \eta^k$$

を得る。

理論 p202

からを引くにはをへ変化させずに移動してその違いを計算しなければならない。このベクトルの移動を平行移動とよぶ。ベクトル $V|_x$ を $x + \Delta x$ へ平行移動したものを $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$ で表す。ここで成分は条件

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) \Delta x =$$

を満たすことを要請する。これらの条件は

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x) \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) \Delta x^\nu$$

と選べば満たされる。 V の x^ν に関する共変微分は

$$\lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

で定義される。

理論 p204

$V = V^\mu e_\mu$ と $W = W^\nu e_\nu$ をの元とする。このとき

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu[W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \right) e_\lambda \end{aligned}$$

となる。

多様体 p133

、U 上の各点 x で正定値対称行列 $(g_{ij}(x))$ の逆行列をとって $(g^{ij}(x))$ とする。すなわち

$$\sum_{k=1}^n g^{ik}(x)g_{kj}(x) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

とする。すると、U 上の C^∞ 関数を係数とする n 次正方行列 (g^{ij}) を得るが、これを用いて U 上の関数系 $\{\Gamma_{j \ k}^i; 1 \leq i, j, k \leq n\}$ を

$$\Gamma_{j \ k}^i = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n g^{ih} \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} \right) \quad (10)$$

によって定義しよう。

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j \ k}^i(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad () \quad (11)$$

定義 リーマン多様体 (M, g) における滑らかな曲線 $C = \{x(t); a \leq t \leq b\}$ が測地線であるとは、C が通るような各局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ において

とするとき、 $x^1(t), \dots, x^n(t)$ が方程式 (11) を満足することとする。ここに $\{\Gamma_{j \ k}^i; 1 \leq i, j, k \leq n\}$ は (10) によって定義され、クリストッフェルの記号と名づけられる U 上の関数系である。

多様体 p140

定義 n 次元可微分多様体 M の各局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ ごとに、U 上の n^3 個の C^∞ 関数の組 $\{\Gamma_{j \ k}^i; 1 \leq i, j, k \leq n\}$ が与えられつぎの条件がみたされるとき、M に線形接続 (またはアファイン接続) が与えられたといい、 $\{\Gamma_{j \ k}^i\}$ をこの線形接続の $(U; x^1, \dots, x^n)$ における成分という。いま、 $\{\Gamma_{j \ k}^i\}$ 、 $\{\Lambda_{j \ k}^i\}$ をそれぞれ局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ 、 $(V; y^1, \dots, y^n)$ における成分とし $U \cap V \neq \emptyset$ とすれば、 $U \cap V$ においては

$$\Lambda_{j \ k}^i = \sum_{p,q,r=1}^n \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial x^q}{\partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^r} \Gamma_{p \ q}^r + \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^j \partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^l}$$

がなりたつ。

測地線

曲線 C に沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ とは曲線上の各点 $x(t)$ において M への接ベクトル $Y(t)$ が与えられ、しかも M の $U \cap C \neq \emptyset$ なる局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ では表示

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n \eta^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x(t)}$$

の係数 $\eta^i(t) (1 \leq i \leq n)$ はいずれも t の C^∞ 関数であるものとする。

補題 1. 曲線 $C = \{x(t)\}$ に沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ に対して、 C に沿ったベクトル場 $\{\nabla_{x'} Y(t)\}$ がつぎの条件によって () 一意的に定義される。、 $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ 、 $Y(t) = (\eta^1(t), \dots, \eta^n(t))$ とするとき、 $\nabla_{x'} Y(t)$ は U において () の左辺を成分とするベクトル場である。すなわち

$$\nabla_{x'} Y(t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\eta^i}{dt} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j \ k}^i(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \eta^k(t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x(t)}$$

曲線 $C = \{x(t)\}$ とそれに沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ に対して同じく C に沿った補題 1 のベクトル場 $\{\nabla_{x'} Y(t)\}$ を $\{Y(t)\}$ の共変微分という。

定理 が存在して、

この状況において、の点におけるへの接ベクトルををに沿って平行移動して得られる接ベクトルという。

多様体 p147

いま、区分的に滑らかな曲線 $C = \{x(t)\}$ の上の 2 点 $x(a), x(b)$ をとる。点 $x(a)$ における M への接ベクトル u_a に対して、これを C に沿って平行移動して得られる $x(b)$ における M への接ベクトルを u_b とすれば、対応 $u_a u_b$ によって M の接ベクトル空間の写像

:

が定義される。これを曲線 C に沿った接ベクトル空間 $T_{x(a)}(M)$ の $T_{x(b)}(M)$ への平行移動という。

レヴィ・チヴィタの平行移動という。

理論 p202

からを引くにはをへ変化させずに移動してその違いを計算しなければならない。このベクトルの移動を平行移動とよぶ。ベクトル $V|_x$ を $x + \Delta x$ へ平行移動したものを $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$ で表す。ここで成分は条件

を満たすことを要請する。これらの条件は
と選べば満たされる。のに関する共変微分は

$$\lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

で定義される。多様体に計量が与えられていれば、都合のよいの選び方が存在する。これを Levi-Civita 接続とよぶ。

p204

アフライン接続 ∇ とは、写像 : で次の条件を満たすものである :

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$$

ここで f および X, Y, Z である。

M 上で、座標 $x =$ をもつチャート $(,)$ を選び m^3 個の接続係数と呼ばれる関数を

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$$

で定義する。ここで $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ は $T_p M$ の座標基底である。接続係数は基底ベクトルが点から点へいかに変化するかを指定するものである。 $V = V^\mu e_\mu$ と $W = W^\nu e_\nu$ をの元とする。このとき

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) e_\lambda \end{aligned}$$

となる。、前に得られた発見的な結果 (7.10) と一致することに注意せよ。ここに

$$\nabla_\mu W^\lambda \equiv \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} W^\nu$$

である。

理論 p207

の右辺には等しいので、接続係数は

$$= \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial x^q}{\partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^r} \Gamma^r_{pq} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^j \partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^l} \quad (7.29)$$

と変換されなければならない。

本によっては、しばしば接続係数を (7.29) のように変換されるものとして定義することもある。

接続 p76

$$T(X, Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])$$

とくと、

T をアファイン接続のねじれ率テンソルとか捩率と呼ぶ。

とおき、

$$\nabla e_k = \sum, \quad \nabla_{e_j} e_k = \sum$$

の局所座標系を使い

としたとき

$$\nabla_{e_j} e_k = \sum \Gamma^i_{jk} e_i$$

により個の関数を定義する。これらの関数をのに関する Christoffel の記号と呼ぶ。ベクトル場 $X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 、 $Y = \sum \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ に対しとを使ってを計算すると、

$$\nabla_X Y = \sum \xi^j \nabla_j \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{ただし、} \nabla_j \eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma^i_{jk} \eta^k$$

$$[\nabla_X Y = \sum \xi^j \{ \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma^i_{jk} \eta^k \} \frac{\partial}{\partial x^i}]$$

を得る。

によりテンソルの成分を定義すると

$$T^i_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj})$$

接続 p88

多様体にアファイン接続が与えられているとする。上の曲線が局所座標系を使って
で与えられているとする。の速度ベクトルをと書き、

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0 \quad (11.1)$$

が成り立つとき、を測地線と呼ぶ。前節の言葉で言えば、はに沿ったベクトル場が平行なことである。で導入したの記号を使うと、(11.1) は

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$$

と書ける。

この事実は $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ のとき、すなわち、ねじれ率が 0 のときには特に便利である。

多様体 p161

例 上のベクトル場を固定し、そのベクトル場による共変微分でを動かしてみれば、は上に定義されの値をとる線形な写像である。定理によりこれは次テンソル場を定義する。このテンソル場を ∇Y で示し、 Y の共変微分という。

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$$

とおく。線形接続の条件式 4.2 (1) を見れば (T^i_{jk}) は定理 1 の条件をみたすことがわかる。よってにおいて $T = (T^i_{jk})$ となる (1,2) 次テンソル場が存在する。この T を与えられた線形接続の捩率テンソル場という。がリーマン計量をもちがそのリーマン接続の場合にはの定義 4.1 (10) から直ちに $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ を知る。ゆえにこのときには $T = 0$ である。

多様体 p168

定義 多様体上のテンソル場が与えられた線形接続について平行なテンソル場であるとは、上の任意のベクトル場について $\nabla_X F = 0$ となることとする。このとき $\nabla F = 0$ と表わす。

p207

ここで $T^\kappa_{\lambda\mu} \equiv \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$ およびである。テンソルは下付添字に関して反対称で、捩率テンソルとよばれる。

捩率テンソルが多様体上でゼロになっていれば、計量接続は Levi-Civita 接続とよばれる。

p209

多様体の曲がり具合を測る「ものさし」としての本質的な幾何学的意味をもち得ない。そこで本質的な意味をもつものとして捩率テンソルと曲率テンソルを、それぞれ

$$T(X, Y)$$

$$R(X, Y, Z)$$

によって定義する。

p210

、 $X =$ と $Y =$ をの無限小ベクトルとする。これらのベクトルを微小な移動と見なすと、それらは p の近くに 2 つの点 q と s を定める。ベクトル X を直線 ps に沿って平行移動すると、その成分がであるベクトル sr_1 を得る。 p と r_1 を結ぶ位置ベクトルは

$$=$$

である。同様に pq に沿って平行移動すると、ベクトル

$$=$$

となる。

$$=$$

となる。従って捩率テンソルは無限小変位ベクトルおよびそれらの平行移動によりできる図形の、平行四辺形から欠けた部分を測る。

理論 p215

アファイン接続の中で Levi-Civita 接続とよばれる特別な接続があり、。接続 ∇ は、その率テンソルがゼロとなるととき対称接続とよばれる。座標基底を用いると対称接続の接続係数は

$$=$$

を満たす。

複素幾何 p115

定理 5.4 Hermite 多様体 (X, g) に対して次の 2 条件は互いに同値である。

標準接続のねじれ率が 0 である。

基本 2 次微分形式が閉じている、すなわち $= 0$ 。

系 5.5 Hermite 多様体 (X, g) が Kahler 多様体であるための必要十分条件は、その標準接続と Levi-Civita 接続が一致することである。

p208

定義 曲面上の曲線は、その加速度ベクトルがつねに接平面に垂直のとき、すなわち $(D_h \dot{c})(t) \equiv 0$ であるとき測地線という。

p210

共変微分

p211

、平行移動の概念を定義することができる。、曲線上の任意の 2 点に対し、線形写像をつぎのように構成するのである。を任意の接ベクトルとする。このとき曲線に沿うベクトル場であって

$$Y(t_0) = Y_0$$

$$(D_h Y)(t) \equiv 0$$

となるものが一意的存在することがわかる。そこでとおけばこれが求める写像である。を曲線に沿って平行移動して得られるベクトルという。

微分形式の幾何学 p213

定義 多様体上のベクトルバンドルの接続とは、双線形写像

$$\nabla : (M)(E)$$

であって、任意のに対して、二つの条件

$$\nabla_{fX}s = f\nabla_X s$$

$$\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + (Xf)s$$

をみたすものをいう。をのに対する共変微分という。

微分形式の幾何学 p234

接続

p

さらに U 上の任意のベクトル場 Y を $Y =$ と表すとき、

$$\nabla_X Y =$$

によって定義されるベクトル場をの方向のレビ・チビタ共変微分という。

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + df(X)Y$$

$$\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$$

一般に、に対してを対応させる写像が、上の性質 (1.36)-(1.39) をみたすとき、を上の共変微分または線形接続という。

曲線と曲面の微分幾何 p102

各成分をについて微分することにより $X'(t)$ (または dX/dt と書く)

$$X' = \frac{DX}{dt} + A_X$$

() いま、曲面だけを考えて、周囲の空間を全く無視すると、意味のあるのはの接成分だけで、これを共変微分と呼ぶ。

p106

共変微分

p274

定義 V を \mathbb{R} 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式 ω が対称 k 次形式であるとは、 $X_1, X_2, \dots, X_k \in V$ の間にどのような置換を施しても、 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ の値が変わらないことである。

p275

{ 定義 級多様体 M 上のテンソル場 $\omega =$ が k 次対称テンソル場であるとは、 M の各点 p において、 ω_p が $T_p(M)$ 上の対象 k 次形式になっていることである。}

、 V の内積がある。これは、 V 上の対称 2 次形式 ω であって、更に次の意味で正定値なものである。すなわち、 V の任意の 0 でないベクトル X について、 $\omega(X, X) > 0$ がなりたつようなものである。

{たとえば、次元数ベクトル空間の場合、 $X = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 、 $Y = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ に対し、

$$\omega(X, Y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$$

とおけば、。}

{ 定義 19 級多様体 M 上の 2 次の対称テンソル場 ω が、 M の各点 p において正定値であるとき ω を M 上のリーマン計量という。

つまり、 M の各点 p の接ベクトル空間 $T_p(M)$ に内積を与えるようなものがリーマン計量 ω である。通常、リーマン計量は g という記号で表わされる。

$$[g(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \eta^m \frac{\partial}{\partial x^m})]$$

リーマン計量 g がひとつ与えられた多様体 (M, g) のことをリーマン多様体とよぶ。

p270

定義 19 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式 (正確には、 k 次の多重線型形式) とは、 V の k 個の直積から R への写像

$$\omega : V \times V \times \cdots \times V \rightarrow R$$

であって、 $\{\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ が各 X_i に関して線型であるようなものを言う。

たとえば、 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ が第 1 の変数 X_1 に関して線型であるというのは、任意の $X, Y \in V$ と任意の実数 $a, b \in R$ について、

$$\omega(aX + bY, X_2, \dots, X_k) = a\omega(X, X_2, \dots, X_k) + b\omega(Y, X_2, \dots, X_k)$$

がなりたつことである。

$\{V$ 上の k 個の 1 次形式を任意にとる。このとき、
という記号で表わされる V 上の k 次形式が、次の式で定義できる。

$$(\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \cdots \otimes \eta_k)(X_1, X_2, \dots, X_k) = \eta_1(X_1)\eta_2(X_2)\cdots\eta_k(X_k)$$

$\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \cdots \otimes \eta_k$ を $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ のテンソル積とよぶ。

幾何学 p144

一般の実線形空間に対し、2 次形式とは、 \cdot, \cdot に対し、という双 1 次形式 $B : V \times V \rightarrow R$ があることである。さらに次形式が正値であるとは $q(v)=0$ ならば $v=0$ を満たすことである。上の双 1 次形式は、対称性 $B(u, v) = B(v, u)$ を満たす。

この g をリーマン計量と呼ぶ。

のまわりの座標近傍により、 \cdot, \cdot に対し基底が同時に定まる。そのような基底について、 $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と書かれ、 $g(v, v) =$ と書かれる。

このようなリーマン計量を持つ多様体をリーマン多様体と呼ぶ。

定義 7.2.1 リーマン計量と呼ぶことが多い。

多様体入門 p

との直積集合からへの写像が条件

$$(a + b, a') = (a, a') + (b, a')$$

$$(a, a' + b') = (a, a') + (a, b')$$

$$(\cdot)(\cdot)(\cdot)$$

をみたすとき、 \cdot, \cdot を上の双一次形式とよぶ。

さて V 上の (\cdot, \cdot) 双一次形式とする。任意の v に対して、

がなりたつとき、 \cdot, \cdot を V 上の対称双一次形式とよぶ。

V 上の正則な対称双一次形式のことを \cdot, \cdot の内積とよぶ。すなわち

V 上の対称双一次形式が

$$(x, x) > 0 \quad x \neq 0$$

をみたすとき、 \cdot, \cdot を \cdot, \cdot の正値内積とよぶ。

p41

g_{ij} がすべて M の各点の近傍で C^r 級であるとき、 M の各点 p に $T_p(M)$ の正値な内積 g_p を対応させる対応 $g : p \mapsto g_p$ を M の C^r 級リーマン計量とよび、

リーマン計量 g をそなえた多様体のことをリーマン多様体とよぶ。

2.2.4 { 幾何学 p43 }

内積

幾何学 p199

定義 M を微分多様体とする。 M 上の Riemann 計量 g とは、各点 $p \in M$ で次の公理

$$g_p(U, V) = g_p(V, U)$$

$g_p(U, U) = 0$ 、ただし等式は $U=0$ のときのみ成り立つ
を満たす M 上の型テンソルである。ここで $U, V \in T_p M$ 、である。手短かにいえば正定値な対称双
1 次形式である。

計量 g が存在する場合は、2 つのベクトル $U, V \in T_p M$ の内積を $g_p(U, V)$ によって定義する。 g_p は
写像 $T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ なので、線形写像 $g_p(U, \cdot) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ を $V \mapsto g_p(U, V)$ によって定義することができる。

曲線と曲面の微分幾何 p97

$$\{\xi + \eta\}_{(u,v)=(a,b)}$$

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v}\right)_{(u,v)=(a,b)}$$

という微分作用そのものを接ベクトルと考えることにする。

領域 D の各点に 1 つずつ接ベクトルをつけたとき、それを D 上の接ベクトル場と呼ぶ。

30p226

いま、 M の各点 x に対し、接空間に、内積が与えられているとする。

局所座標近傍上での基底

を考え、各点に対して

$$=$$

とおく。

定義 各点 x に対し $T(M)_x$ に与えられた内積 $(\cdot, \cdot)_x$ が、次の条件 (R) をみたすとき、 M にリー
マン計量が与えられたという：

(R) 各

p11

を上のベクトル空間とする。との直積集合からへの写像が条件
をみたすとき、を上の双一次形式とよぶ。

p12

を V 上の (\cdot, \cdot) 双一次形式とする。任意の $\alpha, \beta \in V$ に対して、

$$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$$

がなりたつとき、を V 上の対称双一次形式と

V 上の正則な対称双一次形式のことを V の内積とよぶ。すなわち、

の二条件をみたす場合をいう。 V 上の対称双一次形式が

をみたすとき、を V の正値内積とよぶ。

p153

座標基底 $\{e_i\} = \{\partial/\partial x^i\}$ を選ぶ。この基底で ω の成分は

$$\omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}) = \omega_{i_1 i_2 \dots i_r}$$

$$[\omega(\partial/\partial x^{i_1}, \partial/\partial x^{i_2}, \dots, \partial/\partial x^{i_r}) = \omega_{i_1 i_2 \dots i_r}]$$

である。

p280

定理 19.3 V の基底をとり、それに対応するの双対基底をとる。このとき、 ω がの基底になる。

ω をの任意の元として、実数を

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$$

と定義すれば、

$$\omega =$$

がなりたつ。

ω の各点において、 ω が、に対応するの双対基底になっている。したがって、定理 19.3 により、 ω の各点における交代次形式を

$$\omega =$$

の形に一意的に表わすことができる。この係数は、点で決まる実数だから、これを、

という関数とみなせる。

と局所座標表示できたわけである。

p108

複素多様体 X の Hermite 計量はとしても定義できるが、ここでは X の Riemann 計量 g で次の条件を満たすものとして定義する。

$$g(J, J) = g(J, J)$$

多様体入門 p99

M のリーマン計量 g が M の各点 p と任意の $u, v \in T_p(M)$ について

$$g_p(J_p u, J_p v) = g_p(u, v)$$

をみたすとき、 g を複素多様体 M のエルミット計量とよぶ。

p275

複素多様体 M の Riemann 計量 g が、各点 $p \in M$ と任意の $X, Y \in T_p M$ に対して

$$g_p(J_p X, J_p Y) = g_p(X, Y)$$

を満たすとき g は Hermite 計量とよばれる。

p115

上の定理の条件を満たすような Hermite 計量 g を Kahler 計量とよび、

p280

定義 8.4 Kahler 多様体とは Hermite 多様体 (M, g) で、その Kahler 形式が閉形式であるものをいう。計量 g は M の Kahler 計量とよばれる。

p259

定義 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の 1 次形式とは、 V から R への写像

$$\omega : V \rightarrow R$$

であって、任意のベクトル $X, Y \in V$ と任意の実数 $a, b \in R$ について

$$\omega(aX + bY) = a\omega(X) + b\omega(Y)$$

がなりたつようなものをいう（すなわち、 V から R への線型写像 $\omega : V \rightarrow R$ のことである）。

V 上の 1 次形式全体のなす集合を V^* と書くことにする。

定義 V^* を、 V の双対ベクトル空間または双対空間という。

e_1, e_2, \dots, e_m を、任意に選んだ V の基底とする。 V の任意のベクトル X は

$$X = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m \quad (a_i \in R)$$

のように、 e_1, e_2, \dots, e_m の次結合で書ける。番号 $i (1 \leq i \leq m)$ をひとつ固定して、ベクトル X に、 e_i の係数 a_i を対応させる写像 $\omega_i : V \rightarrow R$ を考える：

$$\omega_i(X) = a_i$$

この写像 $\omega_i : V \rightarrow R$ は明らかに線型写像であるから、 ω_i は V 上の 1 次形式と考えられる。

番号 i を 1 から m まで動かして得られる $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ という m 個の 1 次形式が、実は V^* の基底になるのである。

定義 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ を、に対応する双対基底という。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} f_{i_1 \cdots i_k}() dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_j}() dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \right] \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} f_{i_1 i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \{f_{1i_2} dx_1 \wedge dx_{i_2} + f_{2i_2} dx_2 \wedge dx_{i_2} + f_{3i_2} dx_3 \wedge dx_{i_2}\} \\
&= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{21} dx_2 \wedge dx_1 + f_{22} dx_2 \wedge dx_2 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{31} dx_3 \wedge dx_1 + f_{32} dx_3 \wedge dx_2 + f_{33} dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \{f_{23} - f_{32}\} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \{f_{31} - f_{13}\} dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \\
d\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \frac{\partial f_{i_1 i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \left\{ \frac{\partial f_{1i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{2i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{3i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_{i_2} \right\} \\
&= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \{f_{23} - f_{32}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \{f_{31} - f_{13}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
d\omega &= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \right] + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \left[\frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{22}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{33}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_3 \right] + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \left[+ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] \\
& + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \left[+ \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{33}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_3 \right]
\end{aligned}$$

{ P290 }

m 次元級多様体 M 上の k 次微分形式を座標近傍 $(U; x_1, x_2, \dots, x_m)$ 上で局所座標表示したものが

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

であったとする。

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

微分形式の幾何学 p61

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

を R^n 上の k 次の微分形式、。上記を簡単に、 $f_I(x)$ と記す場合もある。外微分とは、つぎのように定義される線形写像

$$d: A^k(R^n) \rightarrow A^{k+1}(R^n)$$

のことである。すなわち $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ に対して

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

30p213

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

微分位相 p35

$$\sum_{h_1} \dots \sum_{h_p} a_{h_1 \dots h_p} dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_p}$$

$$du \wedge du = 0, \quad dv \wedge dv = 0, \quad du \wedge dv = -dv \wedge du$$

次に外微分 d を

0 次微分形式 (f) に対しては

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

1 次微分形式 $= f du + g dv$ に対しては

$$= df \wedge du + dg \wedge dv$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv$$

2 次微分形式 $= f du \wedge dv$ に対しては

$$= df \wedge du \wedge dv$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du \wedge dv = 0$$

と定義する。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \\ &= 0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + 0 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + 0 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{21} dx_2 \wedge dx_1] + [f_{22} dx_2 \wedge dx_2] + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{31} dx_3 \wedge dx_1] + [f_{32} dx_3 \wedge dx_2] + [f_{33} dx_3 \wedge dx_3] \\ &= f_{23} dx_2 \wedge dx_3 - f_{13} dx_3 \wedge dx_1 + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

ストークスの定理 { P305 }

定理 { ストークスの定理 }

$$\int_N d\eta = \int_{\partial N} \eta$$

証明

$$\eta = \sum_{i=1}^m g_i dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_i \wedge \dots \wedge dx_m$$

$d\hat{x}_i$ は dx_i を除くことを表わす。

$$d\eta = \sum_{i=1}^m \{-1\}^{i-1} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_m$$

。により、

$$\begin{aligned} \int_N d\eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) dx_m dx_1 \dots \\ &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \{g_1(a, \dots, x_m) - g_1(0, \dots, x_m)\} \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a \{g_m(x_1, \dots, a) - g_m(x_1, \dots, 0)\} dx_1 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial N} \eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots g_1(a, \dots, x_m) \dots dx_m - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots g_1(0, \dots, x_m) \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a g_m(x_1, \dots, a) dx_1 \dots - \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a g_m(x_1, \dots, 0) dx_1 \dots \end{aligned}$$

[次のページへ続く。]

例

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(a, x_2) dx_2 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(0, x_2) dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, a) dx_1 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, 0) dx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(a, x_2, x_3) dx_2 dx_3 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(0, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, a, x_3) dx_1 dx_3 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, 0, x_3) dx_1 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, a) dx_1 dx_2 - \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

{ 微分幾何 P124 }

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right\} du dv \\ &= \int_0^b \int_0^a \frac{\partial g}{\partial u} du dv - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial f}{\partial v} dv du \\ &= \int_0^b [g(a, v) - g(0, v)] dv - \int_0^a [f(u, b) - f(u, 0)] du \end{aligned}$$