

接続の微分幾何 p76

、TM の接続を M のアフィン接続と呼ぶ。

$$T(X, Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \quad (9.1) \{sn\}$$

とみると、

ベクトル場 $T(X, Y)$ が点で与える接ベクトル $T(X, Y)_x \in T_x M$ にはよって定まることがわかる。
すなわち、M の各点 x で T は写像

$$T_x M \times T_x M \longrightarrow T_x M$$

を定義するからタイプ (1,2) のテンソル場である $\{s\}$ 。T をアフィン接続 ∇ の ねじれ率テンソル とか捩率と呼ぶ。 $T(X, Y)$ が X, Y に関して交代、すなわち

$$T(X, Y) = -T(Y, X)$$

であることは定義から明白。したがって、T は TM に値をとる 2 次微分形式とも考えられる。

接ベクトル束 TM の局所標構 e_1, \dots, e_n とその双対基 $\theta^1, \dots, \theta^n$ を考える*。 $\theta^1, \dots, \theta^n$ は 1 次微分形式で

ねじれ率 T を

$$T = \sum \Theta^i e_i \in A^2(TM) \quad (9.4)$$

と書いてみる。ここで $\Theta^i, i = 1, \dots, n$, は 2 次微分形式*。(9.1) で $X = e_j, Y = e_k$ とおき、

$$\nabla e_k = \sum \omega_k^i e_i \quad *1, \quad \nabla_{e_j} e_k = \sum \omega_k^i(e_j) e_i$$

を使うと

$$2T(e_j, e_k) = \sum (\omega_k^i(e_j) - \omega_j^i(e_k)) e_i - [e_j, e_k]$$

となる*。これを $\theta^i(*)$ の*のところに代入し、1 章の (2.3)、(2.11) を使って

$$2\theta^i(T(e_j, e_k)) = \omega_k^i(e_j) - \omega_j^i(e_k) - \theta^i([e_j, e_k]) = 2 \sum (\omega_l^i \wedge \theta^l)(e_j, e_k) + 2d\theta^i(e_j, e_k)$$

を得る。左辺は、(9.4) を見れば $2\Theta^i(e_j, e_k)$ となるから*3、

$$\Theta^i = d\theta^i + \sum \omega_j^i \wedge \theta^j \quad ()$$

$$\left[\begin{array}{c} \Theta^1 \\ \vdots \\ \Theta^n \end{array} \right] = d \left[\begin{array}{c} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^n \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} \omega_1^1 & \cdots & \omega_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1^n & \cdots & \omega_n^n \end{array} \right] \wedge \left[\begin{array}{c} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^n \end{array} \right]$$

を得るが、

アフィン接続の第一および第二構造方程式と呼ぶ。

説明

{ 理論 p209 ~ }

{ 理論 p210 ~ }

$$[T(\sum X^i e_i, \sum Y^j e_j)]$$

$$[T(\sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j})]$$

* $e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n}$ とは限らない?

$$[T(,) = \sum \Theta^i(,) e_i]$$

*1 p38

$$[\nabla e_k() = \sum \omega_k^i() e_i]$$

*

$$2T(e_j, e_k) = \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_k} e_j - [e_j, e_k] = \sum \omega_k^i(e_j) e_i - \sum \omega_j^i(e_k) e_i - [e_j, e_k]$$

$$\{\omega \wedge \omega'\}(X, Y) = \{\omega(X)\omega'(Y) - \omega(Y)\omega'(X)\}$$

$$d\omega(X, Y) = \{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\}$$

$$\{\omega^i_l \wedge \theta^l\}(e_j, e_k) = \{\omega^i_l(e_j)\theta^l(e_k) - \omega^i_l(e_k)\theta^l(e_j)\}$$

$$d\theta^i(e_j, e_k) = \{e_j(\theta^i(e_k)) - e_k(\theta^i(e_j)) - \theta^i([e_j, e_k])\}$$

*3 $\theta^i(\Theta^i(e_j, e_k)e_i) = \Theta^i(e_j, e_k)\theta^i(e_i) = \Theta^i(e_j, e_k)$

$$[\Theta^i(,) = d\theta^i(,) + \sum \{\omega_j^i \wedge \theta^j\}(,)]$$

p79

M の局所座標系 x^1, \dots, x^n を使い

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n},$$

としたとき

$$\nabla_{e_j} e_k = \sum \Gamma^i_{jk} e_i \quad (9.19) \quad \{sn\}$$

$$[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i}]$$

により n^3 個の関数 Γ^i_{jk} を定義する{s}。これらの関数を ∇ の x^1, \dots, x^n に関する Christoffel の記号と呼ぶ{s}。ベクトル場 $X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 、 $Y = \sum \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ に対し (1.5) と (9.19) を使って $\nabla_X Y$ を計算すると{s}*、

$$\nabla_X Y = \sum \xi^j \nabla_j \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{ただし、} \nabla_j \eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma^i_{jk} \eta^k \quad \{sn\}$$

を得る。

解説

*

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \sum \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \xi^j \frac{\partial \eta^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} + \eta^k \nabla_{\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^j \eta^k \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

説明 { p204 }

$V = V^\mu e_\mu$ と $W = W^\nu e_\nu$ をの元とする。このとき

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu [W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) e_\lambda \end{aligned}$$

となる。

記号

$$\nabla_X Y = \sum \xi^j \left\{ \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma^i_{jk} \eta^k \right\} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

リーマン幾何学 p26

$\tau: E \rightarrow M$ をベクトル束、 (E) を E の断面のつくる加群とする。 M のベクトル場 $X \in \mathcal{X}(M)$ と E の断面に対してが対応し次の条件

$$\nabla_{fX+gY}\xi = f\nabla_X\xi + g\nabla_Y\xi, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

$$\nabla_X(\xi + \eta) = \nabla_X\xi + \nabla_X\eta$$

$$\nabla_X(f\xi) = (Xf)\xi + f\nabla_X\xi, \quad \xi \in, f \in$$

をみたすとき、 E に線形接続が与えられたといい、 $\nabla_X\xi$ を ξ の X による 共変微分 という。

$() = \mathcal{X}(M)$ であるから

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (X, Y \in \mathcal{X}(M))$$

を考えれば T は-線形で (1,2)-型テンソル場を定義する。これを捩率テンソルという。

7.3.1 { p209 }

はテンソルではないので、多様体の曲がり具合を測る「ものさし」としての本質的な幾何学的意味をもち得ない。そこで本質的な意味をもつものとして捩率テンソル T : と曲率テンソルを、それぞれ

$$T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

$$R(X, Y, Z)$$

によって定義する。

$$T(X, Y) = -T(Y, X),$$

を満たす。

$$T(X, Y) = X^\mu Y^\nu T(e_\mu, e_\nu)$$

7.3.2 { p210 }

、 $X = \varepsilon^\mu e_\mu$ と $Y = \delta^\mu e_\mu$ を $T_p M$ の無限小ベクトルとする。これらのベクトルを微小な移動と見なすと、それらは p の近くに 2 つの点 q と s を定める。ベクトル X を直線 ps に沿って平行移動すると、その成分が $\varepsilon^\mu - \varepsilon^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \delta^\nu$ であるベクトル sr_1 を得る。 p と r_1 を結ぶ位置ベクトルは

$$pr_1 = ps + sr_1 = \delta^\mu + \varepsilon^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \varepsilon^\lambda \delta^\nu$$

である。同様に δ^μ を pq に沿って平行移動すると、ベクトル

$$pr_2 = pq + qr_2 = \varepsilon^\mu + \delta^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \varepsilon^\lambda \delta^\nu$$

となる。

$$r_2 r_1 = p r_2 - p r_1 = (\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}) \varepsilon^\lambda \delta^\nu = T^\mu{}_{\nu\lambda} \varepsilon^\lambda \delta^\nu$$

となる。従って捩率テンソルは無限小変位ベクトルおよびそれらの平行移動によりできる図形の、平行四辺形から欠けた部分を測る。

1.4.3. The Levi-Civita Connection.

"torsion-free," i.e., $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

リーマン幾何学 p38

定理 リーマン多様体 M には次の条件をみたす TM の線形接続がただ 1 つ存在する： に対して

- () $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_XZ + \nabla_YZ, \quad \nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$
- () $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ, \quad \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_XY$
- () $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$
- ()

この線形接続をレビ・チビタ接続、。特にチャート () に関する自然基底 $\{\partial_i = \partial/\partial x^i\}$ に対して、 m^3 個の U 上の級関数 $\Gamma_i^k{}_j$ が

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_i^k{}_j\partial_k$$

によって決まる。 $\Gamma_i^k{}_j$ をクリストッフェルの記号と呼ぶ。逆にを $X|U = X^i\partial_i, Y|U = Y^j\partial_j$ と成分表示するとき

$$(\nabla_XY)|U = (X \cdot Y^k + \Gamma_i^k{}_jX^iY^j)\partial_k$$

と書ける。

$$\nabla_{\partial/\partial t}Y =$$

p

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial a}{\partial t}$$

理論 p204

アファイン接続 ∇ とは、写像 : で次の条件を満たすものである :

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$$

ここで f および X, Y, Z である。

M 上で、座標 $x =$ をもつチャート $(,)$ を選び m^3 個の接続係数と呼ばれる関数を

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$$

で定義する。ここで $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ は $T_p M$ の座標基底である。接続係数は基底ベクトルが点から点へいかに変化するかを指定するものである。 $V = V^\mu e_\mu$ と $W = W^\nu e_\nu$ をの元とする。このとき

$$\begin{aligned}\nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu[W^\nu]e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) e_\lambda \\ &= \left[V^\mu \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} e_\lambda + V^\mu W^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e_\lambda \right]\end{aligned}$$

となる。

多様体 p153

M を n 次元多様体としてそこに一つの線形接続が与えられているとする。M の開集合 O において二つのベクトル場 X, Y があるとき、{ Y の X による共変微分と呼ぶところのやはり O の上のベクトル場 $\nabla_X Y$ をつぎのように定義する。} O に含まれる局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ において、線形接続の成分を $\{\Gamma_{j \ k}^i\}$ とし U において、

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \{ 小 \}$$

とすると

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \{ 小 \}$$

$$[\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j \ k}^i \xi^j \eta^k \frac{\partial}{\partial x^i}]$$

で、ここに

$$\zeta^i = \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j \ k}^i \xi^j \eta^k \quad \{ 小 \}$$

とする。

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$$

$$\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$$

この定理は線形接続をば M 上のベクトル場 X, Y に対し第三のベクトル場 $\nabla_X Y$ を対応させる法則でをみたすものとして定義できることを示している。

p77

(2.2) で定義した $D : A^1(TM) \rightarrow A^2(TM)$ を使って

$$\begin{aligned} D(\sum \theta^i e_i) &= \sum d\theta^i e_i - \sum \theta^i \wedge \nabla e_i \\ &= \sum (d\theta^i - \sum \theta^j \wedge \omega_j^i) e_i \\ &= \sum \Theta^i e_i = \end{aligned}$$

を得る。さらに両辺の D をとると

$$D^2(\sum \theta^i e_i) = D \sum \Theta^i e_i = DT$$

左辺は (2.5) により

$$D^2(\sum \theta^i e_i) = \sum \theta^i \wedge D^2 e_i = \sum \theta^i \wedge Re_i =$$

真中の項は

これを比較して

$$\sum \theta^i \wedge Re_i = DT \in \quad (9.8)$$

を得る。(9.8) の 3 次微分形式にベクトル場 X, Y, Z を代入して、

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 2(DT)(X, Y, Z)$$

とも表わせる。これらを Bianchi の第一恒等式と呼ぶ。

リーマン p46

定理 $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ に対して

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (\in \mathcal{X}(M))$$

と定義すれば R は級型テンソル場であり、次の性質をみたす。

()

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

(第 1 ビアンキの公式)

()

()

$$(\nabla_X R)(Y, Z)U + (\nabla_Y R)(Z, X)U + (\nabla_Z R)(X, Y)U = 0$$

(第 2 ビアンキの公式)

7.4.5 { p221 }

定理 ()

$= 0$ 第 Bianchi 恒等式

$= 0$ 第 Bianchi 恒等式

7.8.2 { p236 }

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

$$d\omega + \omega \wedge \omega = R$$

Bianchi 恒等式

p79

M の局所座標系 x^1, \dots, x^n を使い

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n},$$

としたとき

$$\nabla_{e_j} e_k = \sum \Gamma^i_{jk} e_i$$

により n^3 個の関数 Γ^i_{jk} を定義する。これらの関数を ∇ の x^1, \dots, x^n に関する Christoffel の記号と呼ぶ。
ベクトル場 $X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 、 $Y = \sum \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ に対し (9.19) を使って $\nabla_X Y$ を計算すると {酒}

$$\nabla_X Y = \sum \xi^j \nabla_j \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{ただし、} \nabla_j \eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma^i_{jk} \eta^k$$

を得る。

説明

p204

$V = V^\mu e_\mu$ と $W = W^\nu e_\nu$ をの元とする。このとき

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu [W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) e_\lambda \end{aligned}$$

となる。

p38

定理 リーマン多様体 M には次の条件をみたす TM の線形接続がただ 1 つ存在する： に対して

- (i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
- (ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad \nabla_X (fY) = (Xf)Y + f \nabla_X Y$
- (iii) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
- (iv)

この線形接続をレヴィ・チビタ接続、特にチャート (i) に関する自然基底 $\{\partial_i = \partial/\partial x^i\}$ に対して、 m^3 個の U 上の級関数 Γ^k_{ij} が

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k$$

によって決まる。 Γ^k_{ij} をクリストッフェルの記号と呼ぶ。逆に $X|U = X^i \partial_i$ 、 $Y|U = Y^j \partial_j$ と成分表示するとき

$$(\nabla_X Y)|U = (X \cdot Y^k + \Gamma^k_{ij} X^i Y^j) \partial_k$$

と書ける。

例

$\nabla_X Y$ をつぎのように定義する。

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とすると

$$\nabla_X Y = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^j \eta^k \Gamma_{j \ k}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$X = 1 \frac{\partial}{\partial x^1} + 0 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$\nabla_X Y = 1 \frac{\partial \eta^1}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + 1 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2}$$

微分形式の幾何学 p215

$$d\theta^i = -\sum \omega_j^i \wedge \theta^j$$

をみたすように値をとる上の形式が、ただ一つ存在する。

p235

正規直交標構

p236

定理接続 1-形式は Cartan 構造方程式

$$d\theta^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge \theta^\beta = T^\alpha$$

を満たす。ここで捩率 2-形式 $T^\alpha \equiv$ と曲率 2-形式を導入した。

7.8.4 { p239 }

$$d\theta^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge \theta^\beta = 0$$

9.4.2 { p21 }

フレーム束

微分形式の幾何学 p197

定義 多様体 M 上のベクトルバンドル $\pi: E \rightarrow M$ の接続とは、双線形写像

$$\nabla: (M)(E)$$

であって、任意の $f \in X, s \in \Gamma(E)$ に対して、二つの条件

$$() \quad \nabla_{fX}s = f\nabla_X s$$

$$() \quad \nabla_X(fs) = f\nabla_X s + (Xf)s$$

をみたすものをいう。 $\nabla_X s$ を s の X に関する共変微分という。

微分形式の幾何学 p201

構造方程式と呼ばれる。

線形写像

を誘導し、この場合、接続の条件 (ii) は

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$$

と表わされることになる。

接続 p76

M の局所座標系 x^1, \dots, x^n を使い

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n},$$

としたとき

$$\nabla_{e_j} e_k = \sum \Gamma^i_{jk} e_i$$

により n^3 個の関数 Γ^i_{jk} を定義する。これらの関数を ∇ の x^1, \dots, x^n に関する Christoffel の記号と呼ぶ。ベクトル場 $X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 、 $Y = \sum \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ に対し (9.19) を使って $\nabla_X Y$ を計算すると、

$$\nabla_X Y = \sum \xi^j \nabla_j \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{ただし、} \nabla_j \eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma^i_{jk} \eta^k$$

を得る。

リーマン幾何学 p26

$\tau: E \rightarrow M$ をベクトル束、 τ の断面のつくる加群とする。のベクトル場との断面に対してが対応し次の条件

$$\nabla_{fX+gY}\xi = f\nabla_X\xi + g\nabla_Y\xi$$

$$\nabla_X(\xi + \eta) = \nabla_X\xi + \nabla_X\eta$$

$$\nabla_X(f\xi) = (Xf)\xi + f\nabla_X\xi, \quad \xi \in, f \in$$

をみたすとき、 E に線形接続が与えられたといい、 $\nabla_X\xi$ を ξ の X による共変微分という。

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

これを捩率テンソルという。

理論 p202

からを引くにはをへ変化させずに移動してその違いを計算しなければならない。このベクトルの移動を平行移動とよぶ。ベクトル $V|_x$ を $x + \Delta x$ へ平行移動したものを $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$ で表す。ここで成分は条件

$$\begin{aligned} \tilde{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x)\Delta x \\ = \end{aligned}$$

を満たすことを要請する。これらの条件は

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x)\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x)\Delta x^\nu$$

と選べば満たされる。 V の x^ν に関する共変微分は

$$\lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

で定義される。

多様体 p140

定義 n 次元可微分多様体 M の各局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ ごとに、 U 上の n^3 個の C^∞ 関数の組 $\{\Gamma_{j\ k}^i; 1 \leq i, j, k \leq n\}$ が与えられつぎの条件がみたされるとき、 M に線形接続 (またはアファイン接続) が与えられたといい、 $\{\Gamma_{j\ k}^i\}$ をこの線形接続の $(U; x^1, \dots, x^n)$ における成分という。いま、 $\{\Gamma_{j\ k}^i\}$ 、 $\{\Lambda_{j\ k}^i\}$ をそれぞれ局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ 、 $(V; y^1, \dots, y^n)$ における成分とし $U \cap V \neq \emptyset$ とすれば、 $U \cap V$ においては

$$\Lambda_{j\ k}^i = \sum_{p,q,r=1}^n \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial x^q}{\partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^r} \Gamma_{p\ q}^r + \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^j \partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^l}$$

がなりたつ。

測地線

曲線 C に沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ とは曲線上の各点 $x(t)$ において M への接ベクトル $Y(t)$ が与えられ、しかも M の $U \cap C \neq \emptyset$ なる局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ では表示

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n \eta^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x(t)}$$

の係数 $\eta^i(t) (1 \leq i \leq n)$ はいずれも t の C^∞ 関数であるものとする。

補題 1. 曲線 $C = \{x(t)\}$ に沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ に対して、 C に沿ったベクトル場 $\{\nabla_{x'} Y(t)\}$ がつぎの条件によって () 一意的に定義される。、 $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ 、 $Y(t) = (\eta^1(t), \dots, \eta^n(t))$ とするとき、 $\nabla_{x'} Y(t)$ は U において () の左辺を成分とするベクトル場である。すなわち

$$\nabla_{x'} Y(t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\eta^i}{dt} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j\ k}^i(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \eta^k(t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x(t)}$$

曲線 $C = \{x(t)\}$ とそれに沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ に対して同じく C に沿った補題 1 のベクトル場 $\{\nabla_{x'} Y(t)\}$ を $\{Y(t)\}$ の共変微分という。

定理 が存在して、

この状況において、の点におけるへの接ベクトルををに沿って平行移動して得られる接ベクトルという。

多様体 p161

$$T(X, Y) =$$

接続の微分幾何 p36

E の切断の全体を $\Gamma(E)$ と書く。 M 上の $(\)$ 関数の全体を $A^0(M)$ と書くことにした。

E の共変微分作用素あるいは単に共変微分とは、線形写像

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow$$

で Leibniz の公式

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f \cdot \nabla\xi,$$

を満たすものであると定義する。。接ベクトル $X \in T_x M$ に対し $\nabla\xi$ の値 $\nabla\xi(X)$ は E_x の元である。

$$\nabla\xi(X) = \nabla_X \xi$$

とも書き、 $\nabla_X \xi$ を ξ の X 方向の共変微分と呼ぶ。したがって各 $X \in T_x M$ に対し

$$\nabla_X : \Gamma(E) \longrightarrow E_x$$

は線形写像で

$$\nabla_X(f\xi) = (Xf) \cdot \xi + f \cdot \nabla_X \xi, \quad f \in A^0(M), \xi \in \Gamma(E)$$

を満たし、

共変微分を接続とも呼ぶ。

ベクトル束 E は局所的には直積だから、局所的には一次独立な切断 e_1, \dots, e_r が存在する。そのような (e_1, \dots, e_r) を E の局所標構場と呼ぶ。

$$\nabla e_\lambda = \sum \omega_\lambda^\mu e_\mu$$

とおく。

例

$\nabla_X Y$ をつぎのように定義する。

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とするとき

$$\nabla_X Y = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^j \eta^k \Gamma_{j \ k}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$X = 1 \frac{\partial}{\partial x^1} + 0 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$\nabla_X Y = 1 \frac{\partial \eta^1}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + 1 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2}$$

理論 p204

アファイン接続 ∇ とは、写像 f で次の条件を満たすものである：

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$$

ここで f および X, Y, Z である。

多様体 p133

、U 上の各点 x で正定値対称行列 $(g_{ij}(x))$ の逆行列をとって $(g^{ij}(x))$ とする。すなわち

$$\sum_{k=1}^n g^{ik}(x) g_{kj}(x) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

とする。すると、U 上の C^∞ 関数を係数とする n 次正方行列 (g^{ij}) を得るが、これを用いて U 上の関数系 $\{\Gamma_{j\ k}^i; 1 \leq i, j, k \leq n\}$ を

$$\Gamma_{j\ k}^i = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n g^{ih} \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} \right) \quad (10)$$

によって定義しよう。

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j\ k}^i(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad () \quad (11)$$

定義 リーマン多様体 (M, g) における滑らかな曲線 $C = \{x(t); a \leq t \leq b\}$ が測地線であるとは、C が通るような各局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ において

とするとき、 $x^1(t), \dots, x^n(t)$ が方程式 (11) を満足することとする。ここに $\{\Gamma_{j\ k}^i; 1 \leq i, j, k \leq n\}$ は (10) によって定義され、クリストッフェルの記号と名づけられる U 上の関数系である。

多様体 p140

定義 n 次元可微分多様体 M の各局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ ごとに、U 上の n^3 個の C^∞ 関数の組 $\{\Gamma_{j\ k}^i; 1 \leq i, j, k \leq n\}$ が与えられつぎの条件がみたされるとき、 M に線形接続 (またはアフィン接続) が与えられたといい、 $\{\Gamma_{j\ k}^i\}$ をこの線形接続の $(U; x^1, \dots, x^n)$ における成分という。いま、 $\{\Gamma_{j\ k}^i\}$ 、 $\{\Lambda_{j\ k}^i\}$ をそれぞれ局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ 、 $(V; y^1, \dots, y^n)$ における成分とし $U \cap V \neq \emptyset$ とすれば、 $U \cap V$ においては

$$\Lambda_{j\ k}^i = \sum_{p,q,r=1}^n \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial x^q}{\partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^r} \Gamma_{p\ q}^r + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^j \partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^l}$$

がなりたつ。

測地線

曲線 C に沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ とは曲線上の各点 $x(t)$ において M への接ベクトル $Y(t)$ が与えられ、しかも M の $U \cap C \neq \emptyset$ なる局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ では表示

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n \eta^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x(t)}$$

の係数 $\eta^i(t) (1 \leq i \leq n)$ はいずれも t の C^∞ 関数であるものとする。

補題 1. 曲線 $C = \{x(t)\}$ に沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ に対して、 C に沿ったベクトル場 $\{\nabla_{x'} Y(t)\}$ がつぎの条件によって () 一意的に定義される。、 $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ 、 $Y(t) = (\eta^1(t), \dots, \eta^n(t))$ とするとき、 $\nabla_{x'} Y(t)$ は U において () の左辺を成分とするベクトル場である。すなわち

$$\nabla_{x'} Y(t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\eta^i}{dt} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j\ k}^i(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \eta^k(t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x(t)}$$

曲線 $C = \{x(t)\}$ とそれに沿ったベクトル場 $\{Y(t)\}$ に対して同じく C に沿った補題 1 のベクトル場 $\{\nabla_{x'} Y(t)\}$ を $\{Y(t)\}$ の共変微分という。

定理 が存在して、

この状況において、の点におけるへの接ベクトルををに沿って平行移動して得られる接ベクトルという。

多様体 p147

いま、区分的に滑らかな曲線 $C = \{x(t)\}$ の上の 2 点 $x(a), x(b)$ をとる。点 $x(a)$ における M への接ベクトル u_a に対して、これを C に沿って平行移動して得られる $x(b)$ における M への接ベクトルを u_b とすれば、対応 $u_a u_b$ によって M の接ベクトル空間の写像

:

が定義される。これを曲線 C に沿った接ベクトル空間 $T_{x(a)}(M)$ の $T_{x(b)}(M)$ への平行移動という。

レヴィ・チヴィタの平行移動という。

接続 p71

$$\nabla_{\dot{x}(t)} \xi = 0 \quad (8.1)$$

$$\nabla_{\dot{x}(t)} \xi = \sum \left\{ \frac{d\xi^\lambda(x(t))}{dt} + \sum \Gamma_{\mu \ i}^\lambda(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \xi^\mu(x(t)) \right\} e_\lambda$$

を得る。したがって、(8.1) は斉次常微分方程式の系

$$\frac{d\xi^\lambda}{dt} + \sum \Gamma_{\mu \ i}^\lambda \frac{dx^i}{dt} \xi^\mu = 0$$

にほかならない。初期値に対する解が一意的に定まる。そのとき、 ξ を γ に沿って平行移動して得られたという。

平行移動

理論 p202

からを引くにはをへ変化させずに移動してその違いを計算しなければならない。このベクトルの移動を平行移動とよぶ。ベクトル $V|_x$ を $x + \Delta x$ へ平行移動したものを $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$ で表す。ここで成分は条件

を満たすことを要請する。これらの条件は
と選べば満たされる。のに関する共変微分は

$$\lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

で定義される。多様体に計量が与えられていれば、都合のよいの選び方が存在する。これを Levi-Civita 接続とよぶ。

p204

アフライン接続 ∇ とは、写像：で次の条件を満たすものである：

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$$

ここで f および X, Y, Z である。

M 上で、座標 $x =$ をもつチャート $(,)$ を選び m^3 個の接続係数と呼ばれる関数を

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$$

で定義する。ここで $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ は $T_p M$ の座標基底である。接続係数は基底ベクトルが点から点へいかに変化するかを指定するものである。 $V = V^\mu e_\mu$ と $W = W^\nu e_\nu$ をの元とする。このとき

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) e_\lambda \end{aligned}$$

となる。、前に得られた発見的な結果 (7.10) と一致することに注意せよ。ここに

$$\nabla_\mu W^\lambda \equiv \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} W^\nu$$

である。

理論 p207

の右辺には等しいので、接続係数は

$$= \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial x^q}{\partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^r} \Gamma^r_{pq} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^j \partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^l} \quad (7.29)$$

と変換されなければならない。

本によっては、しばしば接続係数を (7.29) のように変換されるものとして定義することもある。

接続 p76

$$T(X, Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])$$

とおくと、

T をアファイン接続のねじれ率テンソルとか捩率と呼ぶ。

とおき、

$$\nabla e_k = \sum, \quad \nabla_{e_j} e_k = \sum$$

の局所座標系を使い

としたとき

$$\nabla_{e_j} e_k = \sum \Gamma^i_{jk} e_i$$

により個の関数を定義する。これらの関数をのに関する Christoffel の記号と呼ぶ。ベクトル場 $X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 、 $Y = \sum \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ に対しとを使ってを計算すると、

$$\nabla_X Y = \sum \xi^j \nabla_j \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{ただし、} \nabla_j \eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma^i_{jk} \eta^k$$

$$[\nabla_X Y = \sum \xi^j \{ \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma^i_{jk} \eta^k \} \frac{\partial}{\partial x^i}]$$

を得る。

によりテンソルの成分を定義すると

$$T^i_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj})$$

接続 p88

多様体にアファイン接続が与えられているとする。上の曲線が局所座標系を使って

で与えられているとする。の速度ベクトルをと書き、

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0 \quad (11.1)$$

が成り立つとき、を測地線と呼ぶ。前節の言葉で言えば、はに沿ったベクトル場が平行なことである。で導入したの記号を使うと、(11.1) は

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$$

と書ける。

この事実は $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ のとき、すなわち、ねじれ率が0のときには特に便利である。

多様体 p161

例 上のベクトル場を固定し、そのベクトル場による共変微分でを動かしてみれば、は上に定義されの値をとる線形な写像である。定理によりこれは次テンソル場を定義する。このテンソル場を ∇Y で示し、 Y の共変微分という。

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{j\ k} - \Gamma^i_{k\ j}$$

とおく。線形接続の条件式 4.2 (1) を見れば (T^i_{jk}) は定理 1 の条件をみたすことがわかる。よってにおいて $T = (T^i_{jk})$ となる (1,2) 次テンソル場が存在する。この T を与えられた線形接続の捩率テンソル場という。がリーマン計量をもちがそのリーマン接続の場合にはの定義 4.1 (10) から直ちに $\Gamma^i_{j\ k} = \Gamma^i_{k\ j}$ を知る。ゆえにこのときには $T = 0$ である。

多様体 p168

定義 多様体上のテンソル場が与えられた線形接続について平行なテンソル場であるとは、上の任意のベクトル場について $\nabla_X F = 0$ となることとする。このとき $\nabla F = 0$ と表わす。

p207

ここで $T^\kappa_{\lambda\mu} \equiv \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$ およびである。テンソルは下付添字に関して反対称で、捩率テンソルとよばれる。

捩率テンソルが多様体上でゼロになっていれば、計量接続は Levi-Civita 接続とよばれる。

p209

多様体の曲がり具合を測る「ものさし」としての本質的な幾何学的意味をもち得ない。そこで本質的な意味をもつものとして捩率テンソルと曲率テンソルを、それぞれ

$$T(X, Y)$$

$$R(X, Y, Z)$$

によって定義する。

p210

、 $X =$ と $Y =$ をの無限小ベクトルとする。これらのベクトルを微小な移動と見なすと、それらは p の近くに 2 つの点 q と s を定める。ベクトル X を直線 ps に沿って平行移動すると、その成分がであるベクトル sr_1 を得る。 p と r_1 を結ぶ位置ベクトルは

$$=$$

である。同様に pq に沿って平行移動すると、ベクトル

$$=$$

となる。

$$=$$

となる。従って捩率テンソルは無限小変位ベクトルおよびそれらの平行移動によりできる図形の、平行四辺形から欠けた部分を測る。

理論 p215

アファイン接続の中で Levi-Civita 接続とよばれる特別な接続があり、。接続 ∇ は、その率テンソルがゼロとなるとき対称接続とよばれる。座標基底を用いると対称接続の接続係数は

$$=$$

を満たす。

複素幾何 p115

定理 5.4 Hermite 多様体 (X, g) に対して次の 2 条件は互いに同値である。

標準接続のねじれ率が 0 である。

基本 2 次微分形式が閉じている、すなわち $= 0$ 。

系 5.5 Hermite 多様体 (X, g) が Kahler 多様体であるための必要十分条件は、その標準接続と Levi-Civita 接続が一致することである。

p208

定義 曲面上の曲線は、その加速度ベクトルがつねに接平面に垂直のとき、すなわち $(D_h \dot{c})(t) \equiv 0$ であるとき測地線という。

p210

共変微分

p211

、平行移動の概念を定義することができる。、曲線上の任意の 2 点に対し、線形写像をつぎのように構成するのである。を任意の接ベクトルとする。このとき曲線に沿うベクトル場であって

$$Y(t_0) = Y_0$$

$$(D_h Y)(t) \equiv 0$$

となるものが一意的存在することがわかる。そこでとおけばこれが求める写像である。を曲線に沿って平行移動して得られるベクトルという。

微分形式の幾何学 p213

定義 多様体上のベクトルバンドルの接続とは、双線形写像

$$\nabla : (M)(E)$$

であって、任意のに対して、二つの条件

$$\nabla_{fX} s = f \nabla_X s$$

$$\nabla_X (fs) = f \nabla_X s + (Xf)s$$

をみたすものをいう。をのに対する共変微分という。

微分形式の幾何学 p234

接続

p

さらに U 上の任意のベクトル場 Y を $Y =$ と表すとき、

$$\nabla_X Y =$$

によって定義されるベクトル場をの方向のレビ・チビタ共変微分という。

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_X fY = f \nabla_X Y + df(X)Y$$

$$\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$$

一般に、に対してを対応させる写像が、上の性質 (1.36)-(1.39) をみたすとき、を上の共変微分または線形接続という。

曲線と曲面の微分幾何 p102

各成分をについて微分することにより $X'(t)$ (または dX/dt と書く)

$$X' = \frac{DX}{dt} + A_X$$

() いま、曲面だけを考えて、周囲の空間を全く無視すると、意味のあるのはの接成分だけで、これを共変微分と呼ぶ。

p106

共変微分

