

ストリング理論 p284

さて周期性

$$X \cong X + 2\pi R \quad \{m11.?\}$$

を持つ。方程式を煩雑にしないように  $X^d$  の添字は落とし、。、弦を周期的次元の周りに一周並進する演算子  $exp()$  は状態を不変にしなくてはならない。これから重心運動量は

$$k = \frac{n}{R}, \quad n \in Z \quad \{m11.?\}$$

と量子化される。

閉弦はコンパクトな方向に

$$X(\sigma + 2\pi) = X(\sigma) + 2\pi R w, \quad w \in Z \quad \{m11.?\}$$

と巻きついてよい。整数  $w$  は巻き付き数である  $\{m?\}$  。

周期的次元に対しては次のようになる：

$$p_L \equiv \frac{n}{R} + \frac{wR}{\alpha'} \quad \{m11.?\}$$

$$p_R \equiv \frac{n}{R} - \frac{wR}{\alpha'} \quad \{m11.?\}$$

p287

となる巻き状態を作るために、

となる独立変数とが必要となる。その際、正則な部分と反正則な部分に場は分かれる：

ここで

$$X_L(z) =$$

$$X_R() =$$

である。

閉弦と T-双対性 { ストリング理論 p290 }

二乗質量に対して 4 つの寄与があることに気がつく。コンパクト運動量、巻き付き弦のポテンシャルエネルギー、振動子、零点エネルギーである。

p298

質量公式

$$m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \quad (8.3.25)$$

より、 $R \rightarrow \infty$  で巻き付き状態は無限に重くなり、一方コンパクト運動量は連続スペクトルに移行することがわかる。反対の極限  $R \rightarrow 0$  を見ると驚くことがある。コンパクト運動量は無限に重くなるが、巻き付き状態のスペクトルが今度は連続に近づいてゆく。

実際  $R \rightarrow 0$  と  $R \rightarrow \infty$  の極限は物理的に同等である。スペクトル (8.3.25) は

$$R \rightarrow R' = \frac{\alpha'}{R}, \quad n \leftrightarrow w \quad \{ m11.?\}$$

の下で不変である。 $n$  と  $w$  を入れ換えることは、

$$p_L^{25} \rightarrow p_L^{25}, \quad p_R^{25} \rightarrow -p_R^{25} \quad \{ m11.?\}$$

と同じであることに注意する。

この同等性は T-双対性として知られている。

ストリング理論 p318

さて開弦のスペクトルの極限を考えよう。境界条件の開弦はのような量子数を持たない。それらは周期的次元では常に巻き付きをほどこことができる。従っての時ゼロでない運動量を持つ状態は質量無限大になるが、結果として出てくる状態は個の時空次元を動く。

つまりの極限で閉弦は次元時空を動いているのに、開弦は時空を動くのである。、その端こそ次元の超平面に制限されるべきものである。

、 $n$  を境界の法線方向、 $t$  を接線方向として、

$$\partial_n X^{25} = -i\partial_t X'^{25} \quad \{m39.?\}$$

となる。元々の座標の Neumann 条件は双対座標の Dirichlet 条件となる。。

ストリング理論 p324

T-双対性は Neumann と Dirichlet の境界条件を交換するため、 $D_p$ -ブレーンに接する方向に更に T-双対変換を行うと、 $D(p-1)$ -ブレーンとなり、直交する方向に行うと  $D(p+1)$ -ブレーンになる。

p329

2 枚の  $D$  ブレーン間の閉弦の交換。それぞれの  $D$  ブレーンに端点を持つ開弦の真空ループと同等である。

ストリング理論 p36

以下の演習問題では、 $\alpha$  には開弦または閉弦の通常境界条件 (Neumann または周期的) を課すが、 $\beta$  には異なった境界条件を課す。

超弦理論・ブレイン・理論 p129

1 つのスカラール場  $X$  が半径  $R$  の円周にコンパクト化しているとする。それは

$$X \cong X + 2\pi R$$

という同一視で表される。この場合、

弦の状態がこの同一視の下で不変であるべきである。そのための並進を表すがになる。その結果、次のように重心運動量が量子化される。

$$p = \frac{n}{R}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

の同一視があるので、弦を 1 周したとき

$$X(+2\pi) = X() + 2\pi R w, \quad w \in \mathbb{Z}$$

とずれてもよい。これは弦が円周に  $w$  回巻きついていることを表す。

の巻きつき状態を作るには

となる独立な変数が必要である。それらを用いれば、

ただし、

$$X_L(z) =$$

$$X_R() =$$

となることがわかる。

$$m^2 =$$

$$R \rightarrow R' = \frac{\alpha'}{R}, \quad n \leftrightarrow w$$

の入れ替えの下でスペクトル全体は変わらない。一方、このとき

$$p_L \rightarrow p_L, \quad p_R \rightarrow -p_R$$

となる。

II 型の理論でこれを考える。をコンパクト化したとしよう。IIA,B のどちらかで  $R \rightarrow 0$  の極限をとることは、デュアルな座標の  $R' \rightarrow$  とすることと同じになる。

すなわちこの変換により

$$IIA \leftrightarrow IIB$$

が成り立つ

超弦理論・ブレイン・理論 p135

の極限を考えると、条件を満たす開弦には巻きつき数に相当するものはない。、、、。コンパクト化している方向に励起していると必ず質量が無限大になってしまうので、コンパクト化した方向には励起できず、実質上 9 次元に住んでいることになる。しかし、一方で閉弦は巻きつきモードがあり 10 次元に住んでいる。

、開弦は端だけ 1 次元分はどこかに固定され、自由に動けるのは 10 次元に制限されると考える  
と解決される。

であるから、

となって、に対する Neumann 条件はに対する Dirichlet 条件に変化して、

超弦理論・ブレイン・理論 p145

各は、境界条件

$= 0, 1, \dots, p$  は *Neumann* 境界条件

$= p + 1, \dots, 9$  は *Dirichlet* 境界条件

を満たすべきであることに注意する。すなわち、はとに与えた条件

D ブレーン p70

$$x^i x^i + 2\pi R_i (i = 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

D ブレーン p78

、超対称性のある閉弦理論のつである「IIB 型超弦理論」を考える。

D ブレーン p87

$$X^\mu(\tau, \sigma)|_{\sigma=0, 2\pi} = c^\mu \quad (3.9)$$

一般には、超弦理論の 10 次元時空の方向のうち、 $0, 1, \dots, p$  の方向については自由端境界条件 (2.4) を課し、残りの  $p+1, \dots, 9$  の方向については固定端境界条件 (3.9) を課したとしよう。

p184

その質量は与えられており、内部空間が半径の円周の場合

$$m = \frac{|s|}{R} \quad (9.1)$$

と書かれる ( $s$  は整数)、整数はコンパクト化された方向の運動量と見ることができる。弦理論で現れる無質量粒子に同様の KK コンパクト化をすると、同じく (9.1) の質量を持った粒子モードが現れる。面白いことに弦理論では、これに加えて弦特有のモードが現れる。それは、コンパクトな方向に巻きついている閉弦である。この閉弦の質量は、弦の長さに弦の張力をかけたものである。で、巻きつき数を整数  $w$  とすると、

$$m = \frac{|w|R}{(l_s)^2} \quad (9.2)$$

で与えられる。この表式では、弦の振動からくる寄与は省略した。

これら (9.1) と (9.2) において、次のような変換を試みよう：

$$R \rightarrow R' = \frac{(l_s)^2}{R}, \quad s \leftrightarrow w$$

すると面白いことに、コンパクトな方向に運動量を持つ状態 (9.1) と巻きつき数をもつ状態 (9.2) はそっくり入れ替わり、スペクトルは全体で不変となるのである。つまり、半径でコンパクト化した閉弦理論と、半径でコンパクト化した閉弦理論は、等価である。これは「T 双対性」と呼ばれている。

D ブレーンがコンパクトな空間方向に局在化しているような状況を考える。つまり、弦はコンパクト化した方向について固定端境界条件を満たし、コンパクトな円周に巻きつくことができる。この系に対して、T 双対変換を施してみよう。巻きつき数を持った弦は、コンパクトな方向に

運動量を持った弦に変わるはずである。しかし、開弦がコンパクト方向に運動量を持つためには、そちらの方向が自由端境界条件でなければならない。つまり、D プレーンはコンパクトな方向に伸びていなければならない。すなわち、プレーンに垂直な方向に双対をとると、プレーンになるのである！ また、双対変換は回施すと元に戻るので、図左でプレーンに沿った方向に双対変換をすると図右のプレーンになる。まとめると、

というルールとなる。

そこで T 双対変換をすると、 $p$  は偶数だけとなる。この理論は IIA 型超弦理論と呼ばれ、この IIA 型超弦理論と IIB 型超弦理論は、円周でコンパクト化されると、特定の半径の関係（）では等価となる。

、実際は T 双対は弦の世界膜上の座標とを入れ替える変換として定義でき、その結果、自由端境界条件と固定端境界条件が T 双対変換で入れ替わることが示される。



p449

D-branes

One important piece of the mirror symmetry story that we have not discussed yet is D-branes. D-branes not only deepen our understanding of mirror symmetry, they also help us grasp the meaning of topological string amplitudes from the viewpoint of target space physics. In this section, we develop some basic aspects of D-branes. More details, especially in the context of fermionic fields, will appear in Ch. 39.

19.1. What are D-branes?

We have considered (bosonic) sigma models of maps from Riemann surfaces without boundaries to target spaces. It is natural in this context to ask: what if we have Riemann surfaces with boundaries, with some natural boundary conditions?

Consider a sigma model of maps from the cylinder  $\Sigma = S^1 \times R$  to  $R$  with (Euclidean) action

$$S = \int \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi d^2 x$$

The classical equation of motion, which is obtained by setting to zero the variation of the action ( $\delta S = 0$ ) with respect to arbitrary variations of the field  $\phi$ , is

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$$

However this assumes there are no boundary terms generated by varying the field. The contribution of the boundary to the variation is given by

$$\delta \phi \partial_n \phi|_{\text{boundary}} = 0$$

where  $\partial_n \phi$  is the normal derivative of  $\phi$  at the boundary.

EXERCISE

**We would like to set this boundary term to zero. There are two natural ways of doing this:**

$$\text{Neumann}(N) : \partial_n \phi|_{\partial \Sigma} = 0$$

$$\text{Dirichlet}(D) : \delta \phi|_{\partial \Sigma} = 0$$

**In the Dirichlet case, the image of the boundary  $\partial \Sigma$  is a point in the target space ( $R$  in this case) - we will call this a D0-brane. In the case of Neumann boundary conditions, the worldsheet boundary can be at any point in the target - we will say in this case that there is a D1-brane stretched along the real line  $R$ .**

We can write the Dirichlet (D) and Neumann (N) boundary conditions more symmetrically as

$$N : \partial_n \phi|_{\partial \Sigma} = (\partial \phi - \bar{\partial} \phi)|_{\partial \Sigma} = 0$$

and

$$D : d\phi|_{\partial \Sigma} = (\partial \phi - \bar{\partial} \phi)|_{\partial \Sigma} = 0$$

The terminology in general is as follows: **Consider a  $p$ -dimensional subspace  $N^p$  of the target space and restrict the boundary of the Riemann surface to map to it. Moreover we require Neumann boundary conditions for directions normal to the space  $N^p$ . In such a situation, we say that we have a "D $p$ -brane wrapping the subspace  $N^p$  of the target space."** In general we may have many different D-branes and we can consider Riemann surfaces with more than one boundary, where different boundaries are mapped to different D-branes.

Let us now consider **the target space being a circle  $S^1$  of radius  $R$** . We recall from **Sec. 11.2** the T-duality symmetry which relates  $R \rightarrow 1/R$  symmetry, and ask how the D-branes, i.e., the D0- and D1-branes, get identified under this symmetry.

**Recall from our discussion of the  $R \rightarrow 1/R$  duality that this has the effect**

$$\begin{aligned}\partial\phi &\rightarrow \partial\tilde{\phi} \\ \bar{\partial}\phi &\rightarrow -\bar{\partial}\tilde{\phi}\end{aligned}$$

where  $\tilde{\phi}$  is a coordinate on the dual circle. We can see, therefore, that when the worldsheet has boundaries, this symmetry interchanges Neumann and Dirichlet boundary conditions. In other words, **the  $R \rightarrow \frac{1}{R}$  symmetry induces an action on D-branes exchanging D0-branes with D1-branes.**

So far we have talked about bosonic sigma models. A similar story repeats for the fermionic sigma model, and the worldsheet supersymmetry will dictate what the appropriate boundary conditions on the fermions are. We can then ask if the D-brane boundary conditions preserve all the supersymmetries of the world-sheet theory, and the answer is no: the D-brane can preserve only half of the supersymmetries. We saw, in our discussion of (2,2) supersymmetry, that there were four combinations of supercharges:  $Q_A = Q_- + \overline{Q}_+$ ,  $Q_B = \overline{Q}_- + \overline{Q}_+$ , and their complex conjugates  $\overline{Q}_A, \overline{Q}_B$ . **The A-model supercharges  $Q_A, \overline{Q}_A$ , are preserved when the D-brane is a Lagrangian submanifold of the Kahler target space. The B-model supercharges are preserved when the D-brane is a holomorphic submanifold to preserve the corresponding supercharges.** (Note that we are talking about world-sheet supersymmetry, not supersymmetry in space-time). This will be discussed in **Ch. 37** in detail.

Let us now recall our first example of mirror symmetry, which is the supersymmetric sigma model with target space the flat torus

$$T = S^1_{R_1} \times S^1_{R_2}$$

**The mirror is the torus**

$$T' = S^1_{1/R_1} \times S^1_{R_2}$$

**Now a D0-brane at a point on  $T$  corresponds, in the dual theory, to a D1-brane wrapping the first  $S^1$  in  $T'$  (see Fig. 1, (a)).**

If we had started with a D2-brane wrapping  $T$ , we would have ended up with a D1-brane on the mirror, this time wrapped on the second  $S^1$  in  $T'$  (see Fig. 1, (b)). In general, we expect mirror symmetry at the level of cohomology elements realized by chiral fields act by the reflection  $h^{p,q} \leftrightarrow h^{d-p,q}$ . The action of mirror symmetry in this example is providing a concrete integral homology realization of this map ( $d=1$  here), realized through the D-branes. More generally, for

a Calabi-Yau  $d$ -fold, one expects that D-branes represented by Lagrangian real  $d$ -dimensional space will be mapped to holomorphic objects of all possible complex dimensions by the mirror map.

### 19.2. Connections Supported on D-branes

We saw that R1R interchanged D0- and D1-branes on the circle. So if we start with a D1-brane wrapping the circle, we end up in the dual description with a D0-brane localized at a point on the dual circle. There seems to be a contradiction. We can change the position of the D0-brane, so there is a one-dimensional moduli space of choices for the D0-brane. What about the D1-brane? It seems to have no moduli! So how could the two objects become equivalent under T-duality? The answer turns out to be that on the D-brane there lives a rank 1 bundle with connection, and that turns out to have moduli in the case of a D1-brane.

Recall that we modified the sigma model by introducing an integral two-form  $B$  in the target space and modifying the path-integral by the phase

This makes sense on worldsheets without boundary, but we can see that there is going to be a subtlety when we allow worldsheets with boundary: Under  $B$ ,

So this pairing will not be well defined. We can compensate for this shift by introducing a one-form  $A$  (connection) on the D-brane and modifying the action by

We see then that under the combined transformation

the path-integral is invariant. In other words, the data of a D-brane includes a  $U(1)$  connection (not necessarily flat) on the D-brane. More generally, we could put several (say  $n$ ) D-branes on top of each other. In this case, the  $n$   $U(1)$  bundles get enhanced to a  $U(n)$  bundle. The path-integral modification in this case is

(i.e., the path-ordered exponentiation of the connection, which gives the holonomy) and the  $B$  field mixes only with the diagonal  $U(1)$  subgroup of the  $U(n)$ . Note that in case  $A=0$  this corresponds to putting an extra factor of  $n$  for each hole. In other words  $n$  identical D-branes with no connection turned on affects the worldsheet theory by associating a factor of  $n$  for each hole mapped to it.

Now we come back to the question of where on the dual circle the D0-brane sits. The D1-brane wraps the circle and, as we have just seen, has a  $U(1)$  connection on it. The moduli space of flat connections on the D1-brane is, in this example, the dual  $S^1$ , so specification of the connection on the D1-brane is equivalent to the specification of a point on the dual circle, which is the point where the D0-brane sits! This restores the symmetry between the corresponding

moduli spaces of D-branes expected from mirror symmetry considerations. Our discussion of D-branes in this case suggests that the study of moduli spaces of D-branes should be very relevant for the study of mirror symmetry. Aspects of this will be discussed in more detail later in Ch. 37.

p19 ~

時空での光円錐座標を定義する：

$$\underline{x^\pm = 2^{-1/2}(x^0 \pm x^1), \quad x^i, i = 2, \dots, D-1}$$

時空の座標には小文字  $x^\mu$  を、付随する世界面の場には大文字  $X^\mu(\tau, \sigma)$  を用いる。これらの座標で、計量は

$$\underline{a^\mu b_\mu = -a^+ b^- - a^- b^+ + a^i b^i}$$

である<sup>\*1</sup>。世界面の各点で世界面のパラメータ  $\tau$  を時空の座標  $x^+$  に等しくなるようにこれから取っていく。 $\tau = x^0$  としてみれば良さそうに思えるが、これでは同様な簡単化に至らないのである。すると  $x^+$  は時間の役目を、 $p^-$  はエネルギーの役目を果たすことになる。

点粒子の場合を例にとつてこの手続きを説明することから始めよう。作用は  $S'_{pp}$  を用いる。世界線のパラメータの付け方を

$$X^+(\tau) = \tau$$

と固定する。

$$\underline{\text{正準共役運動量}} p_\mu = \partial L / \partial \dot{X}^\mu$$

ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \underline{H} &= p_- \dot{X}^- + p_i \dot{X}^i - L \\ &= \underline{\frac{p^i p^i + m^2}{2p^+}} \end{aligned}$$

となる。ゲージ固定された理論では  $X^+$  は力学変数ではないため、 $p_+ \dot{X}^+$  という項が含まれていないことに注意しておく。

\*1

Given objects  $a$  and  $b$ , the relativistic scalar product  $a \cdot b$  is defined as

$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \quad (2.29)$$

$$[\frac{1}{2}a^0 = a^+ - \frac{1}{2}a^1 \quad \frac{1}{2}a^0 = a^- + \frac{1}{2}a^1]$$

さて開弦に話を移し、もう一度座標領域  $< \tau <, 0 \sigma l$  をとる。ここでも Polyakov 作用の余分な自由度を固定するためにゲージを選ぶ必要がある、。次のように

$$X^+ = \tau$$

とする。つまり、世界面の時間座標として光円錐ゲージを選び、  
である。すると Polyakov ラグランジアンは

$$L = -\frac{l}{4\pi\alpha'} \int_0^l d\sigma [\gamma_{\sigma\sigma}(2\partial_\tau X^- - \partial_\tau X^i \partial_\tau X^i) \\ - 2\gamma_{\sigma\tau}(\partial_\sigma X^- - \partial_\tau X^i \partial_\sigma X^i) + \gamma_{\sigma\sigma}^{-1}(1 - \gamma_{\sigma\sigma}^2)\partial_\sigma X^i \partial_\sigma X^i]$$

となる。

$\mu = i$  に対しては 境界条件は

$$\underline{\partial_\sigma X^i = 0 \quad (\sigma = 0, l \text{ で})} \quad (1.3.15)$$

$$[\partial_\sigma X^I(\tau, \sigma) = 0, \quad \sigma = 0, \pi \quad (z12.23)]$$

である \*2。

$X^i(\tau, \sigma)$  に共役な運動量密度は

$$P^i = \frac{\delta L}{\delta(\partial_\tau X^i)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \gamma_{\sigma\sigma} \partial_\tau X^i$$

である。するとハミルトニアンは

$$H = p_- \partial_\tau x^- - L + \int_0^l d\sigma P_i \partial_\tau X^i \\ = \frac{l}{4\pi\alpha' p^+} \int_0^l d\sigma [2\pi\alpha' P^i P^i + \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\sigma X^i \partial_\sigma X^i] \quad (1.3.19)$$

となる。運動方程式は

であり、これは速さ  $c =$  を持つ波動方程式

$$\underline{\partial_\tau^2 X^i = c^2 \partial_\sigma^2 X^i} \\ [\ddot{X}^I - X^{I''} = 0 \quad (z12.22)]$$

を意味している。

境界条件(1.3.15) に対する波動方程式の一般解は

$$X^i(\tau, \sigma) = x^i + \frac{p^i}{p^+} \tau + i(2\alpha')^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^i \exp(-\frac{\pi i n c \tau}{l}) \cos \frac{\pi n \sigma}{l}$$

である。重心 変数を

$$\begin{aligned} x^i(\tau) &= \frac{1}{l} \int_0^l d\sigma X^i(\tau, \sigma) \\ p^i(\tau) &= \int_0^l d\sigma P^i(\tau, \sigma) \end{aligned}$$

のように平均位置と全運動量として定義する。、Schrodinger 表示の演算子  $x^i \equiv x^i(0)$  と  $p^i \equiv p^i(0)$  が展開 ( ) に現れている。<sup>\*3</sup>

量子化するために、同時刻正準 交換関係

$$[X^i(\sigma), P^j(\sigma')] = i\delta^{ij}\delta(\sigma - \sigma')$$

$$[[X^I(\tau, \sigma), P^{rJ}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (z12.10)]$$

及び、他の全ての独立な変数間の同時刻交換子は消えているという条件を課す。フーリエ成分で表すと

$$\begin{aligned} [x^i, p^j] &= i\delta^{ij} \\ [\alpha_m^i, \alpha_n^j] &= m\delta^{ij}\delta_{m, -n} \end{aligned}$$

である。各 m と i に対してモードは、標準的でない規格化

$$\alpha_m^i \sim m^{1/2} a, \quad \alpha_{-m}^i \sim m^{1/2} a^\dagger, \quad m > 0$$

$$[\alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n} \quad \text{and} \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1 \quad (z)]$$

の調和振動子の代数 ( $[a, a^\dagger] = 1$ ) を満たしている。振動子は振動の方向 i と倍数 m でラベルされている。<sup>\*4</sup>

$k = (k^+, k^i)$  において、は下降演算子で消されて、重心運動量の固有状態

$$= | > \quad p^i$$

$$\alpha_m^i |0; k > = 0, \quad m > 0$$

として定義される。一般の状態は  $|0; k >$  に上昇 演算子 を作用させて 得られる :

$$|N; k > = [\frac{(\alpha_{-n}^i)^{N_{in}}}{N_{in}!}] |0; k >$$

、及び各モード  $(i, n)$  の占有数  $N_{in}(i = \text{及び } n =)$  でラベル付けできる。

、特に状態  $|0; 0 >$  は運動量 0 の一つの 弦の基底状態 であって、。

モード展開 (1.3.22) をハミルトニアン (1.3.19) に代入して

$$H = \frac{p^i p^i}{2p^+} + \frac{1}{2p^+ \alpha'} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + A \right)$$

を得る。ハミルトニアン  $H$  には演算子の順序の不定性がある。ここでは下降演算子を右側に上昇演算子を左側に持っていくことと、交換子から生じる未定定数  $A$  を含めることをしておいた。ローレンツ変換を生成する演算子  $M^{\mu\nu}$  を見い出して、そして  $M^{\mu\nu}$  が  $p^\mu$  及びそれ自身と正しい代数をなしているかを確認して、ローレンツ不変性を確かめる必要がある。特別な値  $A = -1$  の時のみ、また時空の次元がちょうど  $D = 26$  の場合にのみ、ローレンツ不変性が成り立つことが見いだされる。<sup>\*5</sup>

$$A = \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n$$

を与え、因子は横波方向の和から来ている。この 零点エネルギーの和 は発散している。理論を正規化しそしてくりこみでローレンツ不変性を保つように注意深くやるとこの値を評価できる。これは奇妙な結果

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \rightarrow -\frac{1}{12}$$

を導く。

$$A = \frac{2-D}{24}$$

となる。

点粒子に関しては  $p^- = H$  だったので、

$$m^2 = 2p^+ H - p^i p^i = \frac{1}{\alpha'} \left( N + \frac{2-D}{24} \right)$$

である。

$$N = \sum_{i=2}^{D-1} \sum_{n=1}^{\infty} n N_{in}$$

である。<sup>\*5</sup>

一方質量のないベクトル粒子は個の状態だけを持つ必要がある。これは零質量であるべきで、

$$A = -1, \quad D = 26$$

となる。。時空の次元の数がの時にのみスペクトルがローレンツ不変になるのである。

<sup>\*2</sup> p67

Since the loops are massless and the poles are frictionless[摩擦がなく], the derivative  $\partial y / \partial x$  must vanish at the poles  $x = 0, a$  (Figure 4.2, right).

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x=0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x=a) = 0, \quad \text{Neumann boundary conditions.} \quad (4.10)$$

These Neumann boundary conditions apply[申しし] to strings whose endpoints are free to move along the y direction[方向].

<sup>\*3</sup> p157

We know that the most general  $X^\mu(\tau, \sigma)$  that solves the wave equation (9.40) is

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)) \quad (9.41)$$



$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{at} \quad \sigma = 0, \pi \quad (9.42)$$

The boundary condition at  $\sigma = 0$  gives us

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau) - g^{\mu'}(\tau)) = 0 \quad (9.43)$$

Since the derivatives of  $f^\mu$  and  $g^\mu$  coincide[一致],  $f^\mu$  and  $g^\mu$  can differ only by a constant  $c^\mu$ . After replacing  $g=f+c$  in (9.41), the constant  $c$  can be reabsorbed into the definition of  $f$ . The result is

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)) \quad (9.44)$$

Now let us consider the boundary condition at  $\sigma = \pi$ :

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau + \pi) - f^{\mu'}(\tau - \pi)) = 0 \quad (9.45)$$

We now write the general Fourier series for the periodic[周期的で] function  $f^{\mu'}(u)$ :

$$f^{\mu'}(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu) \quad (9.46)$$

Integrating this equation we get the expansion of  $f^\mu(u)$ :

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos nu + B_n^\mu \sin nu) \quad (9.47)$$

We substitute[代入] this expression for  $f(u)$  back into (9.44) and simplify[簡素化] to get

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= f_0^\mu + f_1^\mu(\tau + \sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos n(\tau + \sigma) + B_n^\mu \sin n(\tau + \sigma)) \\ &\quad + f_0^\mu + f_1^\mu(\tau - \sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos n(\tau - \sigma) + B_n^\mu \sin n(\tau - \sigma)) \\ &= \frac{1}{2}(2f_0^\mu + 2f_1^\mu\tau + \sum_{n=1}^{\infty} (2A_n^\mu \cos n\tau \cos n\sigma + B_n^\mu \sin n\tau \cos n\sigma)) \\ X^\mu(\tau, \sigma) &= f_0^\mu + f_1^\mu\tau + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau) \cos n\sigma \quad (9.48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau &= -\frac{i}{2}((B_n^\mu + iA_n^\mu)e^{in\tau} - (B_n^\mu - iA_n^\mu)e^{-in\tau}) \\ &\equiv -i\frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}}(a_n^{\mu*}e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \quad (9.49) \end{aligned}$$

Here  $*$  denotes[示さ] complex conjugation[活用].

In equation (9.48) the constant  $f$  has a simple physical interpretation[解釈]. Using (9.37), the momentum[運動量] density[密度] is given by

$$P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} f_1^\mu + \dots \quad (9.50)$$

Happily, the terms represented[表さ] by the dots do not contribute[寄与し] as the integral of  $\cos nX$  vanishes. We get

$$p^\mu = \int_0^\pi P^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \pi f_1^\mu \longrightarrow f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu \quad (9.51)$$

Declaring[宣言し]  $f=x$ , and collecting[収集し] all the above information, equation (9.48) now takes the conventional[従来の] form

$$(9.52)$$

Furthermore, we define

$$a_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad a_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1 \quad (9.54)$$

\*4 p31

この固有関数展開は、式(2.3.1)の交換関係を考慮すると、展開係数  $\alpha_n^i$  が次の式を満たすべきであることが確かめられる。

$$[x^i, p^j] = i\delta^{ij}$$

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m\delta_{n+m,0}\delta^{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, D-2)$$

これらの演算子は、普通の調和振動子の生成、消滅演算子とは単に規格化が異なるだけで、それぞれ

$$a_n^{i\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_{-n}^i, \quad \alpha_n^i = \frac{1}{\sqrt{n}} a_n^i \quad (n > 0)$$

で結びついている。

波動方程式

ゼロ p66

振動といえばバネみたいな振動（縦振動）も考えられますが、それはありません。

、同様に時間方向にも振動しないので、時間の方向と縦の方向を除いた空間の振動だけを考えればよいことになります。

\*5 p43

これらがすべてうまくいっているとき、それぞれが共変性を保っているといい、理論はローレンツ変換に対して不変であるという。

$J^{\mu\nu}$  の構造は、ポリヤコフの作用(2.2.1)に、変換(2.2.3b)に対するネーターの定理を適用して導き出せるが、直感的にも

$$J^{\mu\nu} = \int_0^\pi d\sigma [X^\mu P^\nu - X^\nu P^\mu]$$

で与えられることは理解できるであろう。

p63

ふつうローレンツ群の生成子は

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= \int_0^\pi d\sigma [X^\mu P^\nu - X^\nu P^\mu] \\ &= x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu] \end{aligned}$$

で与えられる。

$$[M^{-i}, M^{-j}] = \frac{-1}{2p^{+2}} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{-n}^i \alpha_n^j - \alpha_{-n}^j \alpha_n^i] D_n$$

となる。ここに、

$$D_n = \frac{n}{12}(26 - D) + \frac{1}{n} \left[ \frac{D - 26}{12} + 2 - 2a \right]$$

である。この交換子が 0 であるためには、

$$D = 26; \quad a = 1$$

でなければならない。

p84

ネーターの定理のところでもちょっと説明したのだが、対称性があると保存則があるので、ローレンツ変換に対して方程式が不変だ、という対称性に応じて保存される電荷がある

対称性があるって保存される量のことを一般に電荷と呼ぶわけなのじゃ。その電荷も 1 つじゃなくて複数でてくる。その電荷どうしが満たさなくてはいけない関係式がある

その関係式が満たされていれば、理論が特殊相対性理論の要請を満たしている、

もう少し詳しく言うと、電荷どうしの交換関係を計算するのだ。交換関係がゼロにならないといけない場合があり、

p206

$$[X^I(\tau, \sigma), P^{rJ}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \quad (12.10)$$

$$(12.21)$$

We begin by using (12.21) to rewrite[書き直さ] the commutator (12.10) as

$$[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \quad (12.27)$$

Taking the  $\sigma$  derivative of this equation yields[生産し]

$$[X^{I'}(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (12.28)$$

$$[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] + [X^{I'}(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] \quad (12.31)$$

The second term is given by (12.28). The first term equals

$$-[X^{J'}(\tau, \sigma'), \dot{X}^I(\tau, \sigma)] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (12.32)$$

We now see that both terms in (12.31) are equal, so

$$[(\dot{X}^I + X^{I'})(\tau, \sigma), (\dot{X}^J + X^{J'})(\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (12.33)$$

If [] we can use the top right-hand side of (12.26) together with (12.33) to find

$$2\alpha' \sum_{m', n'} e^{-im'(\tau+\sigma)} e^{-in'(\tau+\sigma')} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

Cancelling the common[共通で] factor of ,

$$\sum_{m',n'} e^{-im'(\tau+\sigma)} e^{-in'(\tau+\sigma')} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] = 2\pi i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (12.36)$$

On the left-hand side of (12.36) the integrals pick[選択し] the term with  $m' = m$  and  $n' = n$ :

$$e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \quad (12.40)$$

On the right-hand side of (12.36) the integrals give

$$i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \quad (12.41)$$

Equating our results[結果] (12.40) and (12.41), we find

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \quad (12.42)$$

により, であるから

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \quad (12.43)$$

\*5 p219

Working from the definition  $M^2 = -p^2$ , and using (12.102) and (12.103), we find  
p229

$$M_{\mu\nu} = \int_0^\pi (X_\mu P_\nu^\tau - X_\nu P_\mu^\tau) d\sigma$$

$$[M^{-I}, M^{-J}] =$$

$$m[1 - \frac{1}{24}(D-2)] + \frac{1}{m}[\frac{1}{24}(D-2) + a] = 0$$

\*2

座標  $x^\mu(\tau)$  に正準共役な運動量は、 $\tau$  を時間パラメータとみなしたとき

$$p_\mu(\tau) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{x}^\mu(\tau)} = m \frac{\dot{x}_\mu(\tau)}{\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} \quad (1.1.8)$$

で与えられる。式 (1.1.8) の両辺のスカラー積をとってみればわかるように

$$p_\mu p^\mu + m^2 = 0 \quad (1.1.9)$$

という関係式が成り立ち、。

。時間ゲージ式 ( ) をとると、 $x^0$  が時間とみなせるので、ハミルトニアンは  $x^0$  に共役な運動量  $p^0$  となるだろう。式 ( ) の関係を用いると

となって、よく知られた結果になる。

光円錐時間  $x^+ = \tau$  に共役な運動量は  $p^-$  であるから、式 (1.1.9) を  $p^-$  について解くと、ハミルトニアンは

$$H \equiv p^- = \frac{1}{2p^+} (\mathbf{p}_\perp^2 + m^2)$$

で与えられる。

$$[a^\mu b_\mu = a^+ b_+ + a^- b_- + a^2 b_2 +]$$

$$[a_- = -a^+, a_+ = -a^-, a_i = a^i]$$

$$\partial_\tau x^- = \frac{\partial H}{\partial p_-} \quad \partial_\tau p^+ = \frac{\partial H}{\partial x^-}$$

$$\partial_\tau X^i = \frac{\delta H}{\delta P^i}, \quad \partial_\tau P^i = -\frac{\delta H}{\delta X^i}$$

$$[X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I \cos n\sigma e^{-in\tau} \quad (z12.24)]$$

$$[[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ} \quad (z12.52)]$$

$$[[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \quad (z12.43)]$$

$$[M^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} (L_0^\perp + a) - p^I p^I \quad (z)]$$

$$[L_0^\perp \equiv \quad (z)]$$

### 2.3 Light cone coordinates 光錐座標

We The light-cone components of any Lorentz vector a are defined in analogy with (2.48): 少しローレンツベクトル a の光錐コンポーネントは (2.48) との類似において定義される:  $a^+ = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)$

(2.56)  $a^- = \frac{1}{2}(a_0 - a_1)$  (2.56) The scalar product between vectors, shown in (2.29), can be written using light-cone components. This time we have 招き入れられた (2.29) ベクトルの間のスカラー積は、光錐コンポーネントを使って、書かれることができる。私達が持っている今回  $a \cdot b = -a \cdot b + -a^+ b^- + a^2 b_2 + a^3 b_3 =$  (2.57) The last equality follows immediately from summing over the repeated indices and using (2.55). すぐ、再三のインデックスの上で合計し、使うこと (2.55) から、最後の平等は続いている。The first equality needs a small computation. 最初の平等に小さな計算は必要である。In fact, it suffices to check that 実のところ、それをチェックするために、それは十分である。  $-a \cdot b + -a^+ b^- = -a_0 b_0 + a_1 b_1$  (2.58)

ゲージ場の量子論 p84

一般化された Green 関数を

$$G^{(n)}(x_1 x_n; \Psi_F, t_F; \Psi_I, t_I) \quad (11)$$

で定義し、その経路積分表示を求めよう。ただしとする。

(11) は結局

$$G^{(n)}(x_1 x_n; \Psi_F, t_F; \Psi_I, t_I) = N_{FI} \int D\phi \Psi_F^*[\phi(t_F)] \Psi_I[\phi(t_I)] \phi(x_1) \phi(x_n) \exp[i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{H}(\phi, \partial\phi)] \quad (15)$$

と書けることがわかる。は (10) の比例定数や () の分母からくるに依存しない定数である。

一般化された n 点 Green 関数 () の生成汎関数  $Z_{FI}[J]$  を次式で定義しよう：

$$Z_{FI}[J] \equiv \langle \Psi_F, t_F | T \exp[i \int d^4x J(x) \phi(x)] | \Psi_I, t_I \rangle / \langle \Psi_F, t_F | \Psi_I, t_I \rangle$$

ただしの台はの区間内にあると仮定する。これをで微分しとおけば明らかにの Green 関数が得られるから、確かに生成汎関数となっている：

一般化された n 点 Green 関数に対する経路積分表式 (15) から、ただちに

$$Z_{FI}[J] = N_{FI} \int D\phi \Psi_F^*[\phi(t_F)] \Psi_I[\phi(t_I)] \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x [\mathcal{H}(\phi, \partial\phi) + J(x)\phi(x)]$$

を得る。

再び、にすれば、(16) のは通常の n 点 Green 関数の生成汎関数に帰着することがわかる。

$$Z[J] \equiv \langle 0 | T \exp[i \int d^4x J(x) \phi(x)] | 0 \rangle$$

汎関数

$$Z_\beta[J] \equiv \text{tr} \{ e^{-\beta H} T \exp[ \int_0^\beta d \int d^3x J(x, -i) \phi ] \} \quad (39)$$

を定義すれば、

さらに、虚時間演算子の固有状態

に注意すれば、(39) の生成汎関数に対する次の表式を得る：

$$[J] = \quad (42)$$

この表式は、いる。それゆえ、前と同様に、虚時間間隔を N 等分し、各虚時刻での () の固有状態の完全系を次々とはさみ、の極限をとるという手続きを行えば、() に対する次の経路積分表示式が得られる：

$$Z_\beta[J] = D D \exp[-H() + J]$$

ここで経路積分はの周期的境界条件を満たす 4 次元関数にわたる積分である。

場の量子論 p56

一般に、関数  $J(t)$  の関数形によって決まっている量を汎関数とよび、 $Z[J]$  というように、 $\square$  の中に関数の名前を入れて表す。

この場合、

さらに、 $t$  付近にのみ値をもつ微小変分を考えて汎関数を汎関数微分するという操作をと定義する。

この汎関数微分を用いると、グリーン関数の生成汎関数が定義でき、

$$Z[J] = \langle 0 | T \exp[i \int dt J(t) Q_H(t)] | 0 \rangle$$

となる。

p63

グリーン関数を求めるために、場の演算子に対する外場を導入する。

$$\hbar \hbar + J(x)(x)$$

場の量子論でも、。したがって、グリーン関数の生成汎関数の経路積分表示は

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \int D\phi D\pi \exp[i \int d^4x \{ \pi(x) \partial_0 \phi(x) - H(\phi, \pi) + J(x) \phi(x) \}] \\ &= N' \int D\phi \exp[i \int d^4x \{ \hbar (\phi, \partial_\mu \phi) + J(x) \phi(x) \}] \end{aligned}$$

となる。ここで規格化定数としてを入れてある。

Functional Derivatives and the Generating Functional 機能的なデリバティブと機能的な生成

To conclude[終え] this section, we will now introduce a slicker[], more formal, method for computing correlation functions. この節を終えるために、私達は現在 [レインコート] を導入し、よりフォーマルに、相互関係を計算するための方法は機能する。

This method, based on an object called the generating functional, avoids the awkward[] Fourier expansions of the preceding derivation[]. この方法 (オブジェクトが機能的な生成と呼んだに基づいた o) は先行派生の無器用なフーリエ拡張を避ける。

First we define the functional derivative 汎関数微分,  $J(x)$ , as follows. The functional derivative obeys[従] the basic axiom (in four dimensions) 第一に、私達は次の通り [機能的なデリバティブ]、 $J(x)$  を定義する。機能的なデリバティブは基本的な原則 (4次元における) に従う。(9.31)

This definition is the natural generalization, to continuous functions, of the rule for discrete[] vectors, この定義は離散的なベクトルのための規則の、連続関数への、自然な generalization である。

To take functional derivatives of more complicated functionals we simply use the ordinary rules for derivatives of composite functions. より複雑な functionals の [機能的なデリバティブ] を取るために、私達は単に合成関数のデリバティブのために普通の規則を使う。

For example, (9.32)

When the functional depends on the derivative of  $J$ , we integrate by parts before applying the functional derivative: [機能的なもの] が  $J$  のデリバティブに依存する時に、[機能的なデリバティブ] を適用する前に、私達は部分によって [融合する]: (9.33)

The basic object of this formalism[] is the generating functional of correlation functions[],  $Z[J]$ . このフォーマリズムの基本的なオブジェクトは相関関数、 $Z[J]$  の機能的な生成である。(Some authors call it  $W[J]$ . 何人かの作者はそれを  $W[J]$  と呼ぶ。)

In a scalar field theory,  $Z[J]$  is defined as スカラの場の理論において、 $Z[J]$  はそれと定義される

$$Z[J] \equiv \int D\phi \exp[i \int d^4x \{ \mathcal{L} + J(x)\phi(x) \}]$$

This is functional integral over  $X$  in which we have added[追加し] to  $\mathcal{L}$  in the exponent a source term[],  $J(x)\phi(x)$ . 私達がソースターム、 $J(x)\phi(x)$  を指数の中の $\mathcal{L}$ に追加した  $X$  の上で、これは範関数積分である。

Correlation functions[相関関数] of the Klein-Gordon field theory can be simply computed by taking functional derivatives[] of the generating functional. クラインゴードン場の理論の相関関数は、[機能的な生成] の [機能的なデリバティブ] を取ることによって単に計算されることが出来る。

For example, the two-point function is

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = \frac{1}{Z_0}(-i\frac{\delta}{\delta J(x_1)})(-i\frac{\delta}{\delta J(x_2)})Z[J]|_{J=0}$$

where  $Z$ . Each functional derivative brings down a factor of  $X$  in the numerator of  $Z[J]$ ; setting  $J=0$ , we recover expression (9.18).  $Z$ . それぞれ [機能的なデリバティブ] が  $Z[J]$  の分子の中で  $X$  のファクターを倒す所; 設定  $J=0$ 、私達は表現 (9.18) を回復する。



To compute higher correlation functions we simply take more functional derivatives. より高い相関関数を計算するために、私達は単により [機能的なデリバティブ] を取る。

Formula (9.35) is useful because, in a free field theory,  $Z[J]$  can be rewritten in a very explicit form. 自由な場の理論の中で、 $Z[J]$  が非常に明示的なフォームにおいて書き直されることができるので、式 (9.35) は有益である。

Consider the exponent of (9.34) in the free Klein-Gordon theory. 自由なクライン・ゴードン理論の中で (9.34) の指数を考慮しなさい。

Integrating by parts, we obtain 部分によって [融合] して、私達は通用している。(9.36)

(The  $i$  is a convergence 収束 factor for the functional integral, as we discussed below Eq. (9.23). 私達が Eq の下で議論した時に、 $i$  は関数積分のための収斂ファクターである。(9.23).)

We can complete the square[] by introducing a shifted field, 私達は、シフトしたフィールドを導入することによって広場を完成することができる。

Making this substitution[代用] and using the fact that  $D$  is a Green's function of the Klein-Gordon operator, we find that (9.36) becomes この代用をし、 $D$  がクライン・ゴードンオペレータの [緑色の機能] であるという事実を使って、私達は、(9.36) が適していると気付く。

More symbolically, we could write the change of variables as より象徴的に、私達はそれとして変数の変化を書くことができた (9.37)

and the result (9.38)

Now change variables from  $X$  to  $X$  in the functional integral of (9.34). さあ、(9.34) の関数積分において [変化物] を  $X$  から  $X$  に交換しなさい。

This is just a shift, and so the Jacobian of the transformation is 1. これは単にシフトであり、従って、変化のヤコビアンは 1 である。

The result is

The second exponential factor is independent of  $X$ , while the remaining integral over  $X$  is precisely[正確]  $Z$ .  $X$  の上の残っている [全体] が正確に  $Z$  である間、2 番目の指数因子は  $X$  から独立である。

Thus the generating functional of the free Klein-Gordon theory is simply 従って、自由なクライン・ゴードン理論の [機能的な] 生成は単にである。

$$Z[J] = Z_0 \exp\left[-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y)\right]$$

Let us use Eqs. (9.39) and (9.35) to compute some correlation functions. 私達に Eqs を使わせなさい。(9.39) そして、いくつかの相互関係機能を計算する (9.35)。

The two-point function is

ゲージ場の量子論 p77

$$H = \frac{1}{2} p^2 + V(q)$$

$$q(t) = e^{iHt} q e^{-iHt}$$

$$q(t)|q, t\rangle = q|q, t\rangle$$

$$q|q\rangle = q|q\rangle$$

$$|q, t\rangle = e^{iHt}|q\rangle$$

今から次の遷移振幅を計算することを考えよう。

$$\langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle = \langle q_F | e^{-iH(t_F - t_I)} | q_I \rangle$$

時刻  $t_I$  から  $t_F$  の間を  $N + 1$  等分した時系列

をとり、

$$\int dq_j |q_j, t_j\rangle \langle q_j, t_j| = 1$$

を (6) の間にはさんでやれば、遷移振幅は

$$\begin{aligned} \langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle &= \int \cdots \int dq_1 \cdots dq_N \left( \prod_{j=1}^N \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle \right) \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle \\ &[= \int \cdots \int dq_1 \cdots dq_N \langle q_{N+1}, t_{N+1} | q_N, t_N \rangle \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle] \end{aligned}$$

と書ける。この (9) の  $N$  重積分の被積分関数は、 $q_I \equiv q_0$  から出発し、各時刻にを経て  $q_F \equiv q_{N+1}$  に至る一つの経路に対応する振幅を与えており、それゆえ (9) は (6) の遷移振幅があらゆる経路に対応する振幅を足し上げたものであることを示している。

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-iH\epsilon} | q_j \rangle \\ &= [\approx] \langle q_{j+1} | (1 - iH\epsilon) | q_j \rangle \end{aligned}$$

$p$  の固有ベクトルの完全系を挿入したり、 $\langle q | p \rangle = e^{ipq} / \sqrt{2\pi}$  を用いて、

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \frac{1}{2} p^2 | q_j \rangle &= \int dp_j \langle q_{j+1} | \frac{1}{2} p^2 | q_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle \\ &= \int \frac{dp_j}{2\pi} \frac{1}{2} p_j^2 e^{ip_j(q_{j+1} - q_j)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1}|V(q)|q_j\rangle &= V(q_j)\delta(q_{j+1}-q_j) \\
&= V\left(\frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\int\frac{dp_j}{2\pi}e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)}
\end{aligned}$$

そうすれば、(10) は

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1}, t_{j+1}|q_j, t_j\rangle[ &= \langle q_{j+1}|q_j\rangle - i\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle\epsilon \\
&= \int\frac{dp_j}{2\pi}e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)} - i\left\{\int\frac{dp_j}{2\pi}\frac{1}{2}p_j^2e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)} + V\left(\frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\int\frac{dp_j}{2\pi}e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)}\right\}\epsilon] \\
&= \int\frac{dp_j}{2\pi}\left\{1 - i\epsilon H\left(p_j, \frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\right\}e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)} \\
&= \int\frac{dp_j}{2\pi}\exp i\left[p_j(q_{j+1}-q_j) - H\left(p_j, \frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\right]\epsilon
\end{aligned}$$

と書けるので、(6) の遷移振幅は結局

$$\begin{aligned}
&\langle q_F, t_F|q_I, t_I\rangle \\
&= \lim_{N\rightarrow\infty}\int\cdots\int\frac{dp_0}{2\pi}\prod_{j=1}^N\left(\frac{dp_jdq_j}{2\pi}\right)\exp i\sum_{j=0}^N\left[p_j\frac{q_{j+1}-q_j}{\epsilon} - H\left(p_j, \frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\right]\epsilon \\
&[= \lim_{N\rightarrow\infty}\int\cdots\int\frac{dp_0}{2\pi}\prod_{j=1}^N\prod_a\left(\frac{dp_{j,a}dq_{j,a}}{2\pi}\right)\exp i\sum_{j=0}^N\left[\sum_a p_{j,a}\frac{q_{j+1,a}-q_{j,a}}{\epsilon} - H\left(p_j, \frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\right]\epsilon]
\end{aligned}$$

p275

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$[\int Dx(t) \equiv \frac{1}{C(\epsilon)} \int \frac{dx_1}{C(\epsilon)} \int \frac{dx_2}{C(\epsilon)} \cdots \int \frac{dx_{N-1}}{C(\epsilon)} = \frac{1}{C(\epsilon)} \prod_k \int \frac{dx_k}{C(\epsilon)}]$$

$$U(q_a,q_b;T)=< q_b|e^{-iHT}|q_a>$$

$$1=(\prod_i\int dq_k^i)|q_k><q_k|$$

$$< q_{k+1}|e^{-iH\epsilon}|q_k>\longrightarrow_{\epsilon\rightarrow 0}< q_{k+1}|(1-iH\epsilon+\cdots)|q_k>$$

$$U(q_0,q_N;T)=\Big(\prod_{i,k}\int dq_k^i\int\frac{dq_k^i}{2\pi}\Big)exp\Big[i\sum_k\Big(\sum_ip_k^i(q_{k+1}^i-q_k^i)-\epsilon H(\frac{q_{k+1}+q_k}{2},p_k)\Big)\Big]$$

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$$

$$q(t) = e^{iHt} q e^{-iHt}$$

$$q(t)|q, t\rangle = q|q, t\rangle$$

$$q|q\rangle = q|q\rangle$$

$$|q, t\rangle = e^{iHt}|q\rangle$$

今から次の遷移振幅を計算することを考えよう。

$$\langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle = \langle q_F | e^{-iH(t_F - t_I)} | q_I \rangle$$

時刻  $t_I$  から  $t_F$  の間を  $N + 1$  等分した時系列

をとり、

$$\int dq_j |q_j, t_j\rangle \langle q_j, t_j| = 1$$

を (6) の間にはさんでやれば、遷移振幅は

$$\begin{aligned} \langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle &= \int \cdots \int dq_1 \cdots dq_N \left( \prod_{j=1}^N \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle \right) \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle \\ &[= \int \cdots \int dq_1 \cdots dq_N \langle q_{N+1}, t_{N+1} | q_N, t_N \rangle \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle] \end{aligned}$$

と書ける。この (9) の  $N$  重積分の被積分関数は、 $q_I \equiv q_0$  から出発し、各時刻にを経て  $q_F \equiv q_{N+1}$  に至る一つの経路に対応する振幅を与えており、それゆえ (9) は (6) の遷移振幅があらゆる経路に対応する振幅を足し上げたものであることを示している。

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-iH\Delta t} | q_j \rangle \\ &= [\approx] \langle q_{j+1} | (1 - iH\Delta t) | q_j \rangle \end{aligned}$$

$p$  の固有ベクトルの完全系を挿入したり、 $\langle q | p \rangle = e^{ipq} / \sqrt{2\pi}$  を用いて、

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \frac{1}{2}p^2 | q_j \rangle &= \int dp_j \langle q_{j+1} | \frac{1}{2}p^2 | q_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle \\ &= \int \frac{dp_j}{2\pi} \frac{1}{2} p_j^2 e^{ip_j(q_{j+1} - q_j)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1}|V(q)|q_j\rangle &= V(q_j)\delta(q_{j+1}-q_j) \\
&= V\left(\frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\int\frac{dp_j}{2\pi}e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)}
\end{aligned}$$

そうすれば、(10) は

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1}, t_{j+1}|q_j, t_j\rangle[ &= \langle q_{j+1}|q_j\rangle - i\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle\Delta t \\
&= \int\frac{dp_j}{2\pi}e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)} - i\left\{\int\frac{dp_j}{2\pi}\frac{1}{2}p_j^2e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)} + V\left(\frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\int\frac{dp_j}{2\pi}e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)}\right\}\Delta t] \\
&= \int\frac{dp_j}{2\pi}\left\{1 - i\Delta t H\left(p_j, \frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\right\}e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)} \\
&= \int\frac{dp_j}{2\pi}\exp i\left[p_j(q_{j+1}-q_j) - H\left(p_j, \frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\right]\Delta t
\end{aligned}$$

と書けるので、(6) の遷移振幅は結局

$$\begin{aligned}
&\langle q_F, t_F|q_I, t_I\rangle \\
&= \lim_{N\rightarrow\infty}\int\cdots\int\frac{dp_0}{2\pi}\prod_{j=1}^N\left(\frac{dp_jdq_j}{2\pi}\right)\exp i\sum_{j=0}^N\left[p_j\frac{q_{j+1}-q_j}{\Delta t} - H\left(p_j, \frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\right]\Delta t \\
&[= \lim_{N\rightarrow\infty}\int\cdots\int\frac{dp_0}{2\pi}\prod_{j=1}^N\prod_a\left(\frac{dp_{j,a}dq_{j,a}}{2\pi}\right)\exp i\sum_{j=0}^N\left[\sum_a p_{j,a}\frac{q_{j+1,a}-q_{j,a}}{\Delta t} - H\left(p_j, \frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\right]\Delta t]
\end{aligned}$$

場の量子論 p56

ハイゼンベルク描像での座標演算子の固有値  $q$  の固有状態をと書くと

$$Q_H(t)|q, t\rangle_H = q|q, t\rangle_H$$

が成り立つ。

$$Q_S|q\rangle = q|q\rangle$$

$$Q_H(t) = e^{iHt}Q_S e^{-iHt}, \quad |q, t\rangle_H = e^{iHt}|q\rangle$$

時刻で座標にいた粒子が時刻で座標に遷移する確率振幅を求めよう。

$$\langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle_H = \langle q_F | e^{-iH(t_F - t_I)} | q_I \rangle$$

時間間隔を  $n$  個に細分化し、

各時刻で完全系  $\int dq_j |q_j, t_j\rangle_H \langle q_j, t_j| = 1$  を挿入して評価すると

$$\langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle_H = \prod_j \int dq_j \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle_H \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle_H$$

となる。

各区間では微小時間だから近似ができて

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-iH\Delta t} | q_j \rangle \approx \langle q_{j+1} | 1 - iH\Delta t | q_j \rangle$$

となる。

$$H = \frac{P^2}{2m} f(Q) + V(Q)$$

$$\int dp \langle q_{j+1} | p \rangle \langle p | \frac{P^2}{2m} | q_j \rangle = f(q_j)$$

$$V(q_j) \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q_{j+1} - q_j)}$$

$$\langle q_{j+1} | H | q_j \rangle = \langle q_{j+1} | \frac{P^2}{2m} f(Q) | q_j \rangle + \langle q_{j+1} | V(Q) | q_j \rangle$$

位相空間での経路積分

$$\langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle_H = \lim \int \frac{dp_0}{2\pi} \prod_j \left( \int \frac{dp_j dq_j}{2\pi} \right)$$

$$\exp\left[i \sum_{j=0}^{n-1} \{p_j(q_{j+1} - q_j) - H(p_j, q_j)\Delta t\}\right]$$

$$Q_a|q = q_a|q\rangle$$

$$\langle q|p\rangle = \prod_a$$

$$Q_a(t) \equiv \exp(iHt)Q_a \exp(-iHt)$$

$$Q_a(t)|q;t\rangle = q_a|q;t\rangle$$

$$|q;t\rangle = \exp(iHt)|q\rangle$$

$$\int \prod_a dq_a |q;t\rangle \langle q;t| = 1$$

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \int dq_1 \cdots dq_N \langle q';t'|q_N;t_N\rangle \langle q_N;t_N|q_{N-1};t_{N-1}\rangle \cdots \langle q_1;t_1|q;t\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle q';t'|q;t\rangle &= \int \left[ \prod_{k=1}^N \prod_a dq_{k,a} \right] \left[ \prod_{k=1}^N \prod_a \int dp_{k,a}/2\pi \right] \\ &\exp \left[ i \sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \sum_a (q_{k,a} - q_{k-1,a}) p_{k-1,a} - H(q_k, p_{k-1}) dt \right\} \right] \end{aligned}$$

$$q_0 \equiv q, \quad q_{N+1} \equiv q'$$



p275

We begin by applying[適用] the functional integral (or path integral) method to the simplest imaginable system: a nonrelativistic[非相対論的] quantum-mechanical particle (moving in one dimension). The Hamiltonian for this system is

[機能的な必須] の (または経路積分) 方法を最も簡単な想像できるシステムに適用することから、私達は始める: 1次元において動いている非相対論的な量子力学的な粒子。このシステムのためのハミルトニアンは [そうである。]

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Suppose [that we wish to compute the amplitude for this particle to travel from one point ( $x_a$ ) to another ( $x_b$ ) {in a given time ( $T$ ). We will call this amplitude  $U(x_a, x_b; T)$ ; it is the position representation] of the Schrodinger time-evolution operator. In the canonical Hamiltonian formalism,  $U$  is given by

私達が、この粒子が与えられた時間 ( $T$ ) に 1 ポイント ( $x$ ) から別のもの ( $x$ ) まで移動するように振幅を計算することを望ん [だら。] 私達はこの振幅を  $U(x, x; T)$  と呼ぶ; それはシュレーディンガー時間発展オペレータの位置表示である。[正規の] ハミルトニアンフォーマリズムにおいて、 $U$  は [過ぎて] 与えられる。

$$U(x_a, x_b; T) = \langle x_b | e^{-iHT} | x_a \rangle$$

({For the next few pages} we will display[表示] all factors of  $\hbar$  explicitly.)

(次のいくつかのページのために、私達は明示的に  $H$  のすべてのファクターを表示する。)

{In the path-integral formalism},  $U$  is given by a very different-looking expression. We will first try to motivate that expression, then prove [that it is equivalent to (9.1)].

経路積分フォーマリズムにおいて、 $U$  は非常に違う外観の表現によって与えられる。私達は、最初にその表現を動機づけようとし、そして、それが (9.1) と等しいことを証明する。

Recall [that {in quantum mechanics} there is a superposition principle: {When a process can take place in more than one way}, its total amplitude is the coherent sum of the amplitudes for each way. A simple but nontrivial example is the famous double-slit experiment[実験], shown in Fig. 9.1. The total amplitude for an electron[電子] to arrive at the detector] is the sum of the amplitudes for the two paths shown. {Since the paths differ in length}, these two amplitudes generally differ, causing[起こ] interference[干渉].

量子力学において、付加原則があることを思い出さない: プロセスが複数の方法で起こることができる時に、その全振幅は各方法のために十分な量の首尾一貫した合計である。図 9.1 中で示されて、簡単であるけれども非単純の例は有名な [2 倍の裂け目] 実験である。示された 2 つのパスのために、検出器に到達する電子のための全振幅は十分な量の合計である。パスが長さにおいて異なるので、これらの 2 つの十分な量が一般に異なってその結果干渉を起こす。

For a general system, we might therefore write the total amplitude for traveling from  $x_a$  to  $x_b$  as

従って、一般システムのために、私達は、それとしての  $X$  から  $X$  までを旅行のための全体の振

幅に書くことができる

$$U(x_a, x_b; T) = \sum_{all\,paths} e^{i \cdot (phase)} = \int Dx(t) e^{i \cdot (phase)}$$

{To be democratic}, we have written the amplitude for each particular[特定] path as a pure phase, {so that no path is inherently[本来] more important than any other. The symbol  $\int Dx(t)$  is simply another way of writing “ sum over all paths ”; {since there is one path for every function  $x(t)$  (that begins at  $x_a$  and ends at  $x_b$ ), the sum is actually an integral over this continuous space of functions.

[民主主義の] ために、どのパスも本来どのような他よりも重要でないように、私達は純粋なフェーズとして各特定のパスのために振幅を書いた。シンボル  $D$  は「すべてのパスの上で」[ライティング]「合計」の単に別の方法である； $X$  から始まり、 $X$  で終わるすべての [機能] $X(t)$  のための 1 つのパスがあるので、合計は実際機能のこの継続的なスペースの上で [全体] である。

We can define this integral as part of a natural generalization of the calculus[計算法] to spaces of functions. A function (that maps[] functions to numbers) is called a functional. The integrand in (9.2) is a functional, {since it associates[結び付け] a complex amplitude with any function  $X(t)$ }. The argument of a functional  $F[x(t)]$  is conventionally written in space brackets rather than parentheses. Just as an ordinary function  $Y(x)$  can be integrated over a set of points  $x$ , a functional  $F[]$  can be integrated over a set of functions  $X(t)$ ; the measure of such a functional integral is conventionally written with a script capital  $D$ , {as in (9.2)}. A functional can also be differentiated with respect to its argument (a function), and this functional derivative is denoted[示さ] by  $D$ . We will develop more precise[精密] definitions of this new integral and derivative in the course of this section and the next.

私達はこの全体を機能のスペースへの計算法の自然な一般化の一部と定義することができる。地図が数に作動する [機能] は、機能的と呼ばれる。それが [複雑な] 振幅をどのような [機能] $X(t)$  とでも結び付けるので、(9.2) の被積分関数は機能的である。機能的な  $F[x(t)]$  の [議論] は括弧というよりもスペースブラケットの中で慣例的に書かれる。ちょうど、普通の [機能] $Y(x)$  がポイント  $X$  のセットの上で統合することができるように、機能的な  $F[]$  は機能  $X(t)$  のセットの上で統合することができる；[中](9.2) のように、そのような範囲関数積分の手段はスクリプト [首都] $D$  によって慣例的に書かれる。機能的はまた、その [議論] (機能) について区別できて、この機能的なデリバティブは  $D$ . により示される 私達 このセクションと次の間にこの新しい全体とデリバティブのより精密な定義を展開する。

What should we use for the “ phase ” in Eq. [(9.2)?] {In the classical limit}, we should find [that only one path, the classical path, contributes[寄与し] to the total amplitude. We might therefore hope to evaluate[値を求め] the integral in (9.2) by the method of stationary phase, identifying[識別し] the classical path  $x_{cl}(t)$  by the stationary condition,

私達は Eq における「フェーズ」のために何を使うべきである。(9.2)? 伝統的な [限界] で、私達は、1 つのパス、伝統的なパスだけが全振幅に寄与していると気付くべきである。私達は、従って、静的状態のために伝統的なパス  $X$  を識別して、停留値法によって (9.2) において積分の値を求めることを望むかもしれない。

$$= 0$$

But the classical path is the one (that satisfies the principle of least action,

しかし、[伝統的な] パスは、最小作用の原理を満たしているものである。

$$= 0$$

(where  $S =$  is the classical action). It is tempting[魅力的で], therefore, [to identify[識別] the phase with  $S$ , up to a constant. Since the stationary-phase approximation[近似] should be valid[有効で] in the classical limit - that is, when  $S \gg \hbar$  - we will use  $S$  for the phase. Our final formula for the propagation amplitude is thus

$S$  が伝統的な行動である [所]。従って、定数まで  $S$  を持つフェーズを識別することは魅力的である。固定相近似が伝統的な限界—すなわちいつ  $S$ —で有効であるべきであるので、私達はフェーズのために  $S$  を使う。伝播振幅についての私達の最終的な式は従ってである。

$$\langle x_b | e^{-iHT/\hbar} | x_a \rangle = U(x_a, x_b; T) = \int Dx(t) e^{iS[x(t)]/\hbar}$$

We can easily verify[確認] [that this formula gives the correct interference[干渉] pattern] in the double-slit experiment. The action for either path shown in Fig. 9.1 is just  $(1/2)$ , the kinetic energy times the time. For path 1 the velocity[速度] is  $V$ , so the phase is  $D$ . For path 2 we have  $V$ , so the phase is  $M$ . We must assume[仮定し] [that  $D$ , so that  $V$  (i.e., the electrons have a well-defined velocity). The excess[余分] phase for path 2 is then  $M$ , where  $P$  is the momentum. This is exactly what we would expect[予期] from the de Broglie relation  $P$ , so we must be doing something right. To evaluate the functional integral more generally, we must define the symbol  $D$  in the case where the number of paths  $X$  is more than two (and, in fact, continuously infinite). We will use a brute-force definition, by discretization. Break up the time integral from 0 to  $T$  into many small pieces of duration  $E$ , as shown in Fig. 9.2. Approximate a path  $X$  as a sequence of straight lines, one in each time slice. The action for this discretized path is 私達は、この式が [2 倍の] 裂け目実験において正しい干渉縞を与えることを容易に確認することができる。図 9.1 中で示されたどちらのパスのための行動も正しく  $(1/2)$ 、運動エネルギーは時間の時間を計る。1 パスのために、速度は  $V$  である。従って、フェーズは 2 パスのための  $D$ 。であり 私達  $V$  を持っている、従って、フェーズは、 $M$  私達 その  $D$  従って  $V$  を仮定しなければならないである（すなわち、電子は明確な速度を持っている）。 $P$  がその推進力である所で、2 パスのための余分なフェーズはその時  $M$  である。これは正確に、私達がドブロイ関係  $P$  から予期するであろうものである。私達は何か正しいことをしているにちがいない。より一般に範囲数積分を評価するために、私達は、パス  $X$  の番号が 2(無限量そして、実のところ、継続的である) より多くであるケースにおいてシンボル  $D$  を定義しなければならない。私達は離散化によって暴力定義を使う。図 9.2 に例示するような期間  $E$  の多くの小片の中に 0 から  $T$  まで時間全体を解体しなさい。直線、各タイムスライスの中のものの連鎖としてパス  $X$  に近づきなさい。この discretized されたパスのための行動はそうである。

$$S = \int dt \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right) \longrightarrow \sum_k \left[ \frac{m}{2} \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{\epsilon} - \epsilon V\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right) \right]$$

We then define the path integral by 私達はその時過ぎて経路積分を定義する。

$$\int Dx(t) \equiv \frac{1}{C(\epsilon)} \int \frac{dx_1}{C(\epsilon)} \int \frac{dx_2}{C(\epsilon)} \cdots \int \frac{dx_{N-1}}{C(\epsilon)} = \frac{1}{C(\epsilon)} \prod_k \int \frac{dx_k}{C(\epsilon)}$$

(where  $C()$  is a constant, to be determined[決定] later. (We have included[含] one factor of  $C()$  for each of the  $N$  time slices, for reasons that will be clear below.) {At the end of the calculation}

we take the limit E. (As in Section 4.5 and 6.2, the X symbol is an instruction[指示] to write [what follows once for each K.]

後で決定されるために、C が定数である所。(私達は、N タイムスライスのそれぞれのために、下ではっきりするであろう理由のために C の 1 つのファクターを含んだ。) 計算の終わりに、私達は、[限界]E. (セクション 4.5 と 6.2 ののように、X シンボルは、何が各 K のために 1 回続いているかを書く指示である。)[[取る。]

{Using (9.4) as the definition of the right-hand side of (9.3)}, we will now demonstrate[証明] the validity[妥当性] of (9.3) for a general one-particle potential problem. {To do this}, we will show [that the left- and right-hand sides of (9.3) are obtained by integrating the same differential equation[方程式], with the same initial condition. In the process, we will determine the constant C.

To derive[引き出] the differential equation satisfied[満た] by (9.4), consider the addition of the very last time slice in Fig. 9.2. {According to (9.3) and the definition (9.4)}, we should have (9.3) の右側の定義として使って (9.4)、私達は一般的な 1 粒子 [可能性] 問題のために現在 (9.3) の妥当性を証明する。これをするために、私達は、(9.3) の左と右手の側が、同じ微分方程式を同じ初期の条件と統合することによって得られることを示す。プロセスにおいて、私達は、定数 C. を、(9.4) によって満たされている微分方程式を引き出すと決定し、図 9.2 中でまさしくその前回スライスの付加を考慮する。(9.3) と定義 (9.4) によると、私達は持つべきである。

$$U(x_a, x_b; T) = \int \frac{dx'}{C(\epsilon)} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{m(x_b - x_a)^2}{2\epsilon} - \frac{i}{\hbar} \epsilon V\left(\frac{x_b + x'}{2}\right)\right] U(x_a, x'; T - \epsilon)$$

The integral over X is just the contribution to D from the last time slice, while the exponential factor is the contribution to E from that slice. All contributions from previous slice are contained in U. As we send E, the rapid oscillation of the first term in the exponential constrains X to be very close to X. We can therefore expand the above expression in powers of (): 指数因子がそのスライスからの E への寄与である間、X の上の全体はまさに前回スライスからの D へのその寄与である。私達が E を送る時に、前のスライスからのすべての寄与は U. において含まれていて、指数のものにおける最初の用語の急速な強制振動は、X. の非常に近くで、私達が従って () の能力において上記の表現を展開することができることを X に強制する :

$$U(x_a, x_b; T) = \int \frac{dx'}{C} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\epsilon} (x_b - x')^2\right) \left[1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(x_b) + [1 + (x' - x_b) + (x' - x_b)^2 +] U(x_a, x_b; T - \epsilon)\right]$$

We can now perform the X integral by treating the exponential factor as a Gaussian. (Properly, we should introduce a small real term in the exponent for convergence; we will ignore this term until the next section, when we derive Feynman rules using functional methods.) Recall the Gaussian integration formulae 指数のものを扱うことによる X 全体がガウス性として因数分解する perform のため、私達はできる。(適切に、私達は収斂のために指数の中で小さな実質を導入すべきである; 機能的な方法を使って、私達がファインマン規則を引き出す時に、私達は次のセクションまでこの期間を無視する。) ガウスの統合式を思い出さない。

Applying these identities to (9.5), we find これらのアイデンティティを (9.5) に適用して、私達は発見する。

This expression makes no sense in the limit E unless the factor in parentheses is equal to 1.

We can therefore identify the correct definition of C: 括弧におけるファクターが 1 と等しくない限り、この表現は限界 E で意味を成さない。私達は従って C:の正しい定義を識別することができる。

Given this definition, we can compare terms of order E and multiply by H to obtain この定義を与えられて、私達は、注文 E の用語を比較し、通用するために H で増加することができる。

This is the Schrodinger equation. But it is easy to show that the time-evolution operator U, as originally defined in (9.1), satisfies the same equation. As T, the left-hand side of (9.3) tends to D. Compare this to the value of (9.4) in the case of one time slice: これはシュレディンガー方程式である。しかし、時間発展オペレータ U が、(9.1) において元来定義されるように、同じ方程式を満たしていることを示すことは容易である。T として、(9.3) の左側は D. Compare に 1 つのタイムスライスの場合の (9.4) の価値にこれを世話する :

This is just the peaked exponential of (9.5), and it also tends to D as E. Thus the left- and right-hand sides of (9.3) satisfy the same differential equation with the same initial condition. We conclude that the Hamiltonian definition of the time evolution operator (9.1) and the path-integral definition (9.3) are equivalent, at least for the case of this simple one-dimensional system.

To conclude this section, let us generalize our path-integral formula to more complicated quantum systems. Consider a very general quantum system, described by an arbitrary set of coordinates Q, conjugate momenta P, and Hamiltonian H. We will give a direct proof of the path-integral formula for transition amplitudes in this system. これは、まさに (9.5) で指数であるピークに達であり、それはまた、このように、E. として D に貢献し 左、(9.3) の右手の側は同じ差別的な方程式を同じ初期の条件に満足させる。私達は、時間発展オペレータ (9.1) のハミルトニアン定義と経路積分定義 (9.3) が少なくともこの簡単な一次元系のケースのために等しいと断定する。この節を終えるために、私達により複雑な量子システムに私達の経路積分式を一般化させさせなさい。非常に一般的な量子システムを、座標 Q の任意のセットによって説明されて、接合した推進力 P と考えなさい。そうすれば、ハミルトニアン H. We はこのシステムの中の遷移振幅についての経路積分式の直接証明を与えるであろう。

The transition amplitude (that we would like to compute) is

私達が計算したい遷移振幅は [そうである。]

$$U(q_a, q_b; T) = \langle q_b | e^{-iHT} | q_a \rangle$$

({When  $q$  or  $p$  appears without a superscript}, it will denote the set of all coordinates  $\{q^i\}$  or momenta  $\{p^i\}$ . Also, for convenience, we now set  $\hbar=1$ .) {To write this amplitude as a functional integral}, we first break the time interval into N short slices of duration E. Thus we can write (Q または P が上付き文字なしで出現する時に、それはすべての座標)(または推進力)(のセットを示すであろう。) (また、便利さのために、私達は今や  $\hbar=1$  を設定した。) 範囲数積分としてこの振幅を書くために、私達は最初に時間間隔を、[従って私達を書くことができる N 短いスライス期間 E. に分割する。

$$e^{-iHT} = e^{-iH\epsilon} e^{-iH\epsilon} e^{-iH\epsilon} e^{-iH\epsilon} \quad (N \text{ factors})$$

The trick is [to insert a complete set of intermediate states between each of these factors, in the form

秘訣はフォームにおいて、これらのファクターのそれぞれの間で中間的状态の完全なセットを挿入することである。

$$1 = \left( \prod_i \int dq_k^i \right) |q_k \rangle \langle q_k|$$

Inserting such factors for  $k = 1(N - 1)$ , we are left with a product of factors of the form

1 のためにそのようなファクターを挿入して、私達はフォームのファクターの製品を残される。

$$\langle q_{k+1} | e^{-iH\epsilon} | q_k \rangle \longrightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} \langle q_{k+1} | (1 - iH\epsilon + \dots) | q_k \rangle$$

{To express the first and last factors in this form}, we define  $q_0 = q_a$  and  $q_N = q_b$ . このフォームにおいて最も最初で最後のファクターを表現するために、私達は  $Q$  と  $Q$  を定義する。

Now we must look inside  $H$  and consider [what kinds of terms it might contain]. The simplest kind of term (to evaluate) would be a function only of the coordinates[座標], not of the momenta. The matrix element of such a term would be

さて、私達は、中の  $H$  のようで、それがどんな種類の用語を含むかもしれないかを考慮しなければならない。評価する用語の最も簡単な種類は推進力ではなく座標のだけ機能であるであろう。そのような aa 用語の行列要素はそうであるであろう。

$$\langle q_{k+1} | f(q) | q_k \rangle = f(q_k) \prod_i \delta(q_k^i - q_{k+1}^i)$$

It will be convenient to rewrite this as

[それ] としてのこれを書き直すことが便利である

for reasons (that will soon be apparent.

すぐ明白になるであろう理由のために。

Next consider a term in the Hamiltonian (that is purely a function of the momenta). We introduce a complete set of momentum eigenstates to obtain 推進力のまったく [機能] であるハミルトニアンの中で、次は期間を考慮する。通用するために、私達は推進力固有状態の完全なセットを導入する。

Thus if  $H$  contains only terms of the form  $f()$  and  $f()$ , its matrix element can be written 従って、 $H$  がフォーム  $f()$  と  $f()$  の項だけに相当するならば、その行列要素は書かれることができる。

It would be nice if Eq. (9.10) were true even when  $H$  contains products of  $p$  's and  $q$  's. In general this formula must be false, since the order of a product  $pq$  matters on the left-hand side (where  $H$  is an operator) but not on the right-hand side (where  $H$  is just a function of the numbers  $P$  and  $Q$ ). But for one specific ordering, we can preserve (9.10). For example, the combination Eq ならば、それは良いであろう。  $H$  が  $p$  と  $q$  の製品を含んでいる時にさえ、(9.10) は真実であった。一般に、左側 ( $H$  がオペレータである所) で、製品  $pq$  の注文が重要であるけれども右側 ( $H$  が単に数  $P$  と  $Q$  の機能である所) で、重要でない、この式は間違いでなければならない。しかし、1 回の具体的な注文のために、私達は保護する (9.10) ことができる。例えば組み合わせ

$$\langle q_{k+1} | \frac{1}{4}(q^2 p^2 + 2qp^2 q + p^2 q^2) | q_k \rangle = \left( \frac{q_{k+1} + q_k}{2} \right)^2 \langle q_{k+1} | p^2 | q_k \rangle$$

works out as desired, since the  $q$  's appear symmetrically on the left and right in just the right way. When this happens, the Hamiltonian is said to be Weyl ordered. Any Hamiltonian can be

put into Weyl order by commuting  $p$ 's and  $q$ 's; in general this procedure will introduce some extra terms, and those extra terms must appear on the right-hand side of (9.10). Assuming from now on that  $H$  is Weyl ordered, our typical matrix element from (9.9) can be expressed as 要求されるように、以来、 $q$  のがまさにその適切な方法で左右の上で対称的に出現するとわかる。これが起こる時に、ハミルトニアンは、注文されたワイルであるそうである。どのようなハミルトニアンでも、 $p$  のと  $q$  のを交換することによってワイル注文に入れられることができる；一般に、この手続はいくつかの特別な用語を導入するであろうし、それらの特別な用語は (9.10) の右側の上で出現しなければならない。その  $H$  で、現在のフォームが、注文されたワイルであると仮定することによって、(9.9) からの私達の典型的な行列要素は、それとして表現できる

$$\langle q_{k+1} | e^{-i\epsilon H} | q_k \rangle = \left( \prod_i \int \frac{dq_k^i}{2\pi} \right) \exp \left[ -i\epsilon H \left( \frac{q_{k+1} + q_k}{2}, p_k \right) \right] \\ \exp \left[ i \sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i) \right]$$

(We have again used the fact that  $E$  is small, writing 1 as  $E$ .) To obtain  $U()$ , we multiply  $N$  such factors, one for each  $K$ , and integrate over the intermediate coordinates  $Q$ : (私達は、再び、 $E$  として 1 書いて、 $E$  が少ないという事実を使った。)  $U()$  を得るために、私達は中間物の上で  $N$  を増加させて そのようなファクター、1  $K$  ごとに 1、融合する  $Q$  を調整する：

$$U(q_0, q_N; T) = \left( \prod_{i,k} \int dq_k^i \int \frac{dq_k^i}{2\pi} \right) \exp \left[ i \sum_k \left( \sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i) - i\epsilon H \left( \frac{q_{k+1} + q_k}{2}, p_k \right) \right) \right]$$

There is one momentum integral for each  $K$  from 0 to  $N$ , and one coordinate integral for each  $K$  from 1 to  $N$ . This expression is therefore the discretized form of 0 から  $N$  までの 1  $K$  ごとに 1 つの推進力全体があり、従って、この表現は、1 から  $N$  までの 1  $K$  ごとに 1 つの同等な全体 その discretized されたフォームである

$$U(q_a, q_b; T) = \left( \prod_i \int Dq(t) Dp(t) \right) \exp[]$$

where the functions  $Q$  are constrained at the endpoints, but the functions  $P$  are not. Note that the integration measure  $D$  contains no peculiar constants, as it did in (9.4). The functional measure in (9.12) is just the product of the standard integral over phase space 機能  $Q$  が末端で強制される所けれども機能  $P$  がそうではない。それが (9.4) においてしたように、統合手段  $D$  が奇妙な定数を全然含んでいないことに注意なさい。(9.12) における機能的な手段は位相空間の上でまさに標準の全体のその製品である。

at each point in time. Equation (9.12) is the most general formula for computing transition amplitudes via functional integrals. For a nonrelativistic particle, the Hamiltonian is simply  $H$ . In this case we can evaluate the  $p$ -integrals by completing the square in the exponent:

where  $C$  is just the factor (9.6). Notice that we have one such factor for each time slice. Thus we recover expression (9.3), in discretized form, including the proper factors of  $C$ : 各時点で。方程式 (9.12) は関数積分経路でコンピューティング遷移振幅についての最も一般的な式である。非相対論的な粒子にとって、ハミルトニアンは単に  $H$  である。この場合に、私達は、指数の中で広場を完成することによって  $p$  全体を評価することができる：  $C$  がまさにそのファクター (9.6) である所。私達が各タイムスライスのために 1 つのそのようなファクターを持っていることに気づきなさい。従って、 $C$  の適切なファクターを含めて、私達は discretized されたフォームにおいて表現 (9.3) を回復する。











$$1 = \{\forall \epsilon > 0\}$$

$$2 = \{\exists n_0 \in N\}$$

$$3 = \{n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\}$$

$$4 = \{x|0 \leq x \leq 1\}$$

$$5 = \delta$$

$$6 \cdot 6 \quad 7 \cdots 7 \quad 8 = \vec{a} \quad 9 = \sqrt{a}$$

$$10 = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

$$11 = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

$$12 = \sum_{i=1}^n$$

$$13 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$14 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$15 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$16 \quad = \quad a$$

$$= \quad b$$

$$= \quad c$$

$$17 = \left\{ \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right.$$

定義 18

[次のページへ続く。]

$$19 = \int_a^b$$

$$20 = \alpha \quad 21 = \beta \quad 22 = \theta \quad 23 = \mu \quad 24 = \pi \quad 25 = \rho \quad 26 = \phi \quad 27 = \psi \quad 28 = \Delta$$

$$29 = \partial$$