

ストリング理論 p365

これから多様体 K の p 番目の de Rham コホモロジーを

$$H^p(K) = \frac{K \text{ 上の閉 } p\text{-形式}}{K \text{ 上の完全 } p\text{-形式}}$$

と定義する。 $H^p(K)$ の次元は Betti 数 b_p である。

$\delta = (-1)^{d(p+1)+1} * d*$ と定義すると、演算子

$$\Delta_d = \delta d + d\delta =$$

は形式上の二階微分であり、 p -形式は $= 0$ の時、調和形式と呼ばれる。

p366

これで Dolbeault コホモロジー

$$= \frac{K \text{ 上の } \bar{\partial}\text{-閉 } (p,q)\text{-形式}}{K \text{ 上の } \bar{\partial}\text{-完全 } (p,q)\text{-形式}}$$

を定義できる。の次元が Hodge 数 $h^{p,q}$ である。

内積

を用い、随伴作用素、およびラプラシアン

$$\Delta_{\partial} = \partial\partial^{\dagger} + \partial^{\dagger}\partial, \quad \Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^{\dagger} + \bar{\partial}^{\dagger}\bar{\partial}$$

を定義する $\{m\}$ 。調和 (p,q) -形式は、 $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(K)$ と一対一対応する。

p368

ケーラー計量に対して、様々なラプラシアンが同じ

$$\Delta_d = 2\Delta_{\bar{\partial}} = 2\Delta_{\partial} \quad \{m\}$$

になる。またコホモロジー

は同じである。従って Hodge 数と Betti 数も

$$b_k = \sum_{p=0}^k h^{p,k-p} \quad \{m\}$$

と関連付けられる。複素共役は

$$h^{p,q} = h^{q,p}$$

を与え $\{m\}$ Hodge*は

$$h^{n-p,n-q} = h^{p,q}$$

を与える $\{m\}$ 。

p369

第 1 Chern 類 c_1 と呼ばれる。 $c_1 = 0$ であるケーラー多様体は Calabi-Yau 多様体として知られている。

最後に部分群ではなくそのものをホロノミーとして持つ Calabi-Yau 多様体に対しては、

$$b_1 = h^{1,0} = h^{0,1} = 0$$

となることを示すことができる $\{m\}$ 上の様々な性質を使うと、Calabi-Yau 3-fold の全ての Hodge 数は、わずか 2 個の数 $h^{1,1}$ と $h^{2,1}$ により固定される。Hodge 数の全体集合は慣例的に Hodge ダイアモンド

として示される。

ストリング理論 p480

これは Calabi-Yau 多様体が M と W というミラー対として存在するかもしれないことを示唆している。

理論と理論の T-双対性は、トーラス上の弦がそのミラー上の弦と同じであることを意味する。この結果は次元多様体に対しても成立する。理論を M に置き理論を W に置くと、ベクトル多項式の数 $h_M^{1,1} = h_W^{2,1}$ は同じであり、ハイパー多項式の数も同じである。

普通に経験する時空は次元であるが、内部空間を考えると、小さいスケールで考えると時空の時限はもっと高いと見る。ただし、つ以外の方向には、時空は非常に狭い範囲にしか広がっていないので、われわれには次元に見えると解釈する。いいかえると、本当の時空は、は直径が小さいコンパクト多様体である、とみなすのである。

どのような種類の粒子があり、それらの間にどんな相互作用があるか、あるいはそれらの間にどのような力が働くかが、幾何学的性質から導かれるとする。すなわち、M を決めると、内積空間 $h(M)$ が定まり、その次元が観測される粒子の種類で、相互作用は写像 $m_k : h(M)^{\otimes k} \rightarrow h(M)$ で定まるとする。

定義もどき M から X 型の手続きで決まった内積空間 $h_X(M)$ と、N から Y 型の手続きで決まった内積空間 $h_Y(N)$ が、 m_k も含めて同型であるとき、M でコンパクト化 (compactified by X) された X 型の弦理論と、N でコンパクト化された Y 型の弦理論は等価であるという。

背景の説明はこのぐらいにして数学の話に移ろう。空間から、とを作る処方箋を以下で 2 つ解説する。これらによって、A 模型 (A model) と B 模型 (B model) と呼ばれた。A 模型では M にシンプレクティック構造を、B 模型では M に複素構造を与える。

定義もどき M^\dagger が M のミラー (mirror) であるとは、M でコンパクト化した A 模型が M^\dagger でコンパクト化した B 模型と等価なことを指す。

M を複素多様体とする。の次の上の外積を $\Omega_C^m M$ と書く。型式のなす正則ベクトル束はその双対である。

$$\text{定義 } H_B^{m,l}(M) = H^l(M; \Omega_C^m M)$$

右辺は層係数コホモロジーである。あるいは、ドルボー作用素

のコホモロジー、すなわちドルボーコホモロジーである。が模型で定めるベクトル空間である。次にを定義する。外積代数の積は

$$\wedge : (\Lambda^{0,l_1} M \otimes \Omega_C^{m_1} M) \otimes (\Lambda^{0,l_2} M \otimes \Omega_C^{m_2} M) \rightarrow \Lambda^{0,l_1+l_2} M \otimes \Omega_C^{m_1+m_2} M \quad (6.1)$$

を定める。ドルボー作用素と外積は $\bar{\partial}(u \wedge v) = \bar{\partial}u \wedge v + (-1)^{\deg u} u \wedge \bar{\partial}v$ を満たすから、(6.1) は積

$$m_2^B : H_B^{m_1,l_1}(M) \otimes H_B^{m_2,l_2}(M) \rightarrow H_B^{m_1+m_2,l_1+l_2}(M)$$

を導く。

定義 n 次元複素多様体 M が、弱い意味でカラビ-ヤウ多様体 (Calabi-Yau manifold) であるとは、が複素直線束として自明であることを指す。

カラビ-ヤウ多様体には、リッチ曲率が 0 であるケーラー計量が存在する。

注意 が単にカラビヤウ多様体という場合は、M がケーラー多様体でさらに、 $\omega = 0$ であることを要請する場合が多い。

M がカラビ-ヤウ多様体であると、正則ベクトル束の同型、が成り立つ。とのテンソル積をとると、同型が導かれる。 $u \mapsto \int_M u$ なる写像を合成したものを $\text{int}_M : \Gamma(M; \Omega_C^n M \otimes \Lambda^{0,n}) \rightarrow C$ と書く。

定義 $[u] \in H_B^{m_1,l_1}(M)$, $[v] \in H_B^{m_2,l_2}(M)$ に対して、その内積を次の式で定義する。

$$\langle u, v \rangle_B = \begin{cases} \text{int}_M(m_2(u, v)), & m_1 + m_2 = l_1 + l_2 = n \text{ のとき,} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

複素多様体 M に対して $H_B^*(M) = \bigoplus_{m+l=*} H_B^{m,l}(M)$ とおく。

注意 キャラビヤウ多様体の場合、複素ベクトル束の同型が成り立つ。したがって、次の同型が成り立つ。

$$H_B^{m,l}(M) \simeq H_{\bar{\partial}}^{n-m,l}(M)$$

例 M は複素 3 次元としよう。 $u, v, w \in H_B^{1,1}(M) \simeq H_{\bar{\partial}}^{2,1}(M)$ とする。このとき $Y(u, v, w) = \langle m_2^B(u, v), w \rangle_B$ とおくと、はの置換で不変で、のどれについても次である。すなわち、は上の次元を定める。 Y を湯川結合()と呼ぶ。複素次元での場合は湯川結合で決まる。

量子補正

今度は M をシンプレクティック多様体とする。

定義 $H_A^k(M) = H^k(M; \mathbb{C})$ 、 $H_A^*(M) = \bigoplus_{k \equiv * \pmod{2}} H_A^k(M)$ とし、その上の内積 \langle, \rangle_A を $\langle u, v \rangle_A = \int_M u \cup v$ で定義する ()。

M のシンプレクティック構造 ω_M と整合的な、概複素構造 J_M をとる。 $\beta \in H_*(M; \mathbb{Z})$ とする。 $ev = (ev_1, ev_2, ev_3) : M_{0,3}(M, J_M; \beta) \rightarrow M^3$ を $ev(\varphi) = (\varphi(0), \varphi(1), \varphi(\infty))$ で定義する。

定理もどき $M_{0,3}(M, J_M; \beta)$ のコンパクト化の基本ホモロジー類が、 \mathbb{Q} 係数ホモロジーの元として定義され、 $ev_*[CM_{0,3}(M, J_M; \beta)] \in H_k(M^3; \mathbb{Q})$ が定まる。

定理もどきを用いて、写像 $m_{2,\beta}^A : H^*(M; \mathbb{Q})^{\otimes 2} \rightarrow H^*(M; \mathbb{Q})$ を

$$m_{2,\beta}^A(P \times Q) = (P \times Q) / ev_*[CM_{0,3}(M, J_M; \beta)]$$

で定義する。ここで $/$ はスラント積

$$H^{m_1}(M; \mathbb{Q}) \otimes H^{m_2}(M; \mathbb{Q}) \otimes H_m(M^3; \mathbb{Q}) \rightarrow H^{m_1+m_2-m}(M; \mathbb{Q})$$

である。

m_2^A を定義するには、これらにさらに重さを付けて足し合わせる。

$$m_2^A((P, \psi), (Q, \psi')) = \sum_{\beta} \exp(-\beta \cap \omega_M) m_{2,\beta}(P, \psi), (Q, \psi')$$

予想 任意のシンプレクティック多様体に対して、必要ならをその定数倍でおきかえれば、の右辺は絶対収束する。

$m_2^{A, fm}$ を次の式で定義する。

$$m_2^{A, fm}(P \times Q) = \sum_{\beta} m_{2,\beta}^A(P \times Q) T^{\beta \cap \omega_M} \otimes u^{\beta \cap c^1(M)}$$

定理から \mathbb{C} 係数のフロベニウス代数が得られる。これを $(H_A^*(M), m_2^A, \langle, \rangle_A)$ とおく。

予想 強い意味のキャラビ-ヤウ多様体 M に対して、そのミラー M^\dagger が存在して、次のフロベニウス代数の同型が成り立つ。

$$(H_A^*(M), m_2^A, \langle, \rangle_A) \simeq (H_B^*(M^\dagger), m_2^B, \langle, \rangle_B)$$

注意 式 (6.4) より、 $H_B^*(M^\dagger) = \bigoplus_{l+m=*} H_{\bar{\partial}}^{n-m,l}(M^\dagger)$ である。一方 $H_A^*(M) = \bigoplus_{l+m=*} H_{\bar{\partial}}^{m,l}(M)$ が成り立つ (ホッジ分解 ())。ミラー対称性では、同型 $H_A^*(M) \simeq H_B^*(M^\dagger)$ より強く

$$H_{\bar{\partial}}^{n-m,l}(M^\dagger) \simeq H_{\bar{\partial}}^{m,l}(M) \quad (6.7)$$

が予想される。ホッジ数 (Hodge number) $h^{m,l}(M) = \text{rank} H_{\bar{\partial}}^{m,l}(M)$ を、図のように並べたものを、ホッジダイヤモンド (Hodge diamond) と呼ぶ。ミラー対称性はホッジダイヤモンドをに沿って折り返す。

$n = 3$ で $H^1(M; \mathbb{Q}) = 0$ の場合には、 $h^{1,1}(M)$ と $h^{2,1}(M)$ でホッジ数はすべて決まるが $\{p^?, q^?\}$ (6.7) はこの場合は、 $h^{1,1}(M) = h^{2,1}(M^\dagger)$ を意味する $\{p^?, q^?\}$ 。

p246

定義 n 次元複素多様体 M が、弱い意味でカラビ-ヤウ多様体であるとは、が複素直線束として自明であることを指す。

カラビ-ヤウ多様体には、リッチ曲率が 0 であるケーラー計量が存在する。

注意 が単にカラビヤウ多様体という場合は、 M がケーラー多様体でさらに、 $c_1 = 0$ であることを要請する場合が多い。

p14

調和振動子

作用

最小作用の原理

量子化

固有値

エネルギー

確率振幅

経路積分

閉じた弦

生成

閉曲面の種数

長さの尺度

角度をかえない変換

代数曲線

射影曲線

楕円曲線

双有理不変量

楕円曲線のモジュライ空間

モジュライ空間

Teichmüller 空間

埋め込み

ゲージを固定する

アノマリーが消える

超対称性

第 1 Chern 類が 0

深谷 18, 122

ミラー対称性
ボ
桂
mirror 対称性
正則 i 形式の芽のなす層
標準束

深谷 246
キャラビ-ヤウ多様体
ボ
桂
Calabi-Yau 多様体
K3 曲面
4 次非特異超曲面

深谷 251
ホッジダイヤモンド
ボ
桂
Hodge ダイヤモンド

深谷 258
半安定曲線の種数
種数
反対称テンソル

深谷 161
共形場の理論
ボ
桂
共形場理論

深谷 58
共形変換
ボ
桂
共形変換
mirror 多様体
mirror pair
接層
serre 双対性

Kähler 構造の変形
標準束

ミラー対称性入門 p2 高橋

ミラー対称性 { } 共形場の理論 { シ 161 }

超弦理論のコンパクト化。すべての素粒子はごく短い紐のさまざまな運動状態に対応している。閉じた紐を量子化するとその最低エネルギー（基底）状態には、スピンの 2 で質量がゼロの状態が現れ、開いた弦を量子化すると最低エネルギーにスピンが 1 で質量がゼロの状態が現れます。重力子、ゲージ粒子。重力理論、

特異点 { シ 256,259 }

、超弦理論が整合的に存在できるのは 10 次元の空間です。10 次元が選ばれるのは理論の共形不変性のためで、いま、弦が伸びている方向のパラメータを $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ 、時間に対応するパラメータを τ として 10 次元時空での弦の座標を

$$X^\mu(\tau, \sigma), \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, 9$$

と表すことにしましょう。弦が運動するとその軌跡は 10 次元時空 $M^{9,1}$ の中の面を張ります。これをパラメータで張られる領域、ワールドシート Σ が 10 次元空間へ写像されたものと考えます。

複素数 z を $z = e^{\tau + i\sigma}$ と定義すると、ワールドシートは (複素構造 { シ 23 } を持つ) リーマン面 { シ } となります。境界を持たないリーマン面は閉じた弦の運動に対応し、境界を持つリーマン面は開いた弦に対応します。パラメータ σ, τ の取り方には任意性があるため、パラメータの選び方について理論が依存しないようにすることが必要です。弦理論の共形不変性はこうしたパラメータの選び方に関する理論の依存性を取り去るもので弦理論の根幹をなす対称性です。

共形変換 { シ 58 } は $f(z)$ を z の任意の正則関数として $z \rightarrow f(z)$ で定義されます。すなわちワールドシートの座標 z を勝手に $f(z)$ に取り替えても理論が不変 () に留まることが必要です。。

さて次に、10 次元時空が 4 次元のミンコフスキー空間 $M^{3,1}$ と 6 次元の (内部) 空間 K の積 $M^{3,1} \times K$ の形を持つ場合を考えましょう。このときには理論の共形不変性を保つため許される空間 K に特別な制約が付きまゝ。さらに $M^{3,1}$ 上の理論に超対称性があることを要求すると、内部空間 K はカラビ-ヤウ多様体 { , , , , シ } と呼ばれる特別な多様体になる必要があります。内部空間 K の大きさが小さい () と、日常生活ではこの空間の広がりは見ることができないので、時空は 4 次元に見えます。こうした設定を弦理論のカラビ-ヤウ・コンパクト化 (compactification) と呼びます。

カラビ-ヤウ多様体は複素次元 3 のケーラー多様体ですが、曲率の一部、 $U(1)$ 部分が消えているという特別な性質を持っています。ケーラー多様体では曲率の $U(1)$ 部分はリッチ・テンソルに相当するため、カラビヤウ条件はリッチ平坦 { 46 } 条件

$$R_{IJ}(g) = 0, \quad I, J = 1, 2, \dots, 6$$

に帰着します。ここで R_{IJ} はリッチ・テンソル、 g は計量です。

共形不変性を破る量子的な効果はリッチ・テンソルに比例します。カラビヤウ多様体はちょうどリッチ・テンソルが消えているため、弦理論は量子化された後も共形不変性を保つことが保証されます。

次に、カラビヤウ多様体の持つ変形の自由度、モジュライを議論しましょう。いま、多様体の計量 g を少し変化させて $g+$ とします。

このときはカラビヤウ多様体のモジュライを表します。

ケーラー計量 { }。こうした変形をケーラー変形と呼んでいます。複素構造の変形。

カラビ-ヤウ多様体上のケーラー変形の数 $h_{1,1}(K)$ 個、複素構造の変形の数 $h_{2,1}(K)$ 個存在することが知られています。ここで $h_{p,q}(K)$ はホッジ数と呼ばれる量で、多様体 K が持つ (p,q) 型の調和微分形式 {接?} の数を表します ($h_{p,q} = h_{q,p}$)。

複素射影空間 { 46 }

カラビ-ヤウ多様体のミラー対称性 { } と呼ばれるものは、まず 1 つのカラビ-ヤウ多様体 K が与えられホッジ数 $h_{1,1}(K), h_{2,1}(K)$ を持つとき、別のカラビヤウ多様体でホッジ数が

$$h_{1,1}() = h_{2,1}(K), \quad h_{2,1}() = h_{1,1}(K)$$

のものが存在する、と言う主張です。多様体は K と一種の鏡映 { } 関係にあると考えられるため、 K の ミラー {シ 245} (多様体) とも呼ばれます。数え上げ幾何学 {シ}。複素幾何学とシンプレック幾何学

B モデル { } A モデル { }

正則な $(3,0)$ 形式

ブレポテンシャル { }

湯川結合 { }

指数 { }

量子補正 { }

鏡映 { } 関係。キャンデラス等は A,B モデルの周期が互いに整数行列のシンプレクティック変換 { } で結ばれていることを仮定し、

一般に、ワールドシートを種数 { } の高いリーマン面としカラビ-ヤウ多様体 K への正則写像を考えると、次数 k と種数 g に依存する量 n_k^g を導入することができます。種数の高いリーマン面 { } はモジュライを持ちますが、これらのモジュライについては積分した量を考えます。すると n_k^g は K のシンプレクティック構造 { } の不変量となり、 K のグロモフウィッテン不変量 { } と呼ばれます。

ミラー対称性入門 p95

1

フレアーホモロジー { 95,103、シ } ホモロジー { 21 }。ループ空間 { 95、シ 54 }。ループ空間というのは、空間 M への円周 S^1 からの写像の全体のなす空間のことです。

モース理論 { 95、シ 7 } 閉測地線

つまり、「ループ空間のなかの 2 分の無限次元の図形を考えて、そのしかるべき同値類を考えたもの」がフレアーホモロジーです。

無限次元 { 97 }

ミラー対称性 { 84、シ 18,122 }

ミラー対称性は、シンプレクティック幾何学と複素幾何学の間の対称性である。複素多様体における層係数コホモロジー論の、シンプレクティック幾何学における対応物が、フレアーホモロジーである。

層 { 124 } コホモロジー { 52 }

ホモロジー的ミラー対称性 { シ 335 }

4

ハミルトン形式 { 100、シハミルトン型式 10 }、ラグランジュ形式 { 100、シラグランジュ型式 10 }。このうちラグランジュ形式の変分法は、節で述べたモースの考えにもとづき、ループ空間の普通のホモロジーに関わります。一方ハミルトン形式の変分法は、フレアーホモロジーに発展します。

簡単のため変数で考え、ポテンシャル $V(q)$ が決める力をうけて働く粒子を考えると、ラグランジュの汎関数は

ラグランジュ形式での変分原理とは、

「で

が極値をとることと、がニュートンの運動方程式

$$= -grad_{q(t)} V$$

を満たすこととは同値である」

q が f 極値をとる、というのを、 q が f の臨界点 { シ 43 } である、と言います。

ハミルトン形式。同じ変数でも扱う道は相空間 $((q,p)$ が座標の 2 次元空間) の上の道になります。汎関数は

ハミルトン形式での変分原理は

「」

5

2 次元球面上の運動方程式を考えましょう。このときラグランジュ形式では、上の汎関数

=

。(リーマン計量。) これを道のエネルギー { シ 57 } と言います。この汎関数の臨界点もやはり測地線。

球面の測地線全体の集合をと書くとき、
モース指数 $\{ \text{シ } 90 \}$ と言われる数で、これは、測地線の長さが減っていく方向の数、を表します。

6

余接束 $\{ \text{シ } 47 \}$ 閉じた道。

道が点につぶれる (0 ホモトピック)

ハミルトンの汎関数は

幾何学的意味。「 Γ 」はの面積になる。」

言い換えると

=

がシンプレクティック形式と呼ばれています。

7

なる関数を考えます。ハミルトンの正準方程式
の周期解。

シンプレクティック多様体 $\{ \text{シ } 21 \}$

任意のコンパクトな相空間上の周期的なハミルトニアン H に対して、正準方程式 (10) には周期
解が存在する

p121

1

CP^4 の 5 次超曲面の中の有理曲線の数。

2

ミラー対称性予想、。

カラビヤウ多様体 M に対して、そのミラー { 245 } と呼ばれるカラビヤウ多様体があり、 M 上の A モデル { シ A 模型 245 } と呼ばれる弦理論と、上の B モデル { シ B 模型 245 } と呼ばれる弦理論は等価である。

2 つの「空間」が等しいというのはどういうことか。

ミラー対称性での M やは、我々が直接観測できるサイズよりずっと小さく、それを我々が感知できるのは、それから間接的に現れる諸量を通してのみであると思われる。

したがって、 M 上の A モデルと呼ばれる弦理論と、上のモデルと呼ばれる弦理論が等しい、という命題は、空間 M が空間に等しいという命題と差がない。

3

ホモロジー代数。つのカラビヤウ多様体が「等しい」ということを考えるには、。

空間を一般化するとき、空間をその上の関数の作る環で置き換える。「非可換幾何学」。

森田同値

R 上の加群 { シ } 全体と $M_n(R)$ 上の加群全体の間には、一対一の対応がある。

スキーム { シ 16 } 層

位相空間 X の上の層というのは、大体 X の開集合 U に対してその上の「関数の集合」を対応させる対応である。構造層

アフィン代数多様体

加群の層。接続層。多変数複素関数論

空間とはその上に層を考えることができるなにかである。

4

圏、アーベル圏、圏とは、「対象」(のなす「集合」) と、2 つの対象の間に「射」のなす集合が決まっているものです。層を対象とし、2 つの層の間の射とはその間の準同型を考えるというのが、層の圏です。加群の圏

空間、特にカラビヤウ多様体を、その上の接続加群の圏で置き換えるというのが、空間が等しいということを数学的に定式化するとき現れる重要な考え方で、 B モデル側で現れます。ミラー対称性では圏ではなく、その導来圏が使われます。導来圏 { シ 305 } の説明をします。

集合の境界の境界は空集合である。

鎖複体。商加群。

弱同形。「加群の鎖複体の弱同値類」を対象とする圏が定まります。この圏を、「 R 加群の圏の導来圏」と呼びます。

導来圏はより一般のアーベル圏に対しても作ることができ、とくにの導来圏が決まります。圏が B モデルの弦理論では重要な役割を果たします。すなわち、

X 上の B モデルの弦理論の D -プレーン { シプレーン 334 } の作る圏は $D(X)$ のことである。

この命題を説明します。の対象の例は、2 つのベクトル束 E_1, E_2 が X にあり、その間に準同型写像があるようなシステムです。

B モデルの D-ブレーンを導来圏を用いて解釈できる

トーラスや K3 曲面 (どちらもカラビヤウ多様体の典型) で、 X と Y が異なるにもかかわらず圏 $D(X)$ と圏 $D(Y)$ が同型になる。フーリエ-向井変換 {シ 122,359} と呼ばれています。

5 {p128}

() B モデルの量は M の複素構造 { } から決まり、A モデルの量は M のシンプレクティック構造 {シ 21} から決まる。

() B モデルでは多くの量が量子補正 { } を受けない。モデルの量には量子補正がある。

カラビ-ヤウ多様体 { } というのは、複素多様体で、リッチ曲率が 0 のケーラー計量を持つものです。

微分 2 形式の外微分

シンプレクティック多様体

層係数コホモロジー

量子コホモロジー環 {シ 266} に現れる、量子補正 {シ 248}。量子コホモロジー環は普通のコホモロジー環のカップ積を量子補正して得られました。ド・ラームコホモロジーで表すと、カップ積の構造定数は積分

で表されます。

量子変形

モデルで現れる非局所的な量をモデルでの局所的な計算に帰着する

6 {p130}

量子カップ積の構造定数。モデルの「空間」を我々はその上の層の作る圏あるいはその導来圏で置き換えました。この圏のモデルにおける対応物は、上のフレアーホモロジーから定まる圏 $Lag(M)$ である、というのがコンツェヴィッチのホモロジーのミラー対称性予想です。

モデル側での圏の対象はブレーンであると述べました。

D-ブレーン { } とは何でしょうか。それは、弦の境界条件として現れるもの、です。

ひもが時間とともに動いていく跡は曲面 Σ になります。したがって、多様体 M のなかのひもの軌跡は: $\Sigma \rightarrow M$ という写像です。ひもが開いている、つまり円周ではなくて区間である場合には、に境界があることになります。すなわち境界付きの曲面からの写像を考えることになります。

コーシーリーマン方程式は楕円型方程式です。これをでなく境界があるリーマン面にしたものが、D-ブレーンを考えたときの、A モデルから得られる量になります。

という条件、すなわちディリクレ境界条件です。L は $\dim M/2$ 次元の多様体で、総実 { } すなわちの接空間には複素ベクトル空間が含まれないという条件が必要になります。ただしブレーンとしては総実よりは強いラグランジュ部分多様体 {シ 119}

シンプレクティック構造 { } というのは、微分 2 形式 ω で $d\omega = 0$ になり、また、 ω が各点で非退化 {シ 192} なものです。2n 次元シンプレクティック多様体 M の、n 次元部分多様体 L が ラグランジュ部分多様体 { } である、というのは、 ω が L に制限すると、0 になることをいいます。

トンネル効果が量子コホモロジーと関係がつく、

この節で考えている D-ブレーンがある状況では、を少し取り替えています。つまり、2 つのラグランジュ部分多様体 (つまり D-ブレーン) を考えて、

$$= \{ \}$$

を考えます。これは L_0 から出発して、 L_1 で終わるひもを考えることになっています。この上でモース理論を考える、

フレアーホモロジー

ホモロジー的ミラー対称性 {シ 335}
です。右辺は圏 $Lag(M)$ の導来圏です。

7

交点数の群化

平坦接続の作る多様体 {シ}

シンプレクティック多様体 {シ 21}

シンプレクティック構造 {シ 21}

複素構造 {シ 23}

臨界点 {シ 43}

ループ空間 {シ 54}

エネルギー {シ 57}

共形変換 {シ 58}

モース指数 {シ 90}

ラグランジュ部分多様体 {シ 119}

ミラー対称性 {シ 18,122}

フーリエ-向井変換 {シ 122,359}

共形場の理論 {シ 161}

非退化 {シ 192}

ミラー {シ 245}

A 模型 {シ 245}

B 模型 {シ 245}

量子補正 {シ 248}

特異点 {シ 256,259}

量子コホモロジー環 {シ 266}

導来圏 {シ 305}

ブレーン {シ 334}

ホモロジー的ミラー対称性 {シ 335}

カラビ-ヤウ多様体 {、、、シ}

p21

定義 $2n$ 次元多様体 M 上のシンプレクティック構造(symplectic structure) とは、 M 上の微分 2 形式 ω_M であって、 $d\omega_M = 0$ を満たし、かつ、微分 $2n$ 形式 ω_M^n がどこでも 0 にならないものを指す。組 (M, ω_M) のことをシンプレクティック多様体という。

本書では、次元は断らない限り実次元で複素次元ではない。

$\omega_M^n \neq 0$ という条件は、 ω_M を接束上の反対称 2 次形式とみなしたとき、非退化であることと同値である。

余接束

複素構造

ミラー対称性入門 p130

シンプレクティック構造 $\{\}$ というのは、微分 2 形式 ω で $d\omega = 0$ になり、また、 ω が各点で非退化 $\{\text{シ } 192\}$ なものです。

今野 $\{\text{ミラー対称性入門 p88}\}$

多様体 M のシンプレクティック構造 ω とは、非退化な 2 次微分形式のことです。 M 上のベクトル場 X に対しては上の次微分形式ですが、このを定めるベクトル場から 1 次微分形式への対応が同型対応であるときを非退化といいます。

p39

臨界点

p53

S^1 から M への写像の全体を (M) と書き、 M のループ空間と呼ぶ。

エネルギー

共形変換

Mirrorp299

loop space

p89

$Cr(f) = \{p \in N \mid df(p) = 0\}$ とおくと、

臨界点集合 (critical point set)

$p \in Cr(f)$ に対して、法束 $(\cdot)_p$ 上でヘッセ行列 $Hess_p(f)$ を考える。 $Hess_p(f)$ の正の固有値に属する固有ベクトルたちで張られる部分空間を、負の固有値に属する固有ベクトルたちで張られる部分空間を $N_p^- Cr(f)$ とおく。

$\dim N_p^- Cr(f)$ のことを、 p での f のモース指数 (Morse index) という。

ミラー p101

モース指数

Mirrorp197,202,205,836,847

critical point

Mirrorp44,201,221,231,829

Morse index

p108

鏡映

p119

定義 シンプレクティック多様体 (M, ω) の部分多様体 L がラグランジュ部分多様体 (Lagrangian submanifold) であるとは、 $\dim L = \frac{1}{2} \dim M, \omega|_L = 0$ が成り立つことを指す。

ミラー p130

$2n$ 次元シンプレクティック多様体 M の、 n 次元部分多様体 L がラグランジュ部分多様体である、というのは、 ω が L に制限すると、 0 になることをいいます。ラグランジュ部分多様体

p161

シンプレクティック多様体 (M, ω) の部分多様体 L がラグランジアンであるとは、各点での L の接空間が、ラグランジアンであることでした。

Mirrordp

Lagrangian submanifold

多様体の基礎 p65

U の各点 p に、 M の点としての p を対応させる包含写像 $i: U \rightarrow M$ は C^r 級写像である。

例 $f: M \rightarrow N$ を C^r 級多様体の間の C^s 級写像 (\cdot) 、 U を M の開集合とすると、 f の U への制限 $f|_U: U \rightarrow N$ は、

$$i: U \rightarrow M \quad \text{と} \quad f: M \rightarrow N$$

の合成 $f \circ i: U \rightarrow N$ と考えられる。

p187

非退化

p39

命題 2.2.25 エルミート正則ベクトル束の標準接続の接続形式は
曲率形式は

$$\Theta =$$

で与えられる。特には型である。

系 2.2.26 $L \rightarrow M$ を正則直線束、 h を L のエルミート計量とする。開集合 U 上の至るところ
0 でない正則切断 $(\cdot)_s$ に対し、 $h_U := h(\cdot, \cdot)_s$ とおくと

$$\Theta = -\partial\bar{\partial}\log h_U$$

と表される。

複素直線束の曲率形式はエルミート計量の取り方によらないド・ラーム類を定め、このド・ラーム類の $\frac{i}{2\pi}$ 倍は第 1 チャーン類と呼ばれる。

$E \rightarrow M$ をコンパクト複素多様体 M 上の階数 r の正則ベクトル束とし、 h を E のエルミート計量とする。上述の通り曲率形式は $\Theta =$ である。変数 t を用いて

$$\det(1 + \frac{ti}{2\pi}\Theta) = 1 + tc_1(h) + \dots + t^r c_r(h)$$

と展開することにより $2i$ 次微分形式 $c_i(h)$ を定義する。

定理 ド・ラーム類をの第チャーン類という。

命題 2.2.37 h を正則ベクトル E 束のエルミート計量とするとき

$$c_1(h) = -\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det h$$

証明

p94

その接続形式および曲率形式は

により与えられる (命題 2.2.25)。曲率テンソルは行列値 2 次微分形式としてにより与えられるので、

$$\rho_g := -\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det g = \frac{i}{2\pi}R_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

を g の定めるリッチ形式、または第 1 チャーン形式と呼ぶ。リッチ曲率がリーマン計量と比例するとき、そのリーマン計量をアインシュタイン計量と呼ぶのであった。特にケーラー計量がアインシュタイン計量であるときはケーラー・アインシュタイン計量と呼ばれる。従ってケーラー計量 g のケーラー形式を ω_g 、

$$\rho_g = \frac{\epsilon}{2\pi}\omega_g, \quad \epsilon = -1, 0, \text{または } 1 \quad (2.51)$$

補題 コンパクトなケーラー多様体 M がケーラー・アインシュタイン計量を持つならば $c_1(M)$ は正、0、または負である。

、 $c_1(M) = 0$ の場合のケーラー・アインシュタイン計量、すなわちリッチ曲率が恒等的に 0 になるケーラー計量をカラビ・ヤウ計量といい、そのような計量を持つ多様体、すなわちであるようなコンパクトケーラー多様体をカラビ・ヤウ多様体という。

p278

=

が求められる。これにを代入すると
が求められるが、ここで等式などを使った。一般に

$$==== 0$$

が得られる。ただしとは任意の添字である。結果として、成分だけが残る。しかし、明らかな対称性に注意しよう。したがって、独立な成分はとに帰着される。これらは

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\bar{\mu}\nu} ==$$

と表される。

Riemann 曲率テンソルの添字を縮約すると
ここで、;。ここで Ricci 形式を

$$R$$

で定義する。

ミラー対称性 p2

p84

カラビ-ヤウ多様体 はリッチ曲率が零となるケーラー多様体のことです。

p128

Mirror

A-model

Calabi-Yau, manifold

Mirrorp71

Hodge numbers

5.2. Complex Structure { p67 }

On a complex manifold, the operator d : X has a decomposition as well:

$$d =$$

where

are defined by $\bar{\partial}f = 0$, if f is a $(p,0)$ -form. $\bar{\partial}$ is defined similarly. Then matching form degrees in $d=0$ gives

In particular, we can define $H^{p,q}$ as those (p,q) -form which are killed by $\bar{\partial}$ modulo those which are $\bar{\partial}$ of a $(p,0)$ -form. The Cech-Dolbeault isomorphism says $H^{p,q} \cong H^{p,q}$. On an almost complex manifold, where, on $(p,0)$ -forms, say, $\bar{\partial}$ is the projection of d onto $(p,1)$ -forms. The integrability condition of Exercise 5.2.1 is equivalent to $\bar{\partial}^2 = 0$.

5.3. Kahler Metrics { p71 }

An important consequence of Kahlerity is found by calculating Laplacians. In addition to the usual Laplacian, on a complex manifold a Hermitian metric determines adjoint operators ∂^\dagger and $\bar{\partial}^\dagger$ for ∂ and $\bar{\partial}$, respectively (so $(\theta, \bar{\partial}\psi) = (\bar{\partial}^\dagger\theta, \psi)$, etc.):

$$\bar{\partial}^\dagger : \Omega^{p,q} \rightarrow \Omega^{p,q-1}, \quad \partial^\dagger : \Omega^{p,q} \rightarrow \Omega^{p-1,q}$$

From these we can form the Laplacians $\Delta_\partial = \partial\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\partial$ and $\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\partial^\dagger + \partial^\dagger\bar{\partial}$. We can represent $\bar{\partial}$ cohomology classes $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ with $\bar{\partial}$ -harmonic forms $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$, as we did with d and Δ_d . But now an important result is that for a Kahler metric,

$$\Delta_d = 2\Delta_{\bar{\partial}} = 2\Delta_\partial$$

and so all the operators have the same harmonic forms. As a result, and since Δ_d preserves (p,q) -form degree, we have $H^r(M) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(M)$, and therefore the de Rham cohomology decomposes into $\bar{\partial}$ cohomology. Define $b_r(M) = \dim H^r(M)$ and $h^{p,q}(M) = \dim H^{p,q}(M) = \dim H^q()$. Then

$$b_r(M) = \sum_{p+q=r} h^{p,q}(M)$$

Further, Hodge $*$ says that $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$ while $h^{p,q} = h^{q,p}$ by complex conjugation. For example, $h^{0,1} = \dim H^1(O)$.

EXAMPLE 5.3.1. The Hodge numbers of $T=C/Z$ are $h=h=h=h=1$. The generators are 1, dz , $d\bar{z}$, and $dz \wedge d\bar{z}$, respectively.

EXAMPLE 5.3.2. A Calabi-Yau manifold can be defined as a complex n -manifold M whose bundle of $(n,0)$ -forms is trivial. This bundle X is called the "canonical bundle" and is often denoted K . Triviality of this bundle means that we can identify the total space of K as MC . So, corresponding to the unit section $M1$ (i.e., the section is the constant function 1) must be a nowhere vanishing global holomorphic $(n,0)$ -form, X . Further, every global $(n,0)$ -form can be written as fX , for f some function on M . If M is compact and the form is holomorphic, f must be holomorphic and therefore constant, and the space of holomorphic $(n,0)$ -forms is one-dimensional: $h^{n,0}(M) = 1$. If M is further a simply connected Calabi-Yau threefold, as we often assume, then $b_1 = 0$, which implies $h^{1,0}(M) = h^{0,1}(M) = 0$. Serre duality relates $H^1(O)$ with $H^2(O)^* = H^2(O)^*$ for a Calabi-Yau threefold, and so $\dim H^{0,2}(M) = 0$ as well (we have used the Dolbeault theorem). In total, Calabi-Yau threefolds have a Hodge diamond with $h^{0,0} = h^{3,3} = h^{3,0} = h^{0,3} = 1$, leaving $h^{1,1}$ and $h^{2,1}$ ($= h^{2,2}$ and $h^{1,2}$, respectively) undetermined (see Fig. 1).

FIGURE 1. Hodge diamond of a simply connected Calabi-Yau threefold. $h^{1,1}$ is the number of possible Kahler forms. We will interpret $h^{2,1}$ in the following chapter.

{ p463 } As we have seen in previous chapters, some Calabi-Yau sigma models have a Landau-Ginzburg description in a certain regime of parameters. Put differently, certain Landau-Ginzburg theories can be viewed as Calabi-Yau sigma models, where the B-ring of the Landau-Ginzburg theory maps to the B-model topological ring of the Calabi-Yau. Some of the mirror Landau-Ginzburg theories that we obtain are of this type and can thus be related to a Calabi-Yau sigma model. In such a case, mirror symmetry maps the A-model topological amplitudes in one Calabi-Yau, M , to the B-model topological amplitudes of another Calabi-Yau, M . Then one should have a relation between the Hodge numbers of the Calabi-Yau:

where d is the complex dimension of M and M . This is the original form in which mirror symmetry was posited. But the proof we present is more general, and the Landau-Ginzburg theories we obtain do not always correspond to sigma models on Calabi-Yau manifolds (

{ p654 }

{ p680 }

{ p707 }

{ p729 } So far in this book we have built up a good picture of mirror symmetry, with a dictionary of correspondences under the mirror map as follows, at least in the geometric regime near the large complex and Kahler limit points.

(Note that if n is even we may have to modify the RHS by adding in all even-dimensional branes, and also that the GW-invariants of Ch. 26 really are symplectic invariants only; they do not depend on a complex structure (though one is often used to define or compute then). We are also ignoring the B-field for the purposes of this chapter all of our symplectic forms are real.) There is an important difference between the sixth and eighth lines which we have blurred until now, and which will be the main theme of this chapter. Kontsevich's conjecture, discussed in Sec. 37.7, involved only the complex structure on M , and just the symplectic (or 'Kahler') structure on W , while to introduce the D-branes of Chs. 19 and 37 we need both types of structure on both sides. The conjecture deals just with holomorphic bundles (more generally, complexes of them up to quasi-isomorphism; this then includes the coherent sheaves of Sec. 37.6.2) on the B-model LHS and Lagrangians (up to Hamiltonian deformations, which we will discuss later, with a grading and a flat unitary connection on them) for the A-model RHS. (We are using Fukaya's original category, not the modified sLag Fukaya category of Sec. 37.7.1; the close relationship between the two will become clearer by the end of this Chapter.) D-branes, however, are given on the LHS by connections on a bundle (perhaps supported on some subvariety) satisfying the MMMS (Sec. 37.3.1) or HYM equations (Eq. (38.2)) near the large Kahler limit (where the MMMS equations degenerate to the HYM equations). On the one hand this implies that the underlying bundle is holomorphic and so defines an object of $D(M)$, but on the other hand it contains more information, and, crucially, is dependent on the introduction of a Kahler form X . Similarly A-model D-branes are special Lagrangian and so, in particular, are Lagrangian, but require a complex structure on W for their definition, and different choices will give different results. The sense in which D-branes can be identified with the objects of Kontsevich's conjecture, and the sense in which they are different, is subtle but important, and leads us to some interesting predictions. (We have been able to ignore it so far, for instance in Sec. 37.8, because, as we shall see, the subtlety does not really arise for T ; almost all bundles are direct sums of bundles with HYM connections, for instance.) So we give an overview of the mathematics of stable bundles to compare and contrast with HYM connections. We will then give a rough outline of what the derived category $D(M)$ is, and explain why it is a much stronger invariant than say cohomology (of which it is a refinement via the Mukai vector) or D-branes; Kontsevich's idea is that one should be able to recover the whole B-model string theory from $D(M)$. Exploiting this on the symplectic (A-model) side will lead to a natural conjecture about the relationship between Lagrangians and special Lagrangians.

{ p738 }

251

を種数 g の向きの付いた 2 次元多様体とする。

() のことを、 k 点付き種数 g のリーマン面 (Rieman surface of genus g with k marked points) と呼ぶ。

グロモフ-ウィッテン不変量 (Gromov-Witten invariant)

の点を特異点と呼び、

種数 (genus)

特異点 (singular point)

量子コホモロジー環 (quantum cohomology ring)

ミラー対称性入門 p10

Mirrorp16,487

Riemann surface

Mirrorp

Gromov-Witten invariant

Mirrorp530,532

quantum cohomology ring

p276

ブレポテンシャル

p294

導来圏 (derived category)

Mirrorp708,719,730,738ff

derived category

p333

定義もどき 複素多様体 (M, J_M) でコンパクト化された B 模型におけるブレン (brane) とは、 M 上の解析的连接層のなす圏の導来圏の対象を指す。

シンプレクティック多様体 (M, ω_M) でコンパクト化された A 模型におけるブレンとは、 M 上のラグランジュ部分多様体 L とその平坦 $U(1)$ 束の組 $()$ である。

予想もどき $(M^\dagger, J_{M^\dagger})$ が (M, ω_M) のミラーであるとき、 $(M^\dagger, J_{M^\dagger})$ 上のブレンのモジュライ空間と (M, ω_M) 上のブレンのモジュライ空間は一致する。

これが、によるホモロジー的ミラー対称性 (homological mirror symmetry) 予想の 1 つの形である。

ミラー p122

ミラー p123

连接層

ミラー対称性 p126

ミラー対称性 p130

Mirrorp499ff,606,684,692ff,709,729ff

D-brane

Mirrorp730

homological mirror symmetry conjecture

p145

定義 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は、ある点 $x \in X$ が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$$

となるとき、 x に収束するといい

=

と書く。

p147

定義 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ は
 任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある N が存在して
 $m, n \geq N$ となるすべての m, n に対し $d(x_m, x_n) < \epsilon$ となる
 という条件が満たされるときコーシー列という。

p152

定義 距離空間は、そのすべてのコーシー列が収束するとき完備であるという。

p208

3.10 (X, d) を距離空間とする。連続写像 $f : X \rightarrow X$ は、ある正の定数 $C < 1$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対し $d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$ が成立するとき縮小写像という。もし X が完備な距離空間ならば、任意の縮小写像 $f : X \rightarrow X$ に対し $f(x) = x$ となる点 $x \in X$ が唯一つ存在することを証明せよ。

3.10 1 点 $x_1 \in X$ を選び、 $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3$ 、と帰納的に点列 $\{x_n\}$ を作る。このとき、任意の $m, n (m \geq n)$ に対して

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq Cd(x_{m-1}, x_{n-1}) \leq \dots \leq C^{m-n}d(x_1, x_1) \\ &\leq C^{m-n}d(x_{m-n+1}, x_{m-n}) + d(x_2, x_1) \\ &\leq C^{m-n}(C^{m-n-1} + 1)d(x_2, x_1) = C^{m-n}(C^{m-n} - 1)(C - 1)^{-1}d(x_2, x_1) \\ &\leq C^{m-n}(1 - C)^{-1}d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

となることから $\{x_n\}$ はコーシー列である。そこで、 $x = \lim x_n$ とおけば $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$ となる。つぎに $f(y) = y$ とすれば、 $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$ から $x = y$ が得られる。

p70

定義 2.8 X を空でない集合とする。 X 上の実数値関数 $d : X \times X \rightarrow R$ が与えられ、それがつぎの三つの性質を満たすとする。

- 1) 任意の $x, y \in X$ に対し、 $d(x, y) \geq 0$ であり、 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 。
 - 2) 任意の $x, y \in X$ に対し、 $d(x, y) = d(y, x)$ 。
 - 3) 任意の $x, y, z \in X$ に対して、 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ 。
- 距離空間という。

位相空間、開集合 { 集合と位相空間 p73 ~ } { 30 講 p166 ~ 167 } { 院別 p58 }

定義 2.12 X を空でない集合とする。 X の部分集合の族 \mathcal{U} でつぎの条件を満たすものが与えられているとき、 $\{ \mathcal{U} \text{ は } X \text{ 上に位相あるいは位相構造を定めるという} \}$

- 1) $\phi, X \in \mathcal{U}$
- 2) $U_1, U_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$
- 3) \mathcal{U} の元からなる任意の集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in A}$ に対し $\cup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{U}$

また、対 (X, U) を位相空間という。

U に属する X の部分集合 U を、 $()$ 開集合といい、 $\{ \}$

例 $X = R^2$ 、 $U = R^2$ の開集合全体の集合

$$U_n = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 < \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}^2 \right\} \text{ のとき、 } \bigcup_{\lambda \in A} U_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 < 4 \right\}$$

$$F_n = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}^2 \right\} \text{ のとき、 } \bigcap_{\lambda \in A} F_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq 0 \right\}$$

$$U_n = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 < \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}^2 \right\} \text{ のとき、 } \bigcap_{\lambda \in A} U_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

$$F_n = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}^2 \right\} \text{ のとき、 } \bigcup_{\lambda \in A} F_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

$X = 1$ つの元からなる集合、 $U = \{\phi, X\}$

$$1 = \{\forall \epsilon > 0\}$$

$$2 = \{\exists n_0 \in N\}$$

$$3 = \{n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\}$$

$$4 = \{x|0 \leq x \leq 1\}$$

$$5 = \delta$$

$$6 \cdot 6 \quad 7 \cdots 7 \quad 8 = \vec{a} \quad 9 = \sqrt{a}$$

$$10 = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

$$11 = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

$$12 = \sum_{i=1}^n$$

$$13 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$14 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$15 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 16 &= a \\ &= b \\ &= c \end{aligned}$$

$$17 = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

定義 18

[次のページへ続く。]

$$19 = \int_a^b$$

$$20 = \alpha \quad 21 = \beta \quad = \gamma \quad = \zeta \quad = \eta \quad 22 = \theta \quad 23 = \mu \quad = \nu \quad 24 = \pi$$

$$25 = \rho \quad = \sigma \quad = \tau \quad 26 = \phi \quad 27 = \psi \quad = \omega \quad = \varphi \quad = \Gamma \quad 28 = \Delta$$

$$29 = \partial$$