

p128

$\{R^{m+1} - \{o\} \ni x$  に、 $x$  を通る直線  $l_x \in P^m$  を対応させる写像を  $\pi$  とする。

p131

$i = 1, 2, \dots, m+1$  について、 $R^{m+1} - \{o\}$  の開集合  $W_i$  を

$$W_i = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) | x_i \neq 0\}$$

と定義する。

$\pi : R^{m+1} - \{o\} \rightarrow P^m$  による  $W_i$  の像を  $V_i$  とおく

補助的な空間  $R_i^m$  を次のように導入する。

$$R_i^m = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{m+1}) \in R^{m+1}\}$$

$l$  上の点  $x()$  を任意に固定し、 $x$  の各座標をいっせいに  $x_i$  で割った点  $x'$  を考える：

$$x' =$$

、 $x'$  は  $l$  と  $R_i^m$  の交点であり、

その交点を

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{m+1})$$

とする。

$l \in V_i$  に、この交点の第  $i$  座標を除いて得られる  $R^m$  の点

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+1})$$

を対応させる写像を  $\psi_i : V_i \rightarrow R^m$  と定義するのである。

$l$  が  $P^m$  の中で少し動くと\*、交点も少し動き、。

$$(y_1, \dots, y_m) =$$

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1}(y_1, \dots, y_m) = \left( \frac{y_1}{y_{j-1}}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_{j-1}}, \frac{1}{y_{j-1}}, \frac{y_i}{y_{j-1}}, \dots, \frac{\widehat{y_{j-1}}}{y_{j-1}}, \dots, \frac{y_m}{y_{j-1}} \right) \quad (11.14)$$

[次のページへ続く。]

p143

$R^{m+1} - \{o\}$  の元の間に  $\{s\}$  次のような関係  $\sim$  を導入する。

$$x \sim y \iff 0 \text{ でない実数 } \lambda \text{ が存在して } y = \lambda x \quad \{s\}$$

$R^{m+1} - \{o\}$  の元で、互いに  $\sim$  の関係にあるものをすべて同一視して得られる '商集合' を  $P^m$  とする  $\{s\}$ 。

$x = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \in R^{m+1} - \{o\}$  を  $P^m$  の点と考えたものを

$$(x_1 : x_2 : \dots : x_{m+1})$$

と書いて、。

$R^{m+1} - \{o\}$  の元  $(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$  に、 $(x_1 : x_2 : \dots : x_{m+1})$  という  $P^m$  の点を対応させる写像を  $\pi : R^{m+1} - \{o\} \rightarrow P^m$  と書くと、明らかに  $\pi$  は  $P^m$  の上への写像である  $\{s\}$ 。

$P^m$  には、による商位相を入れる。 $P^m$  はハウスドルフ空間になる  $\{s\}$ 。

$P^m$  の部分集合  $V_i$  を

$$V_i = \{(x_1 : x_2 : \dots : x_{m+1}) | x_i \neq 0\}$$

とおく。 $V_i$  は  $P^m$  の開集合であり  $\{s\}$   $\{P^m = \bigcup_{i=1}^{m+1} V_i \text{ がなりたつ。}\}$

写像  $\psi_i : V_i \rightarrow R^m$  を

$$\psi_i(x_1 : \dots : x_i : \dots : x_{m+1}) = \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{m+1}}{x_i} \right)$$

と定義する。は同相写像である。

、 $P^m$  は、 $m+1$  個の座標近傍  $(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2), \dots, (V_{m+1}, \psi_{m+1})$  で被覆される  $m$  次元位相多様体であることがわかる  $\{s\}$ 。  $(V_i, \psi_i)$  と  $(V_j, \psi_j)$  の間の座標変換は前と同様に (11.14) で与えられる。こうして、 $P^m$  は級多様体になる。

説明

$r$  を  $r_1$  に固定することと、 $r_1$  と  $r_2$  の区別をなくすことは、自由度を減らすという意味では同じ。

\*  $\theta$  とで表されているイメージ

$$\begin{aligned} \psi_i() &= (x_1 : \dots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \dots : x_{j-1} : x_j : x_{j+1} : \dots : x_m : x_{m+1}) \\ &= \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_i}, \frac{x_j}{x_i}, \frac{x_{j+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_m}{x_i}, \frac{x_{m+1}}{x_i} \right) \\ &= (y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, \dots, y_{j-2}, y_{j-1}, y_j, \dots, y_{m-1}, y_m) \\ \psi_i^{-1}() &= (y_1 x_i : \dots : y_{i-1} x_i : x_i : y_i x_i : \dots : y_{j-2} x_i : y_{j-1} x_i : y_j x_i : \dots : y_{m-1} x_i : y_m x_i) \\ \psi_j(\psi_i^{-1}()) &= \left( \frac{y_1 x_i}{x_j}, \dots, \frac{y_{i-1} x_i}{x_j}, \frac{x_i}{x_j}, \frac{y_i x_i}{x_j}, \dots, \frac{y_{j-2} x_i}{x_j}, \frac{y_{j-1} x_i}{x_j}, \frac{y_j x_i}{x_j}, \dots, \frac{y_{m-1} x_i}{x_j}, \frac{y_m x_i}{x_j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m, x_{m+1}) \\
\psi_i() &= \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_i}, \frac{x_j}{x_i}, \frac{x_{j+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_m}{x_i}, \frac{x_{m+1}}{x_i} \right) \\
&= (y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, \dots, y_{j-2}, y_{j-1}, y_j, \dots, y_{m-1}, y_m) \\
\psi_i^{-1}() &= (y_1 x_i, \dots, y_{i-1} x_i, x_i, y_i x_i, \dots, y_{j-2} x_i, y_{j-1} x_i, y_j x_i, \dots, y_{m-1} x_i, y_m x_i) \\
\psi_j(\psi_i^{-1}()) &= \left( \frac{y_1 x_i}{x_j}, \dots, \frac{y_{i-1} x_i}{x_j}, \frac{x_i}{x_j}, \frac{y_i x_i}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-2} x_i}{x_j}, \frac{y_{j-1} x_i}{x_j}, \dots, \frac{y_{m-1} x_i}{x_j}, \frac{y_m x_i}{x_j} \right)
\end{aligned}$$

幾何学 p55

上の同値関係を

多様体入門 p29

から原点をのぞいた集合  $R^{n+1} - \{0\}$  に次の様に同値関係を定義する。 $x^i = y^i$ 。この同値関係による同値類の集合を  $P^n$  であらわす。 $R^{n+1} - \{0\}$  の点  $x$  をふくむ同値類を  $\pi(x)$  であらわすと、 $\pi$  は  $R^{n+1} - \{0\}$  から  $P^n$  の上への写像である。

これによって  $P^n$  に位相が定義され  $P^n$  はハウスドルフ空間になる。

今  $U_i (i = )$  を第番目の座標がでないの点で代表されるの点の全体とする。

はの開集合であるから、 $U_\alpha$  は  $P^n$  の開集合である。

ゆえに  $P^n$  は  $n$  次元位相多様体で  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha=1, \dots, n+1}$  が座標近傍系となる。

座標変換

多様体の定義 { p42 } { 30 講 }

定義 6 を自然数またはとする。位相空間  $M$  が次の条件 { 1 } { 2 } { 3 } をみたすとき、 $M$  を  $m$  次元  $C^r$  級多様体という。

{ 1 }  $M$  はハウスドルフ空間である。

{ 2 }  $M$  の  $m$  次元座標近傍 { } からなる族  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  があって

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

がなりたつ。

{ 3 }  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  であるような任意の  $\alpha, \beta \in A$  について、座標変換

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\begin{bmatrix} x_\beta^1(p_\alpha()) \\ x_\beta^2(p_\alpha()) \\ \vdots \\ x_\beta^m(p_\alpha()) \end{bmatrix}$$

は  $C^r$  級写像である。

例

$$\begin{bmatrix} p_\alpha^1(x_\alpha^1, x_\alpha^2) \\ p_\alpha^2(x_\alpha^1, x_\alpha^2) \\ p_\alpha^3(x_\alpha^1, x_\alpha^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin x_\alpha^1 \cos x_\alpha^2 \\ \sin x_\alpha^1 \sin x_\alpha^2 \\ \cos x_\alpha^1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_\alpha^1(p_\alpha^1, p_\alpha^2, p_\alpha^3) \\ x_\alpha^2(p_\alpha^1, p_\alpha^2, p_\alpha^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\{p_\alpha^1\}^2 + \{p_\alpha^2\}^2}}{p_\alpha^3} \\ \tan^{-1} \frac{p_\alpha^2}{p_\alpha^1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

$M$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \sin x_\alpha^1 \cos x_\alpha^2 \\ \sin x_\alpha^1 \sin x_\alpha^2 \\ \cos x_\alpha^1 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} 0 < x_\alpha^1 < \pi \\ 0 < x_\alpha^2 < 2\pi \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} \cos x_\beta^1 \\ \sin x_\beta^1 \cos x_\beta^2 \\ \sin x_\beta^1 \sin x_\beta^2 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} 0 < x_\beta^1 < \pi \\ 0 < x_\beta^2 < 2\pi \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \sin z_1 \sin z_2 \\ 1 \cos z_1 \\ 1 \sin z_1 \cos z_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} 0 < z_1 < \pi \\ 0 < z_2 < \pi \end{array} \right\}$$

p129

定義 5.1  $M$  は以下の条件を満たすとき、 $m$  次元微分多様体であるという。

$M$  は位相空間である。

$M$  には対の族  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  が与えられている。

は  $M$  を被覆する開集合族である。すなわち  $\bigcup_i U_i = M$ 。はからへの無限階微分可能な写像である。

$U_i \cap U_j \neq \emptyset$  を満たすが与えられたとき、 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  は  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  から  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  への無限階微分可能な写像である。

$$\begin{bmatrix} x_i^1(p_j()) \\ \vdots \\ x_i^m(p_j()) \end{bmatrix}$$

$\varphi_i$  は  $m$  個の関数  $\{x^1(p), \dots, x^m(p)\}$  で表される。

多様体の基礎 p40

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) = \psi(\varphi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_m))$$

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

p58

二つの関数がをみたすとき、とは合成可能であるといい、

$$h(x) = g(f(x))$$

で定義される関数を、との合成関数といい、 $h = g \circ f$  と記す。

{ 多様体の基礎 p42 }

定義 6 位相空間  $M$  が次の条件 (1)(2)(3) をみたすとき、 $M$  を  $m$  次元  $C^r$  級微分可能多様体という。

{1}  $M$  はハウスドルフ空間である。

{2}  $M$  は  $m$  次元の座標近傍により被覆される。すなわち、 $m$  次元座標近傍からなる族  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  があって

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

がなりたつ。

{3}  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  であるような任意のについて、

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

は  $C^r$  級写像である。

30 講 p206

局所座標の変換則が  $C$ -級であるような位相多様体を、 $C$ -級の多様体これからは、級の多様体のことを、単に多様体ということにする。

幾何学

定義  $M$  が  $n$  次元微分可能多様体であるとは、 $M$  がハウスドルフ空間であり、次のような近傍と、から  $n$  次元ユークリッド空間の開集合への同相写像  $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$  が存在することである。 $\bigcup_i U_i = M, U_i \cap U_j \neq \emptyset$  のとき、

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

が級である。

微分・位相幾何 P55

定義 空間  $M$  は、 $n$  次元微分可能多様体である。

(1)

(2)

(3) はを覆う、

(4)

(5)  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  となるに対して、 $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  から  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  への写像  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  は無限回微分可能である。

座標近傍





多様体の定義 { P42 } { 30 講 }

定義 6 位相空間  $M$  が次の条件 { 1 } { 2 } { 3 } をみたすとき、 $M$  を  $m$  次元  $C^r$  級多様体という。

{ 1 }

{ 2 }  $m$  次元座標近傍 { } からなる族があつて

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} p_{\alpha}(U_{\alpha})$$

がなりたつ。

{ 3 }

例

$M$

=

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \sin x_1 \cos x_2 \\ 1 \sin x_1 \sin x_2 \\ 1 \cos x_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} 0 < x_1 < \pi \\ 0 < x_2 < 2\pi \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \cos y_1 \\ 1 \sin y_1 \cos y_2 \\ 1 \sin y_1 \sin y_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} 0 < y_1 < \pi \\ 0 < y_2 < 2\pi \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \sin z_1 \sin z_2 \\ 1 \cos z_1 \\ 1 \sin z_1 \cos z_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} 0 < z_1 < \pi \\ 0 < z_2 < \pi \end{array} \right\}$$

{ P37 }

定義 6  $m$  次元数空間  $R^m$  のある開集合  $U$  から、位相空間  $X$  の開集合  $U'$  への同相写像

$$\vec{p}(U)$$

があるとき、 $U$  の対を  $m$  次元座標近傍とい

多様体の定義 { P42 }

定義 6 位相空間  $M$  が次の条件 { 1 } { 2 } { 3 } をみたすとき、 $M$  を  $m$  次元  $C^r$  級多様体という。

{ 1 }

{ 2 }  $m$  次元座標近傍からなる族があつて

$$M = \vec{p}_1(U_1) \cup \cdots \cup \vec{p}_\beta(U_\beta)$$

がなりたつ。

{ 3 }

例

$M$

=

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \sin x_1 \cos x_2 \\ 1 \sin x_1 \sin x_2 \\ 1 \cos x_1 \end{array} \right] \middle| \begin{array}{l} 0 < x_1 < \pi \\ 0 < x_2 < 2\pi \end{array} \right\} \cup \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \cos y_1 \\ 1 \sin y_1 \cos y_2 \\ 1 \sin y_1 \sin y_2 \end{array} \right] \middle| \begin{array}{l} 0 < y_1 < \pi \\ 0 < y_2 < 2\pi \end{array} \right\} \cup \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \sin z_1 \sin z_2 \\ 1 \cos z_1 \\ 1 \sin z_1 \cos z_2 \end{array} \right] \middle| \begin{array}{l} 0 < z_1 < \pi \\ 0 < z_2 < \pi \end{array} \right\}$$