

双対空間、双対基底 {多様体の基礎 p259 ~ } {多様体入門}

定義  $V$  を  $R$  上の  $m$  次元ベクトル空間 { 10 } とする { s }。  $V$  上の 1 次形式 ( ) とは { s }  $V$  から  $R$  への写像

$$\omega : V \rightarrow R$$

であって、任意のベクトル  $X, Y \in V$  と任意の実数  $a, b \in R$  について

$$\omega(aX + bY) = a\omega(X) + b\omega(Y) \quad \{ s \}$$

がなりたつようなものをいう (すなわち、 $V$  から  $R$  への線型写像  $\omega : V \rightarrow R$  のことである { s } )。

$V$  上の 1 次形式 { } 全体のなす集合を  $V^*$  と書くことにする { s }。 は再び上のベクトル空間になる。実際、任意の  $\omega, \omega_1, \omega_2 \in V^*$  と任意の  $a \in R$  について、和  $\omega_1 + \omega_2$  と実数倍  $a\omega$  が、次の式で定義できる。

$$(\omega_1 + \omega_2)(X) := \omega_1(X) + \omega_2(X)$$

$$(a\omega)(X) := a(\omega(X)) \quad , \quad \forall X \in V \quad \{ sn \}$$

このように定義すると、もも、また上の 1 次形式 { s }。 すなわち、の元になることがわかり、この ' 和 ' と ' 実数倍 ' に関して  $V^*$  は  $R$  上のベクトル空間 { } になる { s }。  $V^*$  の次元 { 13 } は  $V$  と同じく  $m$  である { s }。

定義  $V^*$  を、 $V$  の双対ベクトル空間または 双対空間 という { s }。

$e_1, e_2, \dots, e_m$  を、任意に選んだ  $V$  の基底 { 13 } とする { s }。  $V$  の任意のベクトル  $X$  は

$$X = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^m e_m \quad (a_i \in R)$$

のように { sn }、 $e_1, e_2, \dots, e_m$  の次結合で書ける。番号  $i (1 \leq i \leq m)$  をひとつ固定して、ベクトル  $X$  に、 $e_i$  の係数  $a^i$  を対応させる写像  $\omega^i : V \rightarrow R$  を考える { s }:

$$\omega^i(X) = a^i$$

この写像  $\omega^i : V \rightarrow R$  は明らかに線型写像であるから、 $\omega^i$  は  $V$  上の 1 次形式 { } と考えられる { }。

番号  $i$  を 1 から  $m$  まで動かして得られる  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^m$  という  $m$  個の 1 次形式が、実は  $V^*$  の基底 { } になるのである { s }。

定義  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^m$  を、 $e_1, e_2, \dots, e_m$  に対応する双対基底という { s }。

をのように書いたとき、の定義によりであるから、これを使ってを書きかえれば、

$$X = \omega^1(X)e_1 + \omega^2(X)e_2 + \dots + \omega^m(X)e_m, \quad \forall X \in V \quad \{ s \}$$

を得る。とくに、 $X = e_j$  の場合は、

$$\omega^i(e_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (18.4) \{ sn \}$$

がなりたつ\*。(18.4)を、 $e_1, e_2, \dots, e_m$  に対応する双対基底  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^m$  の定義と思ってもよい。

{ 定義  $T_p(M)$  の双対空間のことを、多様体の、点における余接ベクトル空間とよび、。 }

例  $f: M \rightarrow R$  を  $C^r$  級の関数 ( ) とする、

。。

、  $X_p \in T_p(M)$  を任意の接ベクトルとすると、

$$(df)_p(X_p) = X_p(f) \quad (18.8) \{sn\}$$

$$[ = \xi^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}(p) + \xi^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}(p) + \cdots + \xi^m \frac{\partial f}{\partial x^m}(p) ]$$

ここで、右辺は、をにおける方向微分とみなして、関数に作用させたときの値である。この式 (18.8) を、1 次形式  $\{ \} (df)_p: T_p(M) \rightarrow R$  の定義と思ってもよい。

$(U; x^1, \dots, x^m)$  を  $C^\infty$  級多様体  $M$  の座標近傍  $\{ 37 \}$  としよう  $\{ \}$   $x^1, x^2, \dots, x^m$  はそれぞれ開集合  $U$  上の  $C^\infty$  級関数と考えられるから、上の例の特別な場合として、上の次微分形式が個得られる：

命題 各点  $p \in U$  において、 $(dx^1)_p, (dx^2)_p, \dots, (dx^m)_p \in T_p^*(M)$  は、 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p \in T_p(M)$  に対応する双対基底  $\{ \}$  になっている。

{ 証明 まず、は明らかであろう。したがって、であることに注意しておく。}

等式 (18.8) において、 $f = x^i, X_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$  とおく。すると、

$$\begin{aligned} (dx^i)_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) &= \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) \\ &= \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad \{sn\} \end{aligned}$$

を得る。{ この式は、 $(dx^1)_p, (dx^2)_p, \dots, (dx^m)_p$  が  $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$  に対応する双対基底であることを示している。}

{ 多様体の基礎 p262 ~ }

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_m dx_m$$

例

{  $(df)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  である。これから、次の局所座標表示を得る。 }

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \quad (18.18) \{ sn \}$$

$$\left[ df\left(\right) = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1\left(\right) + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2\left(\right) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m\left(\right) \right]$$

$$\left[ = \xi^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}(\varphi^{-1}(a^1, a^2, \dots, a^m)) + \xi^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}(\varphi^{-1}(a^1, a^2, \dots, a^m)) + \cdots + \xi^m \frac{\partial f}{\partial x^m}(\varphi^{-1}(a^1, a^2, \dots, a^m)) \right]$$

$$\left[ = \xi^1(\varphi^{-1}(a^1, \dots, a^m)) \frac{\partial f}{\partial x^1}(\varphi^{-1}(a^1, \dots, a^m)) + \cdots + \xi^m(\varphi^{-1}(a^1, \dots, a^m)) \frac{\partial f}{\partial x^m}(\varphi^{-1}(a^1, \dots, a^m)) \right]$$



多様体入門 p9

E.  $V$  を  $K$  上のベクトル空間  $\{V\}$  とする。 $V$  から  $K$  への写像  $f$  が

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \quad (a, b \in V)$$

$$f(\lambda a) = \lambda f(a) \quad ()$$

をみたすとき、 $f$  をベクトル空間  $V$  上の一次形式 または 一次関数 とよぶ。一次形式はから次元ベクトル空間への線型写像 にほかならない。 $V$  上の一次形式  $\{f\}$  のつくる集合を  $V^*$  であらわす。とすると、からへの写像を

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

$$(\lambda f)(a) = \lambda(f(a))$$

により定義する。、およびは上の一次形式である。、この和およびスカラー乗法に関して  $V^*$  は  $K$  上のベクトル空間  $\{V^*\}$  にベクトル空間  $V^*$  を  $V$  の双対空間 とよぶ。

以下  $V$  を  $n$  次元とし、 $\{a_1, \dots, a_n\}$  を  $V$  の一つの基とする。 $V$  の任意の元  $a = \lambda^1 a_1 + \dots + \lambda^n a_n$  にたいし、 $a$  の第  $i$  成分  $\lambda^i$  を  $f^i(a)$  とおく。容易にわかるように  $a \rightarrow f^i(a) (i = 1, \dots, n)$  は  $V$  上の一次形式であって、

$$f^i(a_j) = \delta^i_j (i, j = 1, \dots, n) \quad (5)$$

をみたす。

以上により  $\{f^1, \dots, f^n\}$  は  $V^*$  の基であることが証明された。、 $n$  次元ベクトル空間  $V$  の双対空間  $V^*$  はやはり  $n$  次元である。

$V$  の基  $\{a_1, \dots, a_n\}$  と  $V^*$  の基  $\{f^1, \dots, f^n\}$  の間に、条件 (5) がなりたつとき、 $\{f^1, \dots, f^n\}$  を  $\{a_1, \dots, a_n\}$  の双対基 とよぶ。

$$a = \sum_{i=1}^n f^i(a) a_i$$

多様体入門 p43

$f$  を 多様体  $M$  の開集合  $U$  上の可微分関数とする。のとき、任意の  $v \in T_p(M)$  に対し

$$(df)_p(v) = v(f)$$

とおくと、 $(df)_p$  は  $T_p(M)$  から  $\mathbb{R}$  への写像であって、。すなわちはベクトル空間上の一次関数であり、。 $(df)_p$  を  $f$  の  $p$  における微分とよぶ。

をの近傍における局所座標系とすれば

$$(df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) =$$

とくに

$$(dx^j)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) = \delta^j_i$$

となる。ゆえに  $\{(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p\}$  は  $T_p(M)$  の基  $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$  に双対な  $T_p^*(M)$  の基である。

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) (dx^i)_p$$

多様体 p25

$$(df)_x(u) = u(f)$$

多様体 p33

$$(Xf)(x) = \sum_{i=1}^n \xi^i(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x f = \left( \sum_{i=1}^n \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f(x)$$

2.2.3 { 理論幾何学 p41 }

任意のベクトル  $v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \dots + v^n e_n$  を選ぶ。V 上の線形関数全体は再びベクトル空間となる。つまり 2 つの線形関数の 1 次結合も再び線形関数になる：

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2)(v) = a_1 f_1(v) + a_2 f_2(v)$$

双対ベクトル空間。

$$e^{*1}(e_j) =$$

双対基底。

5.2.3 { p141 }

$T_p M$  はベクトル空間なので、で見たように  $T_p M$  の双対ベクトル空間、つまりから  $R$  への線形関数からなるベクトル空間が存在する。そのような双対空間を  $p$  における余接空間とよび  $T_p^* M$  とかく。 $T_p^* M$  の元  $\omega : T_p M \rightarrow R$  は双対ベクトルまたは余接ベクトルあるいは微分形式の意味では 1-形式とよばれる。このとき  $df \in T_p^* M$  の  $V \in T_p M$  への作用は

$$\langle df, V \rangle \equiv V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in R$$

で定義される。

$df = (\partial f / \partial x^\mu) dx^\mu$ 。更にこれは双対基底でもある。すなわち

$$\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rangle = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu$$

5.2.3 { p141 }

。

で定義される。

$df = (\partial f / \partial x^\mu) dx^\mu$ 。

$$\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rangle = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu$$

微分形式の幾何学 p66

微分  $dx_i : T_0 R^n \rightarrow T_0 R = R$  を考えれば、

$$dx_i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij} \quad (2.5)$$

となる。

$V$  を  $R$  上のベクトル空間とする。として読んでも差し支えない。 $V$  の双対空間  $V^*$  とは

$$V^* = \{ \alpha : V \rightarrow R; \alpha \text{ は線形写像} \}$$

と定義されるベクトル空間である。

微分形式の幾何学 p71

$M$  上の  $p$  点における接空間  $T_p M$  の双対空間  $T_p^* M$  を、 $p$  における余接空間という。

定義  $M$  を多様体とする。 $M$  上の  $k$  形式であるとは、各点において、 $k$  を対応させ、 $k$  に関する級であるときをいう。

$$p \in U$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p$$

は接空間  $T_p M$  の基底となる。。各  $x_i$  は関数  $x_i : U \rightarrow R$  と思える。この写像の  $p$  における微分  $(dx_i)_p : T_p M \rightarrow T_{x_i(p)} R$  を考える。 $T_{x_i(p)} R$  は自然に  $R$  と同一視することができるので、 $(dx_i)_p$  は  $T_p M$  の元とすることができる。

$$dx_i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}$$

である (2.5)。したがって

$$(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p$$

は  $T_p^* M$  の双対基底となる。このことから上記定義の中のは





微分形式の幾何学 p40

$$(Xf)(p) = X_p(f) \quad ()$$

p61

その外微分は  $df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$  となり、いわゆるの全微分と呼ばれるものに等しい。

多様体入門 p43

$f$  を 多様体  $M$  の開集合  $U$  上の可微分 関数とする。のとき、任意の  $v \in T_p(M)$  に対し

$$(df)_p(v) = v(f)$$

とおくと、 $(df)_p$  は  $T_p(M)$  から  $\mathbb{R}$  への写像 であって、 $v$  を  $v$  のにおける微分とよぶ。

$$(dx^j)_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \delta^j_i$$

となる。ゆえに  $\{(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p\}$  は  $T_p(M)$  の基  $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$  に双対な基である。

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) (dx^i)_p$$

30p16

$V$  をベクトル空間とする。 $V$  から  $\mathbb{R}$  への写像で線形なものを考える。すなわち写像

=

このようなを線形関数ということにしよう。

定義  $V$  上の線形関数全体のつくるベクトル空間を  $V$  の双対ベクトル空間、あるいは簡単に双対空間といい、 $V^*$  によって表わす。

そのため  $V$  の基底を 1 つとり、それをとする。

に対して、番目の座標成分を対応させる写像は、 $V$  上の線形関数となる。

が基底を与えていることを示している。

定義  $V^*$  を、 $V$  の双対基底という。

30p210

このように定義されたベクトル空間  $T^*(M)_x$  を、 $x$  における  $M$  の余接空間という。

30p217

定義 接空間

のときは基底

$$\{dx_{\alpha}, \dots\}$$

をもつ。におけるの双対基底を

によって表わす。

と、とは互いに双対空間の関係にあるのだから、における接ベクトル

と、における余接ベクトル

の間には、それは

$$=$$

と表される。



p270

定義 19  $V$  を  $R$  上の  $m$  次元ベクトル空間とする。 $V$  上の  $k$  次形式とは、 $V$  の  $k$  個の直積から  $R$  への写像

であって、 $k$  個の  $V$  に関して線型であるようなものを言う。

p274

定義  $V$  を  $R$  上の  $m$  次元ベクトル空間とする。 $V$  上の  $k$  次形式が対称  $k$  次形式であるとは、 $k$  個の  $V$  の間にどのような置換を施しても、その値が変わらないことである。

p275

定義 級多様体  $M$  上のテンソル場が  $k$  次対称テンソル場であるとは、 $M$  の各点  $p$  において、 $T_p(M)$  上の対称  $k$  次形式になっていることである。

定義 19 級多様体  $M$  上の 2 次の対称テンソル場が、 $M$  の各点において正定値であるとき、 $M$  のリーマン計量という。

p11

$V$  を  $R$  上のベクトル空間とする。 $V$  の直積集合から  $R$  への写像が条件  
をみたすとき、 $B$  を  $V$  上の双一次形式とよぶ。

p12

$B$  を  $V$  上の ( ) 双一次形式とする。任意の  $x, y \in V$  に対して、

$$B(x, y) = B(y, x)$$

がなりたつとき、 $B$  を  $V$  上の対称双一次形式と

$V$  上の正則な対称双一次形式のことを  $V$  の内積とよぶ。すなわち、

の二条件をみたす場合をいう。 $V$  上の対称双一次形式が

をみたすとき、 $B$  を  $V$  の正値内積とよぶ。

p199

定義を微分多様体とする。 $M$  上の Riemann 計量  $g$  とは、各点で次の公理

を満たす  $M$  上の型テンソルである。ここでである。手短かにいえばは正定値な対称双 1 次形式である。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} f_{i_1 \cdots i_k}() dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_j}() dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \\ &= \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \\ &= \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \left[ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \right] \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} f_{i_1 i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \{f_{1i_2} dx_1 \wedge dx_{i_2} + f_{2i_2} dx_2 \wedge dx_{i_2} + f_{3i_2} dx_3 \wedge dx_{i_2}\} \\
&= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{21} dx_2 \wedge dx_1 + f_{22} dx_2 \wedge dx_2 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{31} dx_3 \wedge dx_1 + f_{32} dx_3 \wedge dx_2 + f_{33} dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \{f_{23} - f_{32}\} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \{f_{31} - f_{13}\} dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \\
d\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \frac{\partial f_{i_1 i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \left\{ \frac{\partial f_{1i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{2i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{3i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_{i_2} \right\} \\
&= \left[ \frac{\partial f_{11}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \{f_{23} - f_{32}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \{f_{31} - f_{13}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
d\omega &= \left[ \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] \\
&\quad + \left[ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \right] \\
&\quad + \left[ \frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \right] \\
&\quad + \left[ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \right] \\
&\quad + \left[ \frac{\partial f_{22}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \left[ + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right] \\
& \left[ + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \left[ + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] \\
& + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \left[ + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \right] \\
& \left[ + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_3 \right]
\end{aligned}$$





{ P290 }

$m$  次元級多様体  $M$  上の  $k$  次微分形式を座標近傍  $(U; x_1, x_2, \dots, x_m)$  上で局所座標表示したものが

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

であったとする。

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

微分形式の幾何学 p61

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

を  $R^n$  上の  $k$  次の微分形式、。上記を簡単に、 $f_I(x)$  と記す場合もある。外微分とは、つぎのように定義される線形写像

$$d: A^k(R^n) \rightarrow A^{k+1}(R^n)$$

のことである。すなわち  $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  に対して

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

30p213

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

微分位相 p35

$$\sum_{h_1} \dots \sum_{h_p} a_{h_1 \dots h_p} dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_p}$$

$$du \wedge du = 0, \quad dv \wedge dv = 0, \quad du \wedge dv = -dv \wedge du$$

次に外微分  $d$  を

0 次微分形式 ( $f$ ) に対しては

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

1 次微分形式  $= f du + g dv$  に対しては

$$= df \wedge du + dg \wedge dv$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv$$

2 次微分形式  $= f du \wedge dv$  に対しては

$$= df \wedge du \wedge dv$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du \wedge dv = 0$$

と定義する。





