

p270

定義 19 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする $\{ \}$ 。 V 上の k 次形式 (正確には、 k 次の多重線型形式) とは、 V の k 個の直積から R への写像

$$\omega : V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow R$$

であって、 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ が各 X_i に関して線型であるようなものを言う。

たとえば、 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ が第 1 の変数 X_1 に関して線型であるというのは、任意の $X, Y \in V$ と任意の実数 $a, b \in R$ について、

$$\omega(aX + bY, X_2, \dots, X_k) = a\omega(X, X_2, \dots, X_k) + b\omega(Y, X_2, \dots, X_k) \quad \{ \text{森} \}$$

がなりたつことである。このとき、 $X_2, \dots, X_k \in V$ は任意に止めておく。

多様体入門 p11

V, W を K 上のベクトル空間とする。 V と W の 直積集合 から K への写像 が条件

$$(a + b, a') = (a, a') + (b, a')$$

$$(a, a' + b') = (a, a') + (a, b')$$

$$(\lambda a, a') = (a, \lambda a') = \lambda()$$

をみたすとき、を上の双一次形式とよぶ。特に $W = V$ のときには、を V 上の双一次形式とよぶ。
さてを V 上の () 双一次形式とする。任意のにたいして、

$$(a, b) = (b, a)$$

がなりたつとき、を V 上の対称双一次形式とよ

V 上の正則な対称双一次形式のことをの内積とよぶ。すなわち

V 上の対称双一次形式が

$$(x, x) > 0 \quad x \neq 0$$

をみたすとき、をの正値内積とよぶ。

{ V 上の k 個の 1 次形式 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k \in V^*$ を任意にとる。このとき、

$$\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \dots \otimes \eta_k : V \times V \times \dots \times V \rightarrow R$$

という記号で表わされる V 上の k 次形式が、次の式で定義できる。

$$(\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \dots \otimes \eta_k)(X_1, X_2, \dots, X_k) = \eta_1(X_1)\eta_2(X_2) \cdots \eta_k(X_k)$$

$\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \dots \otimes \eta_k$ を $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ のテンソル積とよぶ。}

{ 定理 の基底をとし、それに対応する双対基底をとる。このとき、
 がの基底になる。。

多様体入門 p111

、のテンソル積とよぶ。

微分・位相幾何 p81

ベクトルと形式を任意にとる。テンソル積、と形式、をおのおの次の式で定義する。

{多様体の基礎 p274}

定義 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式 ω が対称 k 次形式であるとは、 $X_1, X_2, \dots, X_k \in V$ の間にどのような置換を施しても、 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ の値が変わらないことである。

{定義 級多様体 M 上のテンソル場 $\omega =$ が k 次対称テンソル場であるとは、 M の各点 p において、 ω_p が $T_p(M)$ 上の対称 k 次形式になっていることである。}

{ベクトル空間 V 上の対称 2 次形式 $\omega : V \times V \rightarrow R$ の大切な例に、} V の内積 がある {島}。これは、 V 上の対称 2 次形式 ω であって、更に次の意味で正定値なものである。すなわち、 V の任意の 0 でないベクトル X について、 $\omega(X, X) > 0$ がなりたつようなものである {島}

{たとえば、次元数ベクトル空間 R^m の場合、 $X = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 、 $Y = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ に対し、

$$\omega(X, Y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$$

とおけば、。}

リーマン計量、リーマン多様体 {多様体の基礎 p275}{幾何学 p144}

{定義 19 級多様体 M 上の 2 次の対称テンソル場 ω が、 M の各点 p において正定値であるとき} ω を M 上のリーマン計量という。

つまり、 M の各点 p の接ベクトル空間 $T_p(M)$ に内積を与えるようなものがリーマン計量 ω である {島}。通常、リーマン計量は g という記号で表わされる。リーマン計量 g がひとつ与えられた多様体 (M, g) のことをリーマン多様体とよぶ。

{、接ベクトル $X \in T_p(M)$ の長さ $\|X\|$ が

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)} \quad (\geq 0)$$

$$[= \sqrt{g\left(\xi^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \xi^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p + \dots + \xi^m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p, \xi^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \xi^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p + \dots + \xi^m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right)}]$$

という式で定義できる {島}、曲線 c の長さが

$$\int_c^d \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt [= \int_c^d \sqrt{g\left(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right)} dt]$$

という式で、定義できるのである。}

例

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 = [dx, dy] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \\
 (ds)^2 &= a^2(d\theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2 = [d\theta, d\varphi] \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{bmatrix} \\
 (ds)^2 &= [dx^1, dx^2] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{bmatrix} = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \\
 &= g_{11} dx^1 dx^1 + g_{21} dx^2 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} dx^2 dx^2 \\
 I &= \int_l ds = \int_l \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = \int_l \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} ds \\
 L(C) &= \int_a^b \sqrt{g_{x(t)}(x'(t), x'(t))} dt \\
 g_{ij}(x) &= g_x \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x \right) \quad (1 \leq i, j \leq n) \\
 x'(t) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x(t)}
 \end{aligned}$$

である。ゆえに (1) はつぎの形に書ける。

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

例

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 = [dx, dy] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \\
 (ds)^2 &= a^2(d\theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2 = [d\theta, d\varphi] \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{bmatrix} \\
 (ds)^2 &= [dx^1, dx^2] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{bmatrix} = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \\
 &= g_{11} dx^1 dx^1 + g_{21} dx^2 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} dx^2 dx^2 \\
 I &= \int_l ds = \int_l \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = \int_l \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} ds
 \end{aligned}$$

計量テンソル

p115

$$(ds)^2 = a^2(d\theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$$

p270

定義 19 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式 (正確には、 k 次の多重線型形式) とは、 V の k 個の直積から R への写像

$$\omega : V \times V \times \cdots \times V \rightarrow R$$

であって、 $\{\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ が各 X_i に関して線型であるようなものを言う。

たとえば、 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ が第 1 の変数 X_1 に関して線型であるというのは、任意の $X, Y \in V$ と任意の実数 $a, b \in R$ について、

$$\omega(aX + bY, X_2, \dots, X_k) = a\omega(X, X_2, \dots, X_k) + b\omega(Y, X_2, \dots, X_k)$$

がなりたつことである。

$\{V$ 上の k 個の 1 次形式を任意にとる。このとき、
という記号で表わされる V 上の k 次形式が、次の式で定義できる。

$$(\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \cdots \otimes \eta_k)(X_1, X_2, \dots, X_k) = \eta_1(X_1)\eta_2(X_2)\cdots\eta_k(X_k)$$

$\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \cdots \otimes \eta_k$ を $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ のテンソル積とよぶ。

p41

g_{ij} がすべて M の各点の近傍で C^r 級であるとき、 M の各点 p に $T_p(M)$ の正値な内積 g_p を対応させる対応 $g : pg_p$ を M の C^r リーマン計量とよび、。リーマン計量が与えられたとき、における接ベクトル v の長さ $\|v\|$ を

$$\|v\|^2 = g_p(v, v)$$

により 定義 する。

リーマン計量 g をそなえた 多様体のことをリーマン多様体とよぶ。

を開区間で定義された可積分曲線、のにおける接ベクトルをとるとはの連続関数である。とするとき、

$$= \int_c^d \|v_t\| dt$$

をとの間の長さという。

幾何学 p144

一般の実線形空間に対しが 2 次形式とは、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に対し、という双 1 次形式 $B : V \times V \rightarrow R$ があることである。さらに次形式が正値であるとは $q(v) \geq 0$ ならば $v=0$ を満たすことである。上の双 1 次形式は、対称性 $B(u, v) = B(v, u)$ を満たす。

この g をリーマン計量と呼ぶ。

のまわりの座標近傍により、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に対し基底が同時に定まる。そのような基底について、は $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と書かれ、 $\langle v, v \rangle = g(v, v)$ と書かれる。

このようなリーマン計量を持つ多様体をリーマン多様体と呼ぶ。

定義 7.2.1 リーマン計量と呼ぶことが多い。

2.2.4 { 幾何学 p43 }

内積

幾何学 p199

定義 M を微分多様体とする。 M 上の Riemann 計量 g とは、各点 $p \in M$ で次の公理

$$g_p(U, V) = g_p(V, U)$$

$$g_p(U, U) \geq 0, \text{ ただし等式は } U=0 \text{ のときのみ成り立つ}$$

を満たす M 上の型テンソルである。ここで $U, V \in T_p M$ である。手短かにいえばは正定値な対称双 1 次形式である。

計量 g が存在する場合は、2 つのベクトル $U, V \in T_p M$ の内積を $g_p(U, V)$ によって定義する。 g_p は写像 $T_p M \times T_p M \rightarrow R$ なので、線形写像 $g_p(U, \cdot) : T_p M \rightarrow R$ を $V \mapsto g_p(U, V)$ によって定義することができる。

微分多様体 M が Riemann 計量 g をもつとき、対 (M, g) を Riemann 多様体とよぶ。

記号

点 p における M の接ベクトルとは

$$v = a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + a_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p + \cdots + a_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p \quad (\text{本 8.14})$$

$$v = \sum_{i=1}^n \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \quad (\text{島})$$

接ベクトル X

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)} \quad (\geq 0)$$

$$[= \sqrt{g \left(\xi^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \xi^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p + \cdots + \xi^m \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p, \xi^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \xi^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p + \cdots + \xi^m \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p \right) }]$$

多様体の基礎 p

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (\text{松本 16.14})$$

$$X = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^m \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$[g(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \eta^m \frac{\partial}{\partial x^m})]$$

微分形式の幾何学 p40

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

曲線と曲面の微分幾何 p97

$$\{\xi + \eta\}_{(u,v)=(a,b)}$$

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v} \right)_{(u,v)=(a,b)}$$

という微分作用そのものを接ベクトルと考えることにする。

領域 D の各点に 1 つずつ接ベクトルをつけたとき、それを D 上の接ベクトル場と呼ぶ。

いま、 M の各点 x に対し、接空間に、内積が与えられているとする。
 局所座標近傍上での基底
 を考え、各点に対して

$$=$$

とおく。

定義 各点 x に対し $T(M)_x$ に与えられた内積 $(\cdot, \cdot)_x$ が、次の条件 (R) をみたすとき、 M にリーマン計量が与えられたという：

(R) 各

p11

を上のベクトル空間とする。との直積集合からへの写像が条件
 をみたすとき、を上の双一次形式とよぶ。

p12

を V 上の () 双一次形式とする。任意のにたいして、

$$() = ()$$

がなりたつとき、を V 上の対称双一次形式と

V 上の正則な対称双一次形式のことを V の内積とよぶ。すなわち、

の二条件をみたす場合をいう。 V 上の対称双一次形式が

をみたすとき、を V の正値内積とよぶ。

p153

座標基底 $\{e_i\} = \{\partial/\partial x^i\}$ を選ぶ。この基底で ω の成分は

$$\omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}) = \omega_{i_1 i_2 \dots i_r}$$

$$[\omega(\partial/\partial x^{i_1}, \partial/\partial x^{i_2}, \dots, \partial/\partial x^{i_r}) = \omega_{i_1 i_2 \dots i_r}]$$

である。

p280

定理 19.3 V の基底をとし、それに対応するの双対基底をとする。このとき、 ω がの基底になる。

ω をの任意の元として、実数を

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$$

と定義すれば、

$$\omega =$$

がなりたつ。

ω の各点において、 ω が、に対応するの双対基底になっている。したがって、定理 19.3 により、 ω の各点における交代次形式を

$$\omega =$$

の形に一意的に表わすことができる。この係数は、点で決まる実数だから、これを、

という関数とみなせる。

と局所座標表示できたわけである。

p108

複素多様体 X の Hermite 計量はとしても定義できるが、ここでは X の Riemann 計量 g で次の条件を満たすものとして定義する。

$$g(J, J) = g(J, J)$$

多様体入門 p99

M のリーマン計量 g が M の各点 p と任意の $u, v \in T_p(M)$ について

$$g_p(J_p u, J_p v) = g_p(u, v)$$

をみたすとき、 g を複素多様体 M のエルミット計量とよぶ。

p275

複素多様体 M の Riemann 計量 g が、各点 $p \in M$ と任意の $X, Y \in T_p M$ に対して

$$g_p(J_p X, J_p Y) = g_p(X, Y)$$

を満たすとき g は Hermite 計量とよばれる。

p115

上の定理の条件を満たすような Hermite 計量 g を Kahler 計量とよび、

p280

定義 8.4 Kahler 多様体とは Hermite 多様体 (M, g) で、その Kahler 形式が閉形式であるものをいう。計量 g は M の Kahler 計量とよばれる。

p259

定義 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の 1 次形式とは、 V から R への写像

$$\omega : V \rightarrow R$$

であって、任意のベクトル $X, Y \in V$ と任意の実数 $a, b \in R$ について

$$\omega(aX + bY) = a\omega(X) + b\omega(Y)$$

がなりたつようなものをいう（すなわち、 V から R への線型写像 $\omega : V \rightarrow R$ のことである）。

V 上の 1 次形式全体のなす集合を V^* と書くことにする。

定義 V^* を、 V の双対ベクトル空間または双対空間という。

e_1, e_2, \dots, e_m を、任意に選んだ V の基底とする。 V の任意のベクトル X は

$$X = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m \quad (a_i \in R)$$

のように、 e_1, e_2, \dots, e_m の次結合で書ける。番号 $i (1 \leq i \leq m)$ をひとつ固定して、ベクトル X に、 e_i の係数 a_i を対応させる写像 $\omega_i : V \rightarrow R$ を考える：

$$\omega_i(X) = a_i$$

この写像 $\omega_i : V \rightarrow R$ は明らかに線型写像であるから、 ω_i は V 上の 1 次形式と考えられる。

番号 i を 1 から m まで動かして得られる $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ という m 個の 1 次形式が、実は V^* の基底になるのである。

定義 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ を、に対応する双対基底という。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} f_{i_1 \cdots i_k}() dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_j}() dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \right] \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} f_{i_1 i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \{f_{1i_2} dx_1 \wedge dx_{i_2} + f_{2i_2} dx_2 \wedge dx_{i_2} + f_{3i_2} dx_3 \wedge dx_{i_2}\} \\
&= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{21} dx_2 \wedge dx_1 + f_{22} dx_2 \wedge dx_2 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{31} dx_3 \wedge dx_1 + f_{32} dx_3 \wedge dx_2 + f_{33} dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \{f_{23} - f_{32}\} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \{f_{31} - f_{13}\} dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \\
d\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \frac{\partial f_{i_1 i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \left\{ \frac{\partial f_{1i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{2i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{3i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_{i_2} \right\} \\
&= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \{f_{23} - f_{32}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \{f_{31} - f_{13}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
d\omega &= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \right] + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{22}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \right] + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \left[+ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] \\
& + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \left[+ \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{33}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_3 \right]
\end{aligned}$$

{ P290 }

m 次元級多様体 M 上の k 次微分形式を座標近傍 $(U; x_1, x_2, \dots, x_m)$ 上で局所座標表示したものが

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

であったとする。

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

微分形式の幾何学 p61

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

を R^n 上の k 次の微分形式、。上記を簡単に、 $f_I(x)$ と記す場合もある。外微分とは、つぎのように定義される線形写像

$$d: A^k(R^n) \rightarrow A^{k+1}(R^n)$$

のことである。すなわち $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ に対して

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

30p213

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

微分位相 p35

$$\sum_{h_1} \dots \sum_{h_p} a_{h_1 \dots h_p} dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_p}$$

$$du \wedge du = 0, \quad dv \wedge dv = 0, \quad du \wedge dv = -dv \wedge du$$

次に外微分 d を

0 次微分形式 (f) に対しては

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

1 次微分形式 $= f du + g dv$ に対しては

$$= df \wedge du + dg \wedge dv$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv$$

2 次微分形式 $= f du \wedge dv$ に対しては

$$= df \wedge du \wedge dv$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du \wedge dv = 0$$

と定義する。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \\ &= 0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + 0 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + 0 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{21} dx_2 \wedge dx_1] + [f_{22} dx_2 \wedge dx_2] + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{31} dx_3 \wedge dx_1] + [f_{32} dx_3 \wedge dx_2] + [f_{33} dx_3 \wedge dx_3] \\ &= f_{23} dx_2 \wedge dx_3 - f_{13} dx_3 \wedge dx_1 + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

ストークスの定理 { P305 }

定理 { ストークスの定理 }

$$\int_N d\eta = \int_{\partial N} \eta$$

証明

$$\eta = \sum_{i=1}^m g_i dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_i \wedge \dots \wedge dx_m$$

$d\hat{x}_i$ は dx_i を除くことを表わす。

$$d\eta = \sum_{i=1}^m \{-1\}^{i-1} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_m$$

。により、

$$\begin{aligned} \int_N d\eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) dx_m dx_1 \dots \\ &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots \{g_1(a, \dots, x_m) - g_1(0, \dots, x_m)\} \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a \{g_m(x_1, \dots, a) - g_m(x_1, \dots, 0)\} dx_1 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial N} \eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots g_1(a, \dots, x_m) \dots dx_m - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \dots g_1(0, \dots, x_m) \dots dx_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a g_m(x_1, \dots, a) dx_1 \dots - \{-1\}^{m-1} \dots \int_0^a g_m(x_1, \dots, 0) dx_1 \dots \end{aligned}$$

[次のページへ続く。]

例

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(a, x_2) dx_2 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(0, x_2) dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, a) dx_1 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, 0) dx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(a, x_2, x_3) dx_2 dx_3 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(0, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, a, x_3) dx_1 dx_3 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, 0, x_3) dx_1 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, a) dx_1 dx_2 - \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

{ 微分幾何 P124 }

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right\} du dv \\ &= \int_0^b \int_0^a \frac{\partial g}{\partial u} du dv - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial f}{\partial v} dv du \\ &= \int_0^b [g(a, v) - g(0, v)] dv - \int_0^a [f(u, b) - f(u, 0)] du \end{aligned}$$