

交代 k 次形式、 k 次微分形式 {多様体の基礎 p274 ~ }

置換の符号をと表わす $\{s\}$ 、

、

。

定義 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする $\{ \}$ 。 V 上の k 次形式 $\{ 270 \}$ ω が交代 k 次形式であるとは $\{s\}$ 任意の $X_1, X_2, \dots, X_k \in V$ と任意の置換 $\sigma \in S_k$ について $\{ \}$ 次の式

$$\omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma) \omega(X_1, X_2, \dots, X_k) \quad \{m\}$$

がなりたつことである $\{s\}$

V 上の交代 k 次形式 $\{ \}$ 全体のなす集合を

$$\bigwedge^k V^*$$

という記号で表わす $\{s\}$

例 V 上の k 個の 1 次形式 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k \in V^*$ を任意にとる。このとき、

$$\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_k : V \times V \times \dots \times V \longrightarrow R$$

という記号で表わされる V 上の交代 k 次形式 $\{ \}$ が、次の式で定義される。

$$\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_k(X_1, X_2, \dots, X_k) = \det \begin{bmatrix} \eta_1(X_1) & \eta_1(X_2) & \dots & \eta_1(X_k) \\ \eta_2(X_1) & \eta_2(X_2) & \dots & \eta_2(X_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_k(X_1) & \eta_k(X_2) & \dots & \eta_k(X_k) \end{bmatrix}$$

、

が、各について線型であることを証明しよう。例えば、とおくと

となる。これは、がについて線型であることを示している。他のについても証明は同様である。

これで、が上の次形式であることがわかった。

、が交代次形式であることを見よう。 $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k(X_1, X_2, \dots, X_k)$ において、 X_i と X_j を入れ換えると、の右辺の行列式において、第列と第列が入れ換わる。すると、行列式の性質によって、右辺の符号が変わる。これは、が交代次形式であることを示している*。

$$=\{s\}$$

この公式を示すためには、任意の t を入れ換えたとき、の符号が変わることを見ればよい。たとえば、において、 t を入れ換えると、の右辺の行列式において、第行と第行が入れ換わる。したがって、

を得る $\{s\}$ 。これは、次形式として、であることを示している。他の t の入れ換えについても同様である。

定理 19.3 V の基底 $\{ 13 \}$ を e_1, e_2, \dots, e_m とし、それに対応する V^* の双対基底 $\{ 260 \}$ を $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^m$ とする。このとき、

$$\{\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k}\}_{i_1 < i_2 < \dots < i_k}$$

が $\bigwedge^k V^*$ の基底 { 13 } になる *1。とくに、 $\bigwedge^k V^*$ の次元 { p } は、m 個の数字 $\{1, 2, \dots, m\}$ から k 個の異なる数字 $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ をとり出す仕方の数 $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ に等しい { smn }。

{ 証明 定義式 () から、 $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k} (j_1 < j_2 < \dots < j_k)$ を $\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} (i_1 < i_2 < \dots < i_k)$ に代入したときの値として、

$$\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k) \\ 0 & (i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k) \end{cases}$$

が示される *2。これより、 $\{\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k}\}_{i_1 < i_2 < \dots < i_k}$ という集合が 1 次独立 { 12 } であることがわかる { s } *3。

次に、 ω を $\bigwedge^k V^*$ の任意の元として、実数 $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ を

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$$

と定義すれば、 $\bigwedge^k V^*$ の元との等式として、

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} \quad (19.28) \{ s \}$$

がなりたつ *4。実際、(19.28) の両辺は、 $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ であるような任意の $(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k})$ について、同じ値 $a_{j_1 j_2 \dots j_k}$ をとる *5。そして、(19.28) の両辺は交代形式 { } であるから *、 $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ であるような任意のについて一致した値をとれば、それらを並べ換えたすべてのについても一致した値をとらなければならない。したがって、の両辺は次形式として一致する。

これで、の基底になることが示された。}

定義 級多様体 { } M 上のテンソル場が k 次交代テンソル場であるとは、M の各点 p において、 $T_p(M)$ 上の交代 k 次形式 { } になっていることである。k 次の交代テンソル場のことを、ふつう、k 次微分形式という { s }

例

*1

$m = 3, k = 2,$

$$\{\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2}\}_{i_1 < i_2} = \omega^1 \wedge \omega^2, \omega^1 \wedge \omega^3, \omega^2 \wedge \omega^3$$

*2

$$\omega^1 \wedge \omega^2(e_1, e_2) = \det \begin{bmatrix} \omega^1(e_1) & \omega^1(e_2) \\ \omega^2(e_1) & \omega^2(e_2) \end{bmatrix} = \omega^1(e_1)\omega^2(e_2) - \omega^1(e_2)\omega^2(e_1) = 1$$

$$\omega^1 \wedge \omega^3(e_1, e_2) = \det \begin{bmatrix} \omega^1(e_1) & \omega^1(e_2) \\ \omega^3(e_1) & \omega^3(e_2) \end{bmatrix} = \omega^1(e_1)\omega^3(e_2) - \omega^1(e_2)\omega^3(e_1) = 0$$

*3 0 でない項が 1 つ $a_{12}\omega^1 \wedge \omega^2(,) + a_{13}\omega^1 \wedge \omega^3(,) + a_{23}\omega^2 \wedge \omega^3 = 0$ と

*4

$$\omega(,) = \omega(e_1, e_2)\omega^1 \wedge \omega^2(,) + \omega(e_1, e_3)\omega^1 \wedge \omega^3(,) + \omega(e_2, e_3)\omega^2 \wedge \omega^3(,)$$

$$\left[\omega \left(\sum_{i=1}^m a_{1i} e_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{ki} e_i \right) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \{ \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} \} \left(\sum_{i=1}^m a_{1i} e_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{ki} e_i \right) \right]$$

*5 $\omega(e_1, e_2)\omega^1 \wedge \omega^2(e_1, e_2) + \omega(e_1, e_3)\omega^1 \wedge \omega^3(e_1, e_2) + \omega(e_2, e_3)\omega^2 \wedge \omega^3(e_1, e_2) = \omega(e_1, e_2)$

$$\left[\omega(, , ,) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k}(, , ,) \right]$$

{ 多様体の基礎 p282 }

$(U; x^1, x^2, \dots, x^m)$ を M の座標近傍 { 37 } のひとつとし $\{s\}$ 、 M 上の k 次微分形式 { 281 } $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$ の、 U 上での局所座標表示を考える。

U の各点 p において、 $(dx^1)_p, (dx^2)_p, \dots, (dx^m)_p$ が、 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$ に対応する $T_p^*(M)$ の双対基底になっている。したがって、定理 19.3 により、 U の各点 p における交代 k 次形式 ω_p を

$$\omega_p = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(p) (dx^{i_1})_p \wedge (dx^{i_2})_p \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_p$$

の形に一意的に表わすことができる。この係数 $a_{i_1 i_2 \dots i_k}(p)$ は、点 $p \in U$ で決まる実数だから、これを、

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k} : U \rightarrow R$$

という関数とみなせる。結局、 k 次微分形式 ω を U 上で

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \{msn\}$$

$$[\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k} (\varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n)) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}]$$

と局所座標表示できたわけである。

$$\begin{aligned} & \left[\omega \left(\sum_{i=1}^m \xi_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \dots, \sum_{i=1}^m \xi_k^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right. \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) \{ dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \} \left(\sum_{i=1}^m \xi_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \dots, \sum_{i=1}^m \xi_k^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Big] \\ & \left[\omega \left(\begin{array}{c} , \\ , \\ , \end{array} \right) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \left(\begin{array}{c} , \\ , \\ , \end{array} \right) \right] \end{aligned}$$

{ 多様体の基礎 p282 ~ }

定義 ベクトル空間 V 上の k 次交代形式 $\omega (\in \bigwedge^k V^*)$ と l 次交代形式 $\eta (\in \bigwedge^l V^*)$ との外積とは、次の式 () で定義される $k + l$ 次交代形式 $\omega \wedge \eta (\in \bigwedge^{k+l} V^*)$ のことである。

$$\omega \wedge \eta (X_1, X_2, \dots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}) \quad \{msn\}$$

{ たとえば、が 1 次、が 2 次の交代形式のとき、は

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta (X_1, X_2, X_3) &= (1/2) \{ \omega(X_1) \eta(X_2, X_3) - \omega(X_1) \eta(X_3, X_2) \\ &\quad - \omega(X_3) \eta(X_2, X_1) - \omega(X_2) \eta(X_1, X_3) \\ &\quad + \omega(X_2) \eta(X_3, X_1) + \omega(X_3) \eta(X_1, X_2) \} \end{aligned}$$

}

命題

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega \quad \{sn\}$$

とを適当に局所座標表示して

を得たとする。

のを、まず先頭に持ってくる。このとき、は、という個の文字を、右から順々に飛び越さねばならない。回の飛び越しはの互換に相当するから、を先頭に出すのに、回の互換を施すことになる。この結果、を得る ()。

次にをの右隣に持って来る。この時もを右から次々と飛び越すの互換を施さねばならない。こうして、を得る。

以下同様に、、最後にが得られる。

別の局所座標表示を使って計算したら、別の答が得られるということはないだろうか。

微分形式 p61

次数が k の単項式の 1 次結合全体を Λ_n^k と書くと、
の基底として
の全体が取れることがわかり、したがって $\dim =$ である。
 R^n 上の関数を係数とするの各元の 1 次結合

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

を上 k 次の微分形式、あるいは単に k 形式という。

微分形式 p66

一般に Λ_n^k の任意の元は、 $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k (\alpha_i \in \Lambda_n^1)$ の形の元の次結合として書けるが、この形の ω はつぎのようにして写像

$$\omega : T_0 R^n \times \dots \times T_0 R^n \longrightarrow R$$

を 定義 する。すなわち、 $X_i \in T_0 R^n (i = 1, \dots, k)$ に対して

$$\omega(X_1, \dots, X_k) = \frac{1}{k!} \det(\alpha_i(X_j))$$

とおくのである。。この定義がの表示の仕方によらずに一意的に定まることは、
は多重線形である。すなわち、任意のについて線形性の条件

$$\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, aX_i + bX'_i, X_{i+1}, \dots, X_k) = a\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + b\omega(X_1, \dots, X'_i, \dots, X_k)$$

をみたす。

は交代式的である。

上記二つの条件をみたす写像を $T_0 R^n$ 上の k 次の交代形式と呼ぶことにする。、対応により写像

$$\Lambda_n^k T_0 R^n \text{ 上の } k \text{ 次の交代形式の全体}$$

が定義され、。

定義 2.4 V を上のベクトル空間とする。上の元によって生成される単位元を持つ代数で、任意の
に対し関係式

をみたすものを $\wedge^* V$ と書き、。

ここに $\wedge^k V$ は次数が k の元全体からなる $\wedge^* V$ の部分空間である。 e_1, \dots, e_n を V の基底とすれば、 $\wedge^k V$ の基底として

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

の全体がとれ、したがって $\dim \wedge^k V =$ である。

つぎに V 上の交代形式を定義しよう。

定義 2.5 V を R 上のベクトル空間とする。 V の k 個の直積から R への **多重線形** な写像

で交代的なもの、すなわち 任意の k 文字の 置換 σ に対して

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \text{sgn} \sigma \omega(X_1, \dots, X_k)$$

となるものを V 上の k 次の交代形式という。

V 上の k 次の交代形式全体を $A^k(V)$ と書くことにする。

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \in \Lambda^k V^*() \\ &= \frac{1}{k!} \det(\alpha_i(X_j)) \end{aligned}$$

命題 2.6

[証明] e_1, \dots, e_n を V の基底とし、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を V^* の双対基底とする。このときの基底としては (2.10) より

$$\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

の全体がとれる。この基底の元をで移したものが、の元として次独立なことはそれらをにほどこしてみればわかる。。このときとおき、これらの定数を使って

p71

を任意の座標近傍とし、を上定義された座標関数とする。

このことから上記定義の中のは

$$\omega_p = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k}(p) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (2.12)$$

と表示されることになる。がに関して級であるとは、各係数 $f_{i_1 \dots i_k}(p)$ が p の関数として級のときをいう。表示 (2.12) を M 上の k 形式 ω の局所表示という。

1. { 多様体入門 p111 }

またはをであらわし、上のベクトル空間とする。直積集合の任意の元にたいし、の元にたいし、の元がきまって、

=

がなりたつとき、を上の p 次線型形式とよぶ。すなわちが各変数について線型であるとき、

2. { 多様体入門 p113 }

さて φ をベクトル空間上の次形式とすると、

φ を交代 p 次形式または p 次交代共変テンソルとよぶ。

対称次形式および交代 p 次形式の全体はそれぞれの部分空間をつくる。これらの部分空間を $\wedge^p V^*$ であらわす。

$$(A_{p+q}())(u_1, \dots, u_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \varepsilon_{\sigma} f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) g(u_{\sigma(p+1)}, \dots, u_{\sigma(p+q)})$$

である。

さてにたいしての元を

$$f \wedge g = \frac{1}{p!q!} A_{p+q}()$$

により定義して、 f と g の外積とよぶ。

さて $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_p$ を $V^* =$ の p 個の元、 $u_1, \dots, u_p V$ とすると

$$(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_p)(u_1, \dots, u_p) = \begin{vmatrix} \eta_1(u_1) & \eta_1(u_2) & \dots & \eta_1(u_p) \\ \eta_2(u_1) & \eta_2(u_2) & \dots & \eta_2(u_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_p(u_1) & \eta_p(u_2) & \dots & \eta_p(u_p) \end{vmatrix}$$

であることを、

さて前のようにをの基とし、をこれに双対な基とする。

ところが f は交代であるから、

$$f = f_{i_1 i_p} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}$$

ところがの個の元は一次独立である。

以上により個の元

$$\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p} \quad (i_1 < \dots < i_p)$$

が $\wedge^p V^*$ の基であることがしめされた。

多様体入門 p120

3.

を次元多様体とする。の各点にたいして、上の p 次共変テンソルを対応させる写像のことを、
 が交代であるとき交代共変テンソル場という。 p 次交代共変テンソル場 $\{\}$ のことを p 次微分形式とよぶ。

さて、をそれぞれ p 次、 q 次の微分形式とする、
 (x^1, \dots, x^n) を U での局所座標系とすると、 ω は U 上で

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

と一意的にあらわせる。

5.4 { 理論 p153 }

対称群

対称積

反対称積

多様体 p47

$$v_\mu = c_{\mu 1} e_1 + \dots + c_{\mu n} e_n$$

とすれば

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_p) = \sum_{i_1=1}^n c_{1 i_1} \omega(e_{i_1}, v_2, \dots, v_p) \quad \{\text{村上}\}$$

$$\omega(v_1, \dots, v_p) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) (\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p})(v_1, \dots, v_p)$$

5.4.1 { p153 }

定義 5.4 $(0, r)$ 型の反対称テンソルを r 次微分形式、あるいは r -形式という。

r 個の 1-形式の外積をその反対称テンソル積

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \quad (5.62)$$

によって定義する。

pM における r -形式全体からなるベクトル空間を (M) で表せば、(5.62) の r -形式の集合は基底をなし、任意の元は

$$\omega = \frac{1}{r!} f_{i_1 i_2 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

と表される。

5.5.1

$$\omega = h(p) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

5.5.2

関数 $f: MR$ の積分を定義する準備ができた。

$$f(\varphi_i^{-1}(x)) h(\varphi_i^{-1}(x)) dx^1 \dots dx^m$$

p71

余接空間

定義 M を多様体とする。 γ が上の形式であるとは、各点において、 γ を対応させ、 γ に関して級であるときをいう。

γ はの双対基底となる。このことから上記定義の中のは

と表示されることになる。 γ に関して級であるとは、各係数が γ の関数として級のときをいう。

$$\{\omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}\}_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k}$$

$$\omega = a_{12}\omega_1 \wedge \omega_2 + a_{23}\omega_2 \wedge \omega_3 + a_{13}\omega_1 \wedge \omega_3$$

$$\omega(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = a_{12}\omega_1 \wedge \omega_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{23}\omega_2 \wedge \omega_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{13}\omega_1 \wedge \omega_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = a_{12}$$

$$\omega(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = a_{12}\omega_1 \wedge \omega_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + a_{23}\omega_2 \wedge \omega_3(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + a_{13}\omega_1 \wedge \omega_3(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = a_{23}$$

p281

微分形式 ω が C^s 級であるとは、 U 上で C^s 級 $\{ \}$ にな

5.4.1 { p153 }

定義 5.4 (0,r) 型の反対称テンソルを r 次微分形式、あるいは r -形式という。

pM における r -形式全体からなるベクトル空間を (M) で表せば、任意の元は

$$\omega = \frac{1}{r!} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

と表される。

多様体 p68

$$X_1 = \sum_{j=1}^n f_1^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

とすると、 f_1^j は U 上でであり $x \in U$ のとき

$$\omega(X_1, \dots, X_p)(x) = \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n f_1^{j_1}(x) f_p^{j_p}(x) \omega_x \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_p}} \right)_x \right)$$

p71

余接空間

定義 M を多様体とする。 g が上の形式であるとは、各点において、 g を対応させ、 g に関して級であるときをいう。

g はの双対基底となる。このことから上記定義の中のは

と表示されることになる。 g に関して級であるとは、各係数が g の関数として級のときをいう。

微分形式 p66

は多重線形である。すなわち、任意の α について線形性の条件

$$\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, aX_i + bX'_i, X_{i+1}, \dots, X_k) = a\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + b\omega(X_1, \dots, X'_i, \dots, X_k)$$

をみたす。

上記二つの条件をみたす写像を上 k 次の交代形式と呼ぶことにする。

p270

定義 19 V を R 上の m 次元ベクトル空間とする。 V 上の k 次形式 (正確には、 k 次の多重線型形式) とは、 V の k 個の直積から R への写像

$$\omega : V \times V \times \cdots \times V \rightarrow R$$

であって、 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ が各 X_i に関して線型であるようなものを言う。

たとえば、 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ が第 1 の変数 X_1 に関して線型であるというのは、任意の $X, Y \in V$ と任意の実数 $a, b \in R$ について、

$$\omega(aX + bY, X_2, \dots, X_k) = a\omega(X, X_2, \dots, X_k) + b\omega(Y, X_2, \dots, X_k) \quad \{\text{森}\}$$

がなりたつことである。。。

p281

定義 級多様体 M 上のテンソル場が k 次交代テンソル場であるとは、 M の各点 p において、 $T_p(M)$ 上の交代 k 次形式になっていることである。 k 次の交代テンソル場のことを、ふつう、 k 次微分形式という。

p281

微分形式 ω が C^s 級であるとは、 U 上で C^s 級 $\{ \}$ にな

{ p290 }

m 次元 C 級多様体 M 上の $(C$ 級) k 次微分形式

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$[\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} f_{i_1 \dots i_k}(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m)) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}]$$

ω の外微分とは、次の式で定義される $k+1$ 次微分形式 $d\omega$ のことである。

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$[d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \sum_j \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j}(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m)) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}]$$

例 1 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \\ \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \\
&= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\
&\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} f_{i_1 i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \{f_{1i_2} dx_1 \wedge dx_{i_2} + f_{2i_2} dx_2 \wedge dx_{i_2} + f_{3i_2} dx_3 \wedge dx_{i_2}\} \\
&= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{21} dx_2 \wedge dx_1 + f_{22} dx_2 \wedge dx_2 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{31} dx_3 \wedge dx_1 + f_{32} dx_3 \wedge dx_2 + f_{33} dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \{f_{23} - f_{32}\} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \{f_{31} - f_{13}\} dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \\
d\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \frac{\partial f_{i_1 i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \left\{ \frac{\partial f_{1i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{2i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{3i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_{i_2} \right\} \\
&= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \{f_{23} - f_{32}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \{f_{31} - f_{13}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
d\omega &= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{22}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \left[+ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] \\
& + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \left[+ \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{33}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_3 \right]
\end{aligned}$$

記号

$$v_\mu = c_{\mu 1} e_1 + \cdots + c_{\mu n} e_n \quad \{\text{村上}\}$$

とすれば

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_p) = \sum_{i_1=1}^n c_{1i_1} \omega(e_{i_1}, v_2, \dots, v_p) \quad \{\text{村上}\}$$

$$\omega(v_1, \dots, v_p) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) (\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p})(v_1, \dots, v_p)$$

{ p290 }

m 次元 C 級多様体 M 上の (C 級)k 次微分形式

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$[\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} f_{i_1 \dots i_k} (\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m)) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}]$$

ω の外微分とは、次の式で定義される $k+1$ 次微分形式 $d\omega$ のことである。

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$[d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \sum_j \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} (\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m)) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}]$$

例 1 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \\ d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \right] \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1} f_{i_1} dx_{i_1} \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i_1} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \\
&= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\
&\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} f_{i_1 i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \{f_{1i_2} dx_1 \wedge dx_{i_2} + f_{2i_2} dx_2 \wedge dx_{i_2} + f_{3i_2} dx_3 \wedge dx_{i_2}\} \\
&= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{21} dx_2 \wedge dx_1 + f_{22} dx_2 \wedge dx_2 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + f_{31} dx_3 \wedge dx_1 + f_{32} dx_3 \wedge dx_2 + f_{33} dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \{f_{23} - f_{32}\} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \{f_{31} - f_{13}\} dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \\
d\omega &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \frac{\partial f_{i_1 i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \\
&= \sum_{i_2} \left\{ \frac{\partial f_{1i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{2i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_{i_2} + \frac{\partial f_{3i_2}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_{i_2} \right\} \\
&= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_3 \wedge dx_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \{f_{23} - f_{32}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \{f_{31} - f_{13}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \{f_{12} - f_{21}\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
d\omega &= \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_1 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{22}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \left[+ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \left[+ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \right] \\
& + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \left[+ \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \right] \\
& \left[+ \frac{\partial f_{33}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_3 \right]
\end{aligned}$$

記号

多様体 p68

$$X_1 = \sum_{j=1}^n f_1^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\omega(X_1, \dots, X_p)(x) = \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n f_1^{j_1}(x) f_p^{j_p}(x) \omega_x \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_p}} \right)_x \right)$$

微分形式の幾何学 p61

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

を R^n 上の k 次の微分形式、。上記を簡単に、 $f_I(x)$ と記す場合もある。

外微分とは、つぎのように定義される線形写像

$$d : A^k(R^n) \rightarrow A^{k+1}(R^n)$$

のことである。すなわち $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ に対して

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

30p212

k 次の微分形式

30p213

外微分

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

5.4.1 { p153 }

定義 5.4 (0,r) 型の反対称テンソルを r 次微分形式、あるいは r -形式という。

pM における r -形式全体からなるベクトル空間を (M) で表せば、任意の元は

$$\omega = \frac{1}{r!} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

と表される。

5.4.2 { p155 }

定義 5.5 外微分 d_r は写像で、その r -形式

$$\omega = \frac{1}{r!} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

への作用は

$$d_r \omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} f_{i_1 \dots i_r} \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

で定義される。。

{ P290 }

m 次元級多様体 M 上の $()k$ 次微分形式を座標近傍 $(U; x_1, x_2, \dots, x_m)$ 上で局所座標表示したものが

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

であったとする。

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

幾何学 3

n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上で $1 \leq p \leq n$ に対して微分 p 形式を定義するために、。

定義 () n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の連続関数に対して、 $d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} df_{i_1 \dots i_p} \wedge$

$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ を、 U 上の微分形式と呼ぶ。

定義 ()

$$d\left(\sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}\right) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} df_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad \text{ここでは全微分である。}$$

微分位相 p35

$$\sum_{h_1} \dots \sum_{h_p} a_{h_1 \dots h_p} dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_p}$$

$$du \wedge du = 0, \quad dv \wedge dv = 0, \quad du \wedge dv = -dv \wedge du$$

次に外微分 d を

0 次微分形式 (f) に対しては

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

1 次微分形式 $= f du + g dv$ に対しては

$$= df \wedge du + dg \wedge dv$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv$$

2 次微分形式 $= f du \wedge dv$ に対しては

$$= df \wedge du \wedge dv$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du \wedge dv = 0$$

と定義する。

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

例 1 次微分形式

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3 \\ &= 0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + 0 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + 0 \end{aligned}$$

2 次微分形式

$$\begin{aligned} \omega &= [f_{11} dx_1 \wedge dx_1] + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{21} dx_2 \wedge dx_1] + [f_{22} dx_2 \wedge dx_2] + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + [f_{31} dx_3 \wedge dx_1] + [f_{32} dx_3 \wedge dx_2] + [f_{33} dx_3 \wedge dx_3] \\ &= f_{23} dx_2 \wedge dx_3 - f_{13} dx_3 \wedge dx_1 + f_{12} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left\{ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \right\} \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

{ P290 }

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

ストークスの定理 { P305 }

定理 { ストークスの定理 }

$$\int_N d\eta = \int_{\partial N} \eta$$

証明

$$\eta = \sum_{i=1}^m g_i dx_1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}_i \wedge \cdots \wedge dx_m$$

$d\hat{x}_i$ は dx_i を除くことを表わす。

$$d\eta = \sum_{i=1}^m \{-1\}^{i-1} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_m$$

。により、

$$\begin{aligned} \int_N d\eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \cdots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_m) dx_1 \cdots dx_m \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \int_0^a \cdots \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \cdots, x_m) dx_1 \cdots dx_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{-1\}^{1-1} \int_0^a \cdots \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_m) dx_1 \cdots dx_m \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \cdots \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_1, \cdots, x_m) dx_m dx_1 \cdots \\ &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \cdots \{g_1(a, \cdots, x_m) - g_1(0, \cdots, x_m)\} \cdots dx_m \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \cdots \int_0^a \{g_m(x_1, \cdots, a) - g_m(x_1, \cdots, 0)\} dx_1 \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial N} \eta &= \{-1\}^{1-1} \int_0^a \cdots g_1(a, \cdots, x_m) \cdots dx_m - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \cdots g_1(0, \cdots, x_m) \cdots dx_m \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \{-1\}^{m-1} \cdots \int_0^a g_m(x_1, \cdots, a) dx_1 \cdots - \{-1\}^{m-1} \cdots \int_0^a g_m(x_1, \cdots, 0) dx_1 \cdots \end{aligned}$$

[次のページへ続く。]

例

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(a, x_2) dx_2 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a g_1(0, x_2) dx_2 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, a) dx_1 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a g_2(x_1, 0) dx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial g_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
= & \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(a, x_2, x_3) dx_2 dx_3 - \{-1\}^{1-1} \int_0^a \int_0^a g_1(0, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \\
& + \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, a, x_3) dx_1 dx_3 - \{-1\}^{2-1} \int_0^a \int_0^a g_2(x_1, 0, x_3) dx_1 dx_3 \\
& + \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, a) dx_1 dx_2 - \{-1\}^{3-1} \int_0^a \int_0^a g_3(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

{ 微分幾何 P124 }

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right\} du dv \\ &= \int_0^b \int_0^a \frac{\partial g}{\partial u} du dv - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial f}{\partial v} dv du \\ &= \int_0^b [g(a, v) - g(0, v)] dv - \int_0^a [f(u, b) - f(u, 0)] du \end{aligned}$$