

座標近傍、局所座標系、局所座標 {多様体の基礎 p37~}{多様体入門 p24}

定義6 位相空間  $X$  の開集合  $U$  から  $\mathbb{R}^m$  のある開集合  $U'$  への同相写像  $\varphi$

$$\varphi: U \rightarrow U'$$

があるとき  $\varphi$  を  $U$  上の 座標近傍 といい  $\varphi$  を  $U$  上の 局所座標系 という。

$U$  内の任意の点  $p$  に対し  $\varphi(p)$  は  $\mathbb{R}^m$  の点であるから  $\mathbb{R}^m$  の座標を用いて

$$\varphi(p) = (x^1, x^2, \dots, x^m)$$

$$[(x^1(p), x^2(p), \dots, x^m(p))]$$

と書ける。  $(x^1, x^2, \dots, x^m)$  を、  $(U, \varphi)$  に関する  $p$  の 局所座標 という。

$C^r$  級微分可能多様体、座標近傍系 { 多様体の基礎 p39 ~ } { 多様体入門 p24 ~ }

共通部分  $U \cap V$  に属する点  $p$  の位置は、2組の局所座標 { 38 } で表わされる。すなわち、 $p$  は  $(U, \varphi)$  に関する局所座標  $(x^1, x^2, \dots, x^m)$  で表わされ、同時に  $(V, \psi)$  に関する局所座標  $(y^1, y^2, \dots, y^m)$  でも表わされる { }。

、点  $(x^1, x^2, \dots, x^m)$  を  $\varphi$  の逆写像 { }  $\varphi^{-1}$  で  $U \cap V$  に戻せばもとの  $p$  になり { s }、そのをでうつせばなる。したがって、

$$(y^1, y^2, \dots, y^m) = \psi(\varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^m)) \quad \{ s \}$$

$$[(x_\beta^1(\varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)), \dots, x_\beta^m(\varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)))]$$

がなりたつ。

式から、との合成写像

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

$$(x^1, \dots, x^m) \mapsto (y^1, \dots, y^m)$$

が、 $p$  の2つの局所座標 { 38 } { s }  $(x^1, \dots, x^m)$  と  $(y^1, \dots, y^m)$  の関係を表わしていることがわかる { s }

定義 の同相写像  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  を、からへの座標変換とよぶ。

定義 6  $r \geq 1$  を自然数または  $\infty$  とする。位相空間  $M$  が次の条件 (1)(2)(3) をみたすとき、 $M$  を  $m$  次元  $C^r$  級微分可能多様体 という { s }

(1)  $M$  はハウスドルフ空間である。

(2)  $M$  は  $m$  次元の座標近傍 { 37 } により被覆される。すなわち、 $M$  の  $m$  次元座標近傍からなる族  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  があって

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

がなりたつ ( $A$  は適当な添え字集合である { s })。

(3)  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  であるような任意の  $\alpha, \beta \in A$  について { s } 座標変換 { p }

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

は  $C^r$  級写像である。

$C^r$  級微分可能多様体を以後簡単に  $C^r$  級多様体とよぶことにする { s } はじめの条件により、級多様体は位相多様体にもなっている。

条件 (2) を満たす座標近傍の族  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  を座標近傍系 { } またはといい、などの記号で表わす：

例

$$\begin{bmatrix} p_\alpha^1(x_\alpha^1, x_\alpha^2) \\ p_\alpha^2(x_\alpha^1, x_\alpha^2) \\ p_\alpha^3(x_\alpha^1, x_\alpha^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin x_\alpha^1 \cos x_\alpha^2 \\ \sin x_\alpha^1 \sin x_\alpha^2 \\ \cos x_\alpha^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_\alpha^1(p^1, p^2, p^3) \\ x_\alpha^2(p^1, p^2, p^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\{p^1\}^2 + \{p^2\}^2}}{p^3} \\ \tan^{-1} \frac{p^2}{p^1} \end{bmatrix}$$

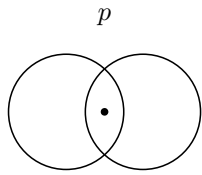
$$\begin{bmatrix} p_{\beta}^1(x_{\beta}^1, x_{\beta}^2) \\ p_{\beta}^2(x_{\beta}^1, x_{\beta}^2) \\ p_{\beta}^3(x_{\beta}^1, x_{\beta}^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x_{\beta}^1 \\ \sin x_{\beta}^1 \cos x_{\beta}^2 \\ \sin x_{\beta}^1 \sin x_{\beta}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

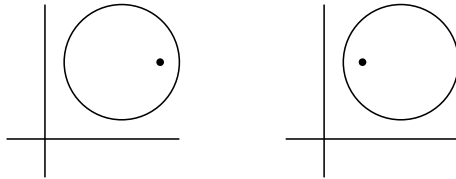
$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

$M$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \sin x_{\alpha}^1 \cos x_{\alpha}^2 \\ \sin x_{\alpha}^1 \sin x_{\alpha}^2 \\ \cos x_{\alpha}^1 \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 < x_{\alpha}^1 < \pi \\ 0 < x_{\alpha}^2 < 2\pi \end{matrix} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} \cos x_{\beta}^1 \\ \sin x_{\beta}^1 \cos x_{\beta}^2 \\ \sin x_{\beta}^1 \sin x_{\beta}^2 \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 < x_{\beta}^1 < \pi \\ 0 < x_{\beta}^2 < 2\pi \end{matrix} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \sin z_1 \sin z_2 \\ 1 \cos z_1 \\ 1 \sin z_1 \cos z_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 < z_1 < \pi \\ 0 < z_2 < \pi \end{matrix} \right\}$$



$$\psi_{\alpha}(p) = (x_{\alpha}^1(p),,x_{\alpha}^n(p)) \quad \psi_{\beta}(p) = (x_{\beta}^1(p),,x_{\beta}^n(p))$$



$$\left[ \begin{array}{c} x_{\beta}{}^1(\boldsymbol{p}_{\alpha}(x_{\alpha}{}^1, \cdots, x_{\alpha}{}^m)) \\ \vdots \\ x_{\beta}{}^m(\boldsymbol{p}_{\alpha}(x_{\alpha}{}^1, \cdots, x_{\alpha}{}^m)) \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} x^1(U) \\ x^2(U) \\ \vdots \\ x^m(U) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^1(p) \\ x^2(p) \\ \vdots \\ x^m(p) \end{bmatrix}$$



入門 p24

$n$  次元位相多様体  $M$  の開集合  $U$  が  $R^n$  の開集合  $E$  と同相であるとき、 $U$  から  $E$  への同相写像  $\psi$  と  $U$  を一組にしたものを  $(U, \psi)$  を  $M$  の座標近傍とよぶ。  $p$  を  $U$  の点とすると  $\psi(p)$  は  $R^n$  の点であるから、  $\psi(p)$  は  $n$  個の実数の組である。  $\psi(p)$  の第  $i$  番目の座標を  $x^i(p)$  であらわすと、  $\psi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$  となる。 は連続だから、各  $i$  で定義された実数値連続関数である。さらには 1:1 であるから、すなわち  $U$  の点  $p$  は  $n$  個の実数の組  $(x^1(p), \dots, x^n(p))$  によってきまる。  $(x^1(p), \dots, x^n(p))$  を座標近傍  $(U, \psi)$  における  $U$  の点  $p$  の局所座標とよび、  $U$  上の  $n$  個の関数の組  $(x^1, \dots, x^n)$  を  $(U, \psi)$  における局所座標系とよぶ。すなわちである。

5.1.2 { 理論 p129 }

定義 5.1M は以下の条件を満たすとき、次元微分多様体であるという。

$M$  は位相空間である。

$M$  には対の族  $\{(U, \varphi)\}$  が与えられている。

$M$  を被覆する開集合族である。すなわち、  $M$  は  $\{(U, \varphi)\}$  から  $M$  への無限階微分可能な写像である。

対  $(U_i, \varphi_i)$  をチャートといい、部分集合  $U_i$  を座標近傍、  $\varphi_i$  を座標関数あるいは単に座標とよぶ。  $\varphi_i$  は  $m$  個の関数  $\{x^1(p), \dots, x^m(p)\}$  で表される。組  $\{x^\mu(p)\}$  を座標とよぶこともある。

幾何学 p45

定義 3.1.1

を局所座標あるいは座標近傍、その集まりを局所座標系あるいは座標近傍系、を座標変換と呼ぶ。

多様体 p7

座標近傍。

$x \in U$  のとき

$$\psi(x) = (x^1, \dots, x^n) \in$$

とおくならば、  $x^1, \dots, x^n$  は  $x$  の関数である。局所座標系

多様体入門 p ~ 27

さて  $M$  は次元位相多様体であるから、 $M$  はの開集合と同相ないくつかの開集合  $\{ \}$  で覆われる。ここで開集合の添え字の集合を  $A$  で表わしてをとかく。座標近傍  $\{ U_\alpha \}$  のあつまり  $\{ (, ) \}$  を  $M$  の座標近傍系、との共通集合が空集合でなければ、の各点では二とおりの座標系とが定義されている。

の逆写像はからへの同相写像を、 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  から  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  への写像を  $f_{\beta\alpha}$  とする、 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  の任意の点  $u$  にたいして

$$f_{\beta\alpha}(u) = \psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(u))$$

となる。 $u$  の座標を  $(u^1, \dots, u^n)$ 、 $f_{\beta\alpha}(u)$  の座標を  $(f_{\beta\alpha}^1(u^1, \dots, u^n), \dots, f_{\beta\alpha}^n(u^1, \dots, u^n))$  [ 松本の記号]

さてとすれば  $(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p)) = \psi_\alpha(p)$ 、 $(x_\beta^1(p), \dots, x_\beta^n(p)) = \psi_\beta(p)$

$$x_\beta^i = f_{\beta\alpha}^i(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$$

これはで定義される二つの局所座標系  $(, )$  の間の変換式である。

定義  $n$  次元位相多様体  $M$  の座標近傍系  $\{ U_\alpha \}$  が次の性質をもつとき、 $S$  を  $M$  の  $C^r$  級座標近傍系とよぶ：が空集合でないような任意の  $\alpha, \beta$  にたいして、およびにおける局所座標系間の変換をきめる変数の関数  $f_{\beta\alpha}^i$  がそれぞれおよびにおいて回  $(r)$  連続微分可能である。

定義 2.  $n$  次元位相多様体  $M$  が  $C^r$  級座標近傍系  $\{ U_\alpha \}$  をもつとき、 $M$  を  $n$  次元  $C^r$  級可微分多様体、または  $C^r$  多様体とよぶ。

### 5.1.2 { p129 }

定義 5.1  $M$  は以下の条件を満たすとき、 $m$  次元微分多様体であるという。

(1)  $M$  は位相空間である。

(2)  $M$  には対の族  $\{ (U_i, \varphi_i) \}$  が与えられている。

(3)  $\{ U_i \}$  は  $M$  を被覆する開集合族である。すなわち  $\bigcup_i U_i = M$ 。はからへの無限階微分可能な写像である。

(4)  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  を満たすが与えられたとき、 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  は  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  から  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  への無限階微分可能な写像である。

$$\begin{bmatrix} x_i^1(p_j()) \\ \vdots \\ x_i^m(p_j()) \end{bmatrix}$$

対  $(U_i, \varphi_i)$  をチャートといい、全体の族  $\{ (U_i, \varphi_i) \}$  をアトラスという。 $\varphi_i$  は  $m$  個の関数  $\{ x^1(p), \dots, x^m(p) \}$  で表される。複数の座標系を用いない場合は、座標が  $\{ x^1, \dots, x^m \}$  である点を  $(x^1, \dots, x^m)$  単に点  $x$  とかくことがある。

からへの座標変換  $x^i = x^i(y)$  は  $m$  変数の  $m$  個の関数で与えられる。その座標変換関数は、写像として具体的に書き下せる。

幾何学



定義  $M$  が  $n$  次元微分可能多様体であるとは、 $M$  がハウスドルフ空間であり、次のような近傍と、から  $n$  次元ユークリッド空間の開集合への同相写像  $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$  が存在することである。 $\bigcup_i U_i = M, U_i \cap U_j \neq \emptyset$  のとき、

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

が級である。

多様体 p7

定義 可微分多様体、多様体

{ 多様体の基礎 p37 }

定義 6 位相空間  $X$  の開集合  $U$  から、 $m$  次元数空間  $\mathbb{R}^m$  のある開集合  $U'$  への同相写像

$$\varphi : U \rightarrow U'$$

があるとき、 $U$  と  $\varphi$  の対  $(U, \varphi)$  を  $m$  次元座標近傍とい

$$\varphi(p) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(p) \\ \varphi_2(p) \\ \vdots \\ \varphi_m(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$[\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m) = p]$$

曲線と曲面の微分幾何 p47

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

点  $p(a, b)$  におけるこの曲線の速度ベクトルは

$$p_u(a, b), \quad p_u = \frac{\partial p}{\partial u}$$

いま、曲面上の点  $p_0 = p(u_0, v_0)$  を 1 つ固定

30 講 p204

とを対にして、 $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$  を局所座標と

$$\psi_\alpha(x) = (x_\alpha^1, x_\alpha^2, \dots, x_\alpha^n)$$

記号

$\psi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$  となる。

$$\begin{bmatrix} x^1(\boldsymbol{p}) \\ x^2(\boldsymbol{p}) \\ \vdots \\ x^n(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix}$$

点  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  を  $\varphi$  の逆写像  $\varphi^{-1}$  で  $U \cap V$  に戻せばもとの  $p$  になり、その  $p$  を  $\psi$  でうつせば  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  になる。したがって、

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) = \psi(\varphi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_m)) \quad (6.1)$$

がなりたつ。

(6.1) 式から、 $\psi$  と  $\varphi^{-1}$  の合成写像

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad (6.2)$$

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (y_1, \dots, y_m)$$

が、

定義 (6.2) の同相写像を、 $\varphi$  から  $\psi$  への座標変換とよぶ。

$$y_1 = y_1(x_1, \dots, x_m)$$

$$y_2 = y_2(x_1, \dots, x_m)$$

$$y_m = y_m(x_1, \dots, x_m)$$

このような関数関係が座標変換である。

$$[(x_\beta^1(), x_\beta^2(), \dots, x_\beta^m()) = \psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \dots, x_\alpha^m))]$$

$$[x_\beta^1(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)]$$

$$[x_\beta^2(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)]$$

$$[x_\beta^m(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)]$$



曲線と曲面の微分幾何 p47

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

点  $p(a, b)$  におけるこの曲線の速度ベクトルは

$$p_u(a, b), \quad (\text{ただし } p_u = \frac{\partial p}{\partial u})$$

多様体の基礎 p1

球面上にまっすぐな直交座標系は描けない。しかし、曲がった'曲線座標系'なら描くことができる。この座標系を球面上でどんどん伸ばして行くと、遂には座標軸同士が球面の裏側でぶつかり合ってしまう面倒なことになる。、球面上のごく限られた領域の内部に曲線座標系が描いてあるのである。

空間の限られた範囲に描かれた座標系を局所座標系という。

多様体とは、どこでも好きな所に局所座標系が描けるような空間である。

多様体の基礎 p39 ~

見やすくするために  $U$  と  $V$  は別々の  $R^m$  に入れてある。

、点  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  を  $\varphi$  の逆写像  $\varphi^{-1}$  で戻せばもとの  $p$  になり、その  $p$  を  $\psi$  でうつせば  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  になる。したがって

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) = \psi(\varphi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_m))$$

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

p58

二つの函数がをみたすとき、とは合成可能であるといい、

$$h(x) = g(f(x))$$

で定義される函数を、との合成函数といい、 $h = g \circ f$  と記す。

{ 多様体の基礎 p42 }

定義 6 位相空間  $M$  が次の条件 (1)(2)(3) をみたすとき、 $M$  を  $m$  次元  $C^r$  級微分可能多様体という。

{1}  $M$  はハウスドルフ空間である。

{2}  $M$  は  $m$  次元の座標近傍により被覆される。すなわち、 $m$  次元座標近傍からなる族  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  があって

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

がなりたつ。

{3}  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  であるような任意のについて、

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

は  $C^r$  級写像である。

30 講 p206

局所座標の変換則が  $C$ -級であるような位相多様体を、 $C$ -級の多様体これからは、級の多様体のことを、単に多様体ということにする。

微分・位相幾何 P55

定義 空間  $M$  は、 $n$  次元微分可能多様体である。

(1)

(2)

(3)  $M$  を覆う、

(4)

(5)  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  となるに対して、 $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  から  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  への写像  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  は無限回微分可能である。

座標近傍

記号

、点  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  を  $\varphi$  の逆写像  $\varphi^{-1}$  で戻せばもとの  $p$  になり、その  $p$  を  $\psi$  でうつせば  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  になる。したがって

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) = \psi(\varphi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_m)) \quad (\text{基礎 6.1})$$

$$[y_1(\mathbf{p}(x_1, x_2, \dots, x_m))]$$

(6.1) 式から、 $\psi$  と  $\varphi^{-1}$  の合成写像

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad (\text{基礎 6.2})$$

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (y_1, \dots, y_m)$$

が、

$$y_1 = y_1(x_1, \dots, x_m) \quad (\text{基礎 6.4})$$

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (\text{基礎})$$

$$[(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m) \mapsto (x_\beta^1, \dots, x_\beta^m)]$$

$$\psi \circ \varphi^{-1}(\mathbf{x}) = (y_1(\varphi^{-1}(\mathbf{x})), \dots, y_m(\varphi^{-1}(\mathbf{x})))$$

$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  から  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  への写像を  $f_{\beta\alpha}$  とする。、 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  の任意の点  $u$  にたいして

$$f_{\beta\alpha}(u) = \psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(u)) \quad (\text{入門 1})$$

となる。 $u$  の座標を  $(u^1, \dots, u^n)$ 、 $f_{\beta\alpha}(u)$  の座標を  $(f_{\beta\alpha}^1(u^1, \dots, u^n), \dots, f_{\beta\alpha}^n(u^1, \dots, u^n))$

$(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p)) = \psi_\alpha(p)$ 、 $(x_\beta^1(p), \dots, x_\beta^n(p)) = \psi_\beta(p)$ 、(1) において  $u = \psi_\alpha(p)$  とおくと、

$$[\psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(u)) = (x_\beta^1(\psi_\alpha^{-1}(u)), \dots, x_\beta^n(\psi_\alpha^{-1}(u))) = (x_\beta^1(\psi_\alpha^{-1}(u^1, \dots, u^n)), \dots, x_\beta^n(\psi_\alpha^{-1}(u^1, \dots, u^n)))]$$

$$[\psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(\psi_\alpha(p))) = (x_\beta^1(\psi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p))), \dots, x_\beta^n(\psi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p))))]$$

$$[\varphi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \mathbf{p}]$$

$$= \begin{bmatrix} x_\beta^1(\psi_\alpha^{-1}(u)) \\ \vdots \\ x_\beta^n(\psi_\alpha^{-1}(u)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\beta^1(\psi_\alpha^{-1}(u^1, \dots, u^n)) \\ \vdots \\ x_\beta^n(\psi_\alpha^{-1}(u^1, \dots, u^n)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_\beta^1(\psi_\alpha^{-1}(\psi_\alpha(p))) \\ \vdots \\ x_\beta^n(\psi_\alpha^{-1}(\psi_\alpha(p))) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\beta^1(\psi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p))) \\ \vdots \\ x_\beta^n(\psi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p))) \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (\text{曲線 2.1})$$

点  $\mathbf{p}(a, b)$  におけるこの曲線の速度ベクトルは

$$\mathbf{p}_u(a, b), \quad (\text{ただし } \mathbf{p}_u = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u})$$

$$\begin{bmatrix} x_\beta^1(\mathbf{p}_\alpha(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)) \\ \vdots \\ x_\beta^n(\mathbf{p}_\alpha(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)) \end{bmatrix}$$





座標近傍の定義 { P37 } { 30 講 P205 }

定義 6  $m$  次元数空間  $R^m$  のある開集合  $U$  から、位相空間  $X$  の開集合  $U'$  への同相写像

$$\vec{p}(U)$$

があるとき、との対を  $m$  次元座標近傍とい

多様体の定義 { P42 } { 30 講 }

定義 6 位相空間  $M$  が次の条件 { 1 } { 2 } { 3 } をみたすとき、 $M$  を  $m$  次元  $C^r$  級多様体という。

{ 1 }

{ 2 }  $m$  次元座標近傍 { } からなる族があつて

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} p_{\alpha}(U_{\alpha})$$

がなりたつ。

{ 3 }

例

$M$

=

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \sin x_1 \cos x_2 \\ 1 \sin x_1 \sin x_2 \\ 1 \cos x_1 \end{array} \right] \middle| \begin{array}{l} 0 < x_1 < \pi \\ 0 < x_2 < 2\pi \end{array} \right\} \cup \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \cos y_1 \\ 1 \sin y_1 \cos y_2 \\ 1 \sin y_1 \sin y_2 \end{array} \right] \middle| \begin{array}{l} 0 < y_1 < \pi \\ 0 < y_2 < 2\pi \end{array} \right\} \cup \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \sin z_1 \sin z_2 \\ 1 \cos z_1 \\ 1 \sin z_1 \cos z_2 \end{array} \right] \middle| \begin{array}{l} 0 < z_1 < \pi \\ 0 < z_2 < \pi \end{array} \right\}$$

{ P37 }

定義 6  $m$  次元数空間  $R^m$  のある開集合  $U$  から、位相空間  $X$  の開集合  $U'$  への同相写像

$$\vec{p}(U)$$

があるとき、との対を  $m$  次元座標近傍とい

多様体の定義 { P42 }

定義 6 位相空間  $M$  が次の条件 { 1 } { 2 } { 3 } をみたすとき、 $M$  を  $m$  次元  $C^r$  級多様体という。

{ 1 }

{ 2 }  $m$  次元座標近傍からなる族があって

$$M = \vec{p}_1(U_1) \cup \cdots \cup \vec{p}_\beta(U_\beta)$$

がなりたつ。

{ 3 }

例

$M$

$$= \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \sin x_1 \cos x_2 \\ 1 \sin x_1 \sin x_2 \\ 1 \cos x_1 \end{array} \right] \middle| \begin{array}{l} 0 < x_1 < \pi \\ 0 < x_2 < 2\pi \end{array} \right\} \cup \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \cos y_1 \\ 1 \sin y_1 \cos y_2 \\ 1 \sin y_1 \sin y_2 \end{array} \right] \middle| \begin{array}{l} 0 < y_1 < \pi \\ 0 < y_2 < 2\pi \end{array} \right\} \cup \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \sin z_1 \sin z_2 \\ 1 \cos z_1 \\ 1 \sin z_1 \cos z_2 \end{array} \right] \middle| \begin{array}{l} 0 < z_1 < \pi \\ 0 < z_2 < \pi \end{array} \right\}$$