

接ベクトル空間、接ベクトル { 多様体の基礎 p77 ~ } { }

M を m 次元 C^r 級多様体 { 42 } とする { s } の点を固定し、を通る級曲線を考える。。。。。

点 p の開近傍 U で定義された任意の C^r 級関数 f を考える。 $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ との合成関数を作ると、これは c を変数とする級関数になる。。。。重要なことは、 f が、のまわりの局所座標系に無関係に、とだけで決まる変数関数だということである。実際、 f は、写像の合成

によって定義されるから、局所座標系に無関係なのである。

次に、関数 f の、における通常の微分係数

を考える。これはひとつの実数である。しかも、もとの関数 $f(c(t))$ が局所座標系に無関係だから、この微分係数も局所座標系に無関係に、 f と c だけで決まる数である。

関数 f への微分係数を対応させる対応

$$f \mapsto \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

のことを、記号

$$v_c$$

で表わすことにする。すると、の値は、簡単に

で表わされる。

定義 点 p における方向微分 v とは、 p の開近傍で定義された C^r 級関数 f に実数 $v(f)$ を対応させる操作であって { s } 次の (0)(1)(2) の性質をもつものである。

(0) v が点の十分小さな開近傍上で一致すれば、

(1) $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$ 。ここに $a, b \in R$ であり、 f, g は p の開近傍で定義された任意の C^r 級関数。

(2) $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$

例 p を含む座標近傍 { 37 } $(U; x^1, x^2, \dots, x^m)$ をひとつ固定する { } p のまわりで定義された C^r 級関数 f に、 p における x^i 方向の偏微分係数

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \in R$$

を対応させる操作を $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$ と書こう。すなわち

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad \{ s \}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i} f(\varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^m)) \right]$$

このとき、 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$ は、 p における方向微分の性質 () () () を持つ { s } 。

実際、の値は、の開近傍上での値できまり、しかも
がなりたつからである。

{ }、いま、点 p における () 方向微分 { } 全ての集合を考え { } それを

$$D_p^r(M)$$

と表わすことにする。.....}

命題 $D_p^r(M)$ は R 上のベクトル空間 { 10 } である。

証明 ベクトル空間の公理を確かめればよい。

の 2 元 u, v に対し、和 $u + v$ を次の式で定義する。

$$(u + v)(f) := u(f) + v(f)$$

$u + v$ がまたひとつの方向微分になることを見よう { }。定義の条件は、が両方とも条件をみたすことから明らかである。として、

これで方向微分の満たすべき条件が言えた。また

$$(u + v)(fg) :=$$

$$= (u + v)(f)g(p) + f(p)(u + v)(g)$$

これで方向微分の条件も言えた。よって、である。

次に、実数 a と、の元 v に対し、 v の a 倍 av を次の式で定義しよう。

$$(av)(f) := a(v(f))$$

av がまた方向微分になることが上と同様に証明される { }

こうして集合に和と実数倍が定まった。それらが定義で述べたベクトル空間の条件を満たすことは容易にわかる。よって、 $D_p^r(M)$ は R 上のベクトル空間である { ? }

{ $D_p^r(M)$ の 'ゼロベクトル' は、任意の f に 0 を対応させる自明な方向微分 0 である。 }

命題 8.2 ベクトル空間 $D_p^r(M)$ の元として、 m 個のベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$ は 1 次独立 { 12 } である { s }

証明 次の条件を確かめればよい。

ならば (ここに a_1, a_2, \dots, a_m は実数)

実際、 $a^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + a^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p + \dots + a^m \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p = 0$ と仮定してみよう { s }。方向微分の和と実数倍の定義とにより、点のまわりで定義された任意の級関数について

がなりたつ。の定義は

であった。したがって、は

$$a^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}(p) + a^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}(p) + \dots + a^m \frac{\partial f}{\partial x^m}(p) = 0 \quad (8.13)$$

と同じである。

f は任意であったから、 $f = x^1$ という関数を考えてみる。これを (8.13) に代入すると、 $\frac{\partial x^1}{\partial x^1} = 1, \frac{\partial x^1}{\partial x^i} = 0 (i \geq 2)$ であるから、(8.13) の最初の項のみが a^1 となって残り、他の項は消える。これから、 $a^1 = 0$ がわかる。

同様に、をに代入すると、第項のみがとなって残り、あとは消える。これからがわかる。

こうして、 $f = x^3, \dots, f = x^m$ と次々に代入して $a^3 = \dots = a^m = 0$ が示される。

これで条件が確かめられた。

定義 8 m 個のベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$ の張る $D_p^r(M)$ の部分ベクトル空間を、点 p における M の 接ベクトル空間 とよび { s }

$$T_p(M)$$

という記号で表わす {sn}。 $T_p(M)$ に属するベクトルを、点 p における M の 接ベクトル という {島}

この定義によれば、点 p における M の接ベクトルとは

$$v = a^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + a^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p + \cdots + a^m \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p \quad (a^1, a^2, \dots, a^m \in R) \quad \{sn\}$$

という 1 次結合の形をした方向微分 v のことである。とくに、自身も、点における接ベクトルである。

命題 8.2 により、は次独立であるから、接ベクトル空間 { } $T_p(M)$ の次元 { 13 } はちょうど m である {s} すなわち、は、考えている多様体と同次元である {n} $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p$ という m 個のベクトルが $T_p(M)$ の基底 { 13 } になっている {sn}。

点のまわりで定義された任意の級関数について、次の変換公式がなりたつ*。

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial f}{\partial y^j}(p)$$

方向微分の記号を使って書くと

となる。 f は任意であったから、方向微分の間の等式としてを得る。

の右辺の係数を単なる実数と思うと、この式は、任意のについて、方向微分が、の 1 次結合で表わされるということを意味している。

したがって、は、の張るベクトル空間に属している。

との役割を入れ換えて同じ議論をすれば、逆に、 $\left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^m} \right)_p$ が $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p$ の張るベクトル空間に属していることも証明される。

命題 点 p のまわりに 2 つの局所座標系 { 37 } $(x^1, x^2, \dots, x^m), (y^1, y^2, \dots, y^m)$ があると {s} それに応じて、 $T_p(M)$ の中に 2 組の基底 { }

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y^2} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^m} \right)_p \right\rangle$$

が定まる {s}。それらの間には次の関係式がなりたつ {s}

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \{s\}$$

命題 はの元である。すなわち接ベクトルである。

関数 f と曲線 c を座標表示したものが、それぞれ

$$f(x^1, x^2, \dots, x^m), \quad (x^1(t), \dots, x^m(t))$$

であったとすると、は

$$\begin{aligned} v_c(f) &= \frac{d}{dt} f(x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t))|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{dx^i}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \end{aligned}$$

$$\left[\sum_{i=1}^m \frac{d}{dt} x^i(c(0)) \frac{\partial}{\partial x^i} f(\varphi^{-1}(x^1(c(0)), x^2(c(0)), \dots, x^m(c(0)))) \right]$$

と計算される。f は任意であったから、から方向微分としての等式

$$v_c = \sum_{i=1}^m \frac{dx^i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \quad \{sn\}$$

を得る。。。。

、 v_c は局所座標系 $\{ \quad 37 \}$ のとり方によらず $\{s\}$ c のみで決まる接ベクトルである。

曲線 c_i を

$$c_i(t) := (a^1, \dots, a^{i-1}, a^i + t, a^{i+1}, \dots, a^m)$$

と定義しよう。

c_i の座標表示 $= (x^1(t), \dots, x^i(t), \dots, x^m(t))$ は、

$$\frac{dx^1}{dt}(0) = 0, \dots, \frac{dx^i}{dt}(0) = 1, \dots, \frac{dx^m}{dt}(0) = 0$$

がわかる。したがって、(8.23) より

$$\left. \frac{dc_i}{dt} \right|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

を得る。

$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$ は、点 p において、第 i 座標軸に接する'単位ベクトル' というわけである。
p77

$$c(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t))$$

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \left(\frac{dx^1}{dt}(0), \frac{dx^2}{dt}(0), \dots, \frac{dx^m}{dt}(0) \right)$$

局所座標系のとり方に依存してしまうのである。

$$c(t) = (y^1(t), y^2(t), \dots, y^m(t))$$

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \left(\frac{dy^1}{dt}(0), \frac{dy^2}{dt}(0), \dots, \frac{dy^m}{dt}(0) \right)$$

一般には一致しない。

$$\left[v = \xi^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \xi^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p + \dots + \xi^m \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p \right]$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x^i} (\mathbf{p}_\beta(y^1(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^m)), \dots, y^m(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^m)))) \right]$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i} (\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^m)) \frac{\partial f}{\partial y^j} (\mathbf{p}_\beta(y^1(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^m)), \dots, y^m(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^m))))]$$

物理学序論 p22

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$e_x = (1, 0, 0), e_y = (0, 1, 0), e_z = (0, 0, 1)$$

を基本ベクトルとして導入すると、

$$r = xe_x + ye_y + ze_z$$

と書くこともできる。

$$v = \frac{dr}{dt}$$

$$v = \frac{dx}{dt}e_x + \frac{dy}{dt}e_y + \frac{dz}{dt}e_z$$

$$v = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

例 $M = \left\{ \left[\begin{array}{c} 1 \sin x_1 \cos x_2 \\ 1 \sin x_1 \sin x_2 \\ 1 \cos x_1 \end{array} \right] \mid \begin{array}{l} 0 < x_1 < \pi \\ 0 < x_2 < 2\pi \end{array} \right\}$ とすると、

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& (u+v)(af+bg) \\
&= a(u+v)(f) + b(u+v)(g) \\
& \quad (u+v)(fg) \\
&= (u+v)(f)g(p) + f(p)(u+v)(g) \\
& \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi^{-1}\mathbf{p}(a^1, a^2, \dots, a^m)) \right] \\
& \quad \left[= \frac{d}{dt} f(\varphi^{-1}(x^1(c(0)), x^2(c(0)), \dots, x^m(c(0)))) \right] \\
& \quad \left[\xi^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{p}(a^1, a^2, \dots, a^m)) + \xi^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}(\mathbf{p}(a^1, a^2, \dots, a^m)) + \dots + \xi^m \frac{\partial f}{\partial x^m}(\mathbf{p}(a^1, a^2, \dots, a^m)) = 0 \right]
\end{aligned}$$

次の条件を確かめればよい。

$$a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + \dots + a_m\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p = \mathbf{0} \quad \text{ならば} \quad a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$$

実際、

$$[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{p}_\beta(y^1(\boldsymbol{p}_\alpha(a^1, \dots)), \dots)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\boldsymbol{p}_\alpha(a^1, \dots)) \frac{\partial f}{\partial y^j}(\boldsymbol{p}_\beta(y^1(\boldsymbol{p}_\alpha(a^1, \dots)), \dots))]$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m))\right]$$

点 p のまわりで、と別の局所座標系を選んだとき、

点 p のまわりで定義された任意の C^r 級関数 f について、次の変換公式がなりたつ。

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial y_j}(p)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{p}_\beta(y^1(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots)), \dots), \dots) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots)) \frac{\partial f}{\partial y^j}(\mathbf{p}_\beta(y^1(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots)), \dots), \dots)\right]$$

多様体入門 p38

多様体 $\{771?\}$ M の点 p のまわりで定義された任意の級関数 f にたいし、実数 $v(f)$ が対応して

$$1) \quad v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g),$$

$$2) \quad v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

という条件をみたしているとき、対応 v を p における M の接ベクトルとよぶ。をにおけるの接ベクトルとすると、との和、およびのスカラー倍を

により定義すると、もにおけるの接ベクトルになる。このようににおける接ベクトルの和、およびスカラー倍を定義すると、における接ベクトルの全体は上のベクトル空間になる。このベクトル空間を $T_p(M)$ であらわし、 p における M の接ベクトル空間 または接空間とよぶ。

(x^1, \dots, x^n) をに U における局所座標系 $\{801?\}$ とし、 U の点 p において

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)) \quad (i = 1, \dots, n)$$

とみると、 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ は p における接ベクトルである。

接ベクトル空間 $\{841?\}$ $T_p(M)$ も n 次元である。

が次元であることをいうには $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right\}$ が $T_p(M)$ の基であることがいえればよい。は一次独立 $\{831?\}$ である。

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

接ベクトルにたいしとおき、次元ベクトルを局所座標系に関する v の成分とよぶ。このとき v は

$$v = \sum_{i=1}^n \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

となる。 $(\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot)$ を p における二つの局所座標系とする。およびはともにの基となるが、これらの間には

=

なる変換式がなりたつ。

$$v = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\right)_{t=t_0} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\varphi(t_0)}$$

とみると、 v はにおけるの接ベクトルで v は局所座標系 (x^1, \dots, x^n) のえらび方によらない。

5.2.2 { p138 }

$$f(p) = f \circ \varphi^{-1}(x)$$

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (\text{本 } p79?)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i(c(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

$\partial f / \partial x^i$ は $\partial(f \circ \varphi^{-1}(x)) / \partial x^i$ の意味である。

$$X = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad \left(X^i = \left. \frac{dx^i(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \right) \quad (\text{本 } 20?)$$

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} = X^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \equiv X[f] \quad (\text{本 } 19?)$$

である。ここで最後の等式は $X[f]$ の定義を表す。曲線 $c(t)$ によって与えられた方向に沿っての $p = c(0)$ における M の接ベクトルを定めるのが $X = X^i(\partial/\partial x^i)$ である。

即ちにおける接ベクトル全体はにおけるの接空間とよばれるベクトル空間を形成する。これを $T_p M$ と書く。(5.21) から、明らかに $T_p M$ の基底ベクトルで、 $\dim T_p M = \dim M$ である。ベクトルが $V = V^\mu e_\mu$ とかけられるとき、係数 V^μ をのに関する成分という。

==

5.1.2 { p129 }

座標がである点を () 単に点 x とかくことがある。

多様体 p20

$$u(f) = \left(\frac{d}{dt} f(x(t)) \right)_{t=t_0}$$

定義 とくに、滑らかな曲線であってとなるものを用いて u が (2) によって定義されるとき、 u は x_0 における曲線 C の接ベクトルという。

$$u = \sum_{i=1}^n u^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0}$$

幾何学 p75

定義 4.1.1

接ベクトル

p76

定義 4.2.1 接空間 (接ベクトル空間)

$$\varphi(x) = (x_1(x), \dots, x_n(x))$$

座標近傍をとり、とする。とすると、 φ の基底となる。

座標近傍をとり替えたときの基底の変換が形式的にできることである。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \text{ に } \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\varphi(x_0)) \frac{\partial}{\partial y_i} \text{ を代入したものになっている。}$$

多様体の基礎 p22

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(\mathbf{y}) \frac{\partial h_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \left[= \frac{\partial f}{\partial y_1}(h(\mathbf{x})) \frac{\partial h_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + = \frac{\partial f}{\partial y_1}(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots) \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) + \right]$$

p47

$$\mathbf{p}(u, v)$$

点 $\mathbf{p}(a, b)$ におけるこの曲線の速度ベクトルは

p80

定義 8 点 $p = \mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ における方向微分 v とは、 p の開近傍で定義された C^r 級関数 f に実数 $v(f)$ を対応させる操作であって、次のの性質をもつものである。

$$() \quad v(af + bg) = av(f) + bv(g)$$

$$[v(af(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m))) + bg(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)))] = av(f(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m))) + bv(g(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)))].$$

ここにであり、 f, g は p の開近傍で定義された任意の C^r 級関数。

$$() \quad v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

$$[v(f(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)))g(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

$$= v(f(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)))g(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)) + f(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m))v(g(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

p80

定義 8 点 $p = \varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ における方向微分 v とは、 p の開近傍で定義された C^r 級関数 f に実数 $v(f)$ を対応させる操作であって、次のの性質をもつものである。

$$() \quad v(af + bg) = av(f) + bv(g)$$

$$[v(af(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))) + bg(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))] = av(f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))) + bv(g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))].$$

ここにであり、 f, g は p の開近傍で定義された任意の C^r 級関数。

$$() \quad v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

$$[v(f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

$$= v(f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)) + f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))v(g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

例 p . p のまわりで定義された C^r 級関数 f に、 p における x_i 方向の偏微分係数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \in R$$

を対応させる操作を $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$ と書こう。

このとき、 $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$ は、 p における方向微分の性質を持つ。

記号

$$\circ \varphi^{-1}(x) =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad (\text{基礎 8.9})$$

5.1.2 { p129 }

座標が $\{x^1, \dots, x^m\}$ である点を () 単に点 x とかくことがある。

5.2.2 { p138 }

$$f(p) = f \circ \varphi^{-1}(x)$$

$\partial f / \partial x^i$ は $\partial(f \circ \varphi^{-1}(x)) / \partial x^i$ の意味である。

$$f((u)) = F(u^1, \dots, u^n) \quad (sp31)$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(\varphi(t_0)) \quad (sp37)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^m)) \right]$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{p}(x^1, x^2, \dots, x^m)) \right]$$

$$\frac{\partial(f \circ h)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_n} \frac{\partial h_n}{\partial x_i} \quad (4.5)$$

、右辺は正確には

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(\mathbf{y}) \frac{\partial h_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial y_2}(\mathbf{y}) \frac{\partial h_2}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n}(\mathbf{y}) \frac{\partial h_n}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

。ここに $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ である。、の右辺のは、実は合成関数 $\frac{\partial f}{\partial y_1} \circ h$ 、と解釈しなければならない。

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial y_1}(h(\mathbf{x})) \frac{\partial h_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial y_1}(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n}(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial y_n}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \right]$$

命題 7.2

(4.5) も見よ

(命題 7.2 の公式の、点 p での値を考えたもの)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial y_j}(p) \quad (\text{基礎 8.15})$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{p}_\beta(y^1(\mathbf{p}_\alpha(x^1, \dots, x^m)), \dots, x^m)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\mathbf{p}_\alpha(x^1, \dots, x^m)) \frac{\partial f}{\partial y^j}(\mathbf{p}_\beta(y^1(\mathbf{p}_\alpha(x^1, \dots, x^m)), \dots, x^m)) \right]$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{p}_\beta(y^1(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^m)), \dots, y^m(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^m)))) \right]$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^m)) \frac{\partial f}{\partial y^j}(\mathbf{p}_\beta(y^1(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^m)), \dots, y^m(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^m))))]$$

幾何学 p75

座標近傍 (U, φ) をとり、 $\varphi(x) = (x_1(x), \dots, x_n(x))$ とする。とすると、 φ が、 U の基底となる。

$\frac{\partial}{\partial x_j}$ に $\sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\varphi(x_0)) \frac{\partial}{\partial y_i} [= \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x_1(x_0), \dots, x_n(x_0)) \frac{\partial}{\partial y_i}]$ を代入したものになっている。

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{p}_\beta(y^1(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^n)), \dots, a^n)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^n)) \frac{\partial f}{\partial y^j}(\mathbf{p}_\beta(y^1(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots, a^n)), \dots, a^n)) \right]$$

$$v_c(f) = \frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))|_{t=0} \quad (\text{基礎 8.19})$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{dx_i}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} \quad (\text{中 5.19})$$

$$\frac{df(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} \quad (\text{中 5.21})$$

$$[= \sum_{i=1}^m \frac{dx^i}{dt}(c(0)) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1(c(0)), x^2(c(0)), \dots, x^m(c(0)))]$$

$$[= \sum_{i=1}^m \frac{dx^i}{dt}(c(0)) \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi^{-1}(x^1(c(0)), x^2(c(0)), \dots, x^m(c(0))))]$$

接ベクトル空間、接ベクトルの定義 { p83 ~ } { 30 講 P217 } { 微分幾何 P47 }

定義 8 m 個のベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$
 $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))\right]$ の張るベ
 クトル空間を、点 $p = \varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ における M の接ベクトル空間とよび、

$$T_p(M)$$

という記号で表わす。 $T_p(M)$ に属するベクトルを、点 p における M の接ベクトルという。

この定義によれば、点 p における M の接ベクトルとは

$$v = a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + a_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + \dots + a_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$$

という 1 次結合の形をした方向微分 v のことである。

$$\text{例 } M = \left\{ \left[\begin{array}{c} 1 \sin x_1 \cos x_2 \\ 1 \sin x_1 \sin x_2 \\ 1 \cos x_1 \end{array} \right] \mid \begin{array}{l} 0 < x_1 < \pi \\ 0 < x_2 < 2\pi \end{array} \right\} \text{ とすると、}$$

$$\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_1} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_2} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

点 p のまわりで、と別の局所座標系を選んだとき、

点 p のまわりで定義された任意の C^r 級関数 f について、次の変換公式がなりたつ。

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial y_j}(p)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\psi^{-1}(\psi_1(\varphi^{-1}(a_1, \dots)), \dots)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(a_1, \dots)) \frac{\partial f}{\partial y_j}(\psi^{-1}(\psi_1(\varphi^{-1}(a_1, \dots)), \dots)) \right]$$

{ P84 ~ }{ }

命題 8.3

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(\varphi_2^{-1}(b_1, b_2, \dots, b_m)), \frac{\partial f}{\partial y_2}(\varphi_2^{-1}(b_1, b_2, \dots, b_m)), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}(\varphi_2^{-1}(b_1, b_2, \dots, b_m))$$

の張るベクトル空間は、 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi_1^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi_1^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\varphi_1^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))$
の張るベクトル空間に一致する。

証明

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi_1^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}() \frac{\partial f}{\partial y_j}(\varphi_2^{-1}(b_1, b_2, \dots, b_m))$$

1 次結合

{ p80 }

例 1 f に、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)R$$

を対応させる操作を $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ と書こう。

{ 多様体の基礎 p83 }

定義 8 m 個のベクトル $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}_p, \left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\right\}_p, \dots, \left\{\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}_p$ の張るの部分ベクトル空間を、点 p における M の接ベクトル空間と

{ p84 ~ }

命題 8.3

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\right\}_p, \left\{\frac{\partial}{\partial y_2}\right\}_p, \dots, \left\{\frac{\partial}{\partial y_m}\right\}_p$$

の張るベクトル空間は、 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}_p, \left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\right\}_p, \dots, \left\{\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}_p$ の張るベクトル空間に一致する。

証明

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial y_j}(p)$$

1 次結合

幾何学

MR^n

定義 () 多様体の点を通る級の曲線全体の集合

$$= \{\Phi_i : (a_i, b_i) \longrightarrow M|\}$$

を考える。点のまわりの座標近傍 (U, φ) をとり、 φ の元の間

$$\Phi_1 \sim \Phi_2 \iff \frac{d(\varphi \circ \Phi_1)}{dt}(t_1) = \frac{d(\varphi \circ \Phi_2)}{dt}(t_2)$$

により定義すると、これは同値関係となり、さらに同値関係は座標近傍のとり方に依らない。この同値類を M のにおける接ベクトルと呼ぶ。

定義 接空間 (接ベクトル空間)

曲線と曲面の微分幾何 p47

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

点 $p(a, b)$ におけるこの曲線の速度ベクトルは

$$p_u(a, b), \quad p_u = \frac{\partial p}{\partial u}$$

多様体入門 p38

多様体 M の点 p のまわりで定義された任意の級関数 f にたいし、実数 $v(f)$ が対応して

$$1) \quad v() = v(f) + v(g)$$

$$[v(af(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)) + bg(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))) = av(f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))) + bv(g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

$$2) \quad v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

$$[v(f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

$$= v(f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)) + f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))v(g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

という条件をみたしているとき、対応 v を p における M の接ベクトルとよぶ。

このベクトル空間を $T_p(M)$ であらわし、 p における M の接ベクトル空間とよぶ。

を U における局所座標系とし、 U の点 p において

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)) \quad (i = 1, \dots, n)$$

とおくと、 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ は p における接ベクトルである。

p16

V から R への写像で線形なものを考える。すなわち写像

$$(x + y) = (x) + (y)$$

このようなを V 上の線形関数ということにしよう。

30 講 p18

定義 V 上の線形関数全体のつくるベクトル空間を V の双対ベクトル空間、あるいは簡単に双対空間といい、によって表わす。

30 講 p217

定義 の双対空間をと表わして、における M の接空間という。の元を、における M の接ベクトルという。

p138

$f : MR$ 。方向微分
[の意味である。]

接ベクトル空間、接ベクトルの定義 { P83 } { 30 講 P217 } { 微分幾何 P47 }
 定義 8

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_m), \frac{\partial \vec{p}}{\partial x_2}(a_1, \dots, a_m), \dots, \frac{\partial \vec{p}}{\partial x_m}(a_1, \dots, a_m)$$

の張るベクトル空間を、点 $\vec{p}(a_1, \dots, a_m)$ における M の接ベクトル空間と

例 $M = \left\{ \left[\begin{array}{c} 1 \sin x_1 \cos x_2 \\ 1 \sin x_1 \sin x_2 \\ 1 \cos x_1 \end{array} \right] \mid \begin{array}{l} 0 < x_1 < \pi \\ 0 < x_2 < 2\pi \end{array} \right\}$ とすると、

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial x_1} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial x_2} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$