

微分 {多様体の基礎 p93~} {多様体入門 p48~}

$M, N$  をそれぞれ  $m$  次元、 $n$  次元の  $C^r$  級多様体、 $f: M \rightarrow N$  を  $C^r$  級写像とする。

$T_p(M)$  の任意の元  $v$  をとる。、 $\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = v$  となるような、 $p$  を通る  $C^r$  級曲線

$c:$

が存在する。この曲線を写像  $f$  でうつすと、点  $q = f(p)$  を通る  $C^r$  級曲線

$f \circ c:$

になる。 $t = 0$  における  $f \circ c$  の速度ベクトル  $\left. \frac{d(f \circ c)}{dt} \right|_{t=0}$  を  $w \in T_q(N)$  と書こう。、 $v$  に  $w$  を対応させれば、写像  $T_p(M) \rightarrow T_q(N)$  が得られる。

定義 こうして得られた写像を

$$(df)_p: T_p(M) \rightarrow T_q(N)$$

と書き、点  $p$  における  $f: M \rightarrow N$  の微分 とよぶ。

$f: M \rightarrow N$  を  $C^r$  級写像とする。 $M$  の点  $p$  における任意の接ベクトル  $v \in T_p(M)$  と、 $N$  の点  $f(p)$  のまわりで定義された任意の  $C^r$  級関数  $\xi$  について

$$((df)_p(v))(\xi) = v(\xi \circ f)$$

$$[((f_*)_p(v))(\xi(\cdot))] = v(\xi(f(p(x^1, \cdot))))]$$

p103

命題 をそれぞれ次元、次元、次元の級多様体、を級写像、をの点とする。このとき

$$d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p: T_p(M) \rightarrow T_{g \circ f(p)}(Q)$$

$$[((g(f))_*)_p = (g_*)_{f(p)}((f_*)_p)]$$

$$[v(\xi(g(f(p(x^1, \cdot)))))]$$

がなりたつ。

{ 証明

$$[((g(f))_*)_p(v) = ((g(f))_*)_p\left(\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}\right)$$

$$= \left.\frac{dg(f(c))}{dt}\right|_{t=0}$$

$$= (g_*)_{f(p)}\left(\left.\frac{df(c)}{dt}\right|_{t=0}\right)$$

$$= (g_*)_{f(p)}\left((f_*)_p\left(\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}\right)\right)$$

$$= (g_*)_{f(p)}((f_*)_p(v))]$$



多様体の基礎 p93 ~

$M, N$  をそれぞれ  $m$  次元、 $n$  次元の  $C^r$  級多様体、 $f: M \rightarrow N$  を  $C^r$  級写像とする ( )。

{ 命題 9.1  $t=0$  における速度ベクトルをそれぞれ

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^m v_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \left[ = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (p(x(c(0)))) \right]$$

$$\left. \frac{d(fc)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q \left[ = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial g}{\partial y_j} (q(y(f(p(x(c(0)))))) \right]$$

とおくと、係数との間には次の関係がある。

$$w_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_i} (p) v_i \left[ = \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i} (f(p(x(c(0)))) v_i \right] \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$T_p(M)$  の任意の元  $v$  をとる。

{  $\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} T_p(M)$  に  $\left. \frac{d(fc)}{dt} \right|_{t=0} T_q(N)$  を対応させる写像である。 }

定義 こうして得られた写像を

$$(df)_p : T_p(M) \rightarrow T_q(N)$$

$$[((df)_p v)(g(q(y^1, \dots))) = v(g(f(p(x^1, \dots))))]$$

$$[((f_*)_p(v))(g(\cdot, \dots)) = v(g(f(p(x^1, \dots))))]$$

と書き、点  $p$  における  $f: M \rightarrow N$  の微分とよぶ。

$(df)_p : T_p(M) \rightarrow T_q(N)$  を  $f_* : T_p(M) \rightarrow T_q(N)$  と書く流儀もある。

$$((df)_p(v))(\xi)$$

p48

$\varphi$  を多様体  $M$  から  $M'$  への可微分写像とする。 $f$  を  $\varphi(p)(pM)$  の近傍で定義された可微分関数とすると  $\varphi^*f = f \circ \varphi$  は  $p$  の近傍で定義された可微分関数である。 $v \in T_p(M)$  にたいし

$$((\varphi_*)_p v)(f) = v(\varphi^*f) [= v(f \circ \varphi) = v(f(\varphi(p)))]$$

とおく。となるからはのにおける接ベクトルである。ゆえに  $(\varphi_*)_p$  は  $T_p(M)$  から  $T_{\varphi(p)}(M')$  への写像で線型写像になることは容易にわかる。 $(\varphi_*)_p$  を可微分写像  $\varphi$  の  $p$  における微分とよぶ。

とおけば

$$[((\varphi_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^i}))](y^j) = (\frac{\partial}{\partial x^i})(y^j(\varphi(p))) = \frac{\partial y^j(\varphi(p))}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}[y^j(\varphi(p))]$$

となる。

$\varphi$  を  $M$  から  $M'$  への、 $\psi$  を  $M'$  から  $M''$  への可微分写像とすると  $M$  から  $M''$  への可微分写像であって

$$((\psi \circ \varphi)_*)_p = (\psi_*)_{\varphi(p)} \circ (\varphi_*)_p$$

$$[(g \circ f)_*]_p = (g_*)_{f(p)} \circ (f_*)_p$$

がなりたつ。

がにおける接ベクトルであることが明瞭なときにはとかくかわりにとかくことがある。

幾何学 p77

、写像  $F_*T_xMT_{F(x)}N$  を導く。

こうして定義された写像をのにおける接写像という。

$$(F_2 \circ F_1)_* = (F_2)_*(F_1)_*$$

### 5.2.6 { p142 }

滑らかな写像  $f : M \rightarrow N$  は、自然に微分写像とよばれる写像  $f_*$  を誘導する；

$$f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

ベクトル  $V \in T_p M$  は  $g \circ f$  に作用し、ある実数を与える。そこで  $f_* V \in T_{f(p)} N$  を

$$(f_* V)[g] \equiv V[g \circ f]$$

によって定義しよう。あるいは  $M, N$  上のチャートを使って

$$(f_* V)[g \circ \psi^{-1}(y)] \equiv V[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)] \quad (5.32)$$

$$[(f_* V)[g \circ \psi^{-1}(\psi(f(p)))]] \equiv V[g \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p))]$$

$$[(f_* V)(g(\psi^{-1}(y)))] \equiv V(g(f(\varphi^{-1}(x))))]$$

によって定義する。ここで  $x = \varphi(p), y = \psi(f(p))$  である。 $V = V^\mu \partial / \partial x^\mu, f_* V = W^\alpha \partial / \partial y^\alpha$  とする。このとき (5.32) から

$$W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [g \circ \psi^{-1}(y)] = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)]$$

もし  $g = y^\alpha$  と選べばとの間の関係式

$$[W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [y^\alpha \circ \psi^{-1}(y)]] = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [y^\alpha \circ f \circ \varphi^{-1}(x)]$$

$$[W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [y^\alpha(\psi^{-1}(y(f)))]] = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [y^\alpha(f(\varphi^{-1}(x)))]$$

$$[W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [y^\alpha(\mathbf{q}(y(\mathbf{f})))]] = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [y^\alpha(\mathbf{f}(\mathbf{p}(x)))]$$

$$W^\alpha = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} y^\alpha(x)$$

が得られる。

### 5.2.2 { p138 }

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

p219

$$\frac{dx}{dt}(0)$$

p103

命題  $M, N, Q$  をそれぞれ次元、次元、次元の級多様体、を級写像、をの点とする。このとき  
 がなりたつ。

系

級微分同相写像なら、任意の  $p$  について、 $(df)_p : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$  は線型写像として同型であって、

$$(df^{-1})_{f(p)} = (df)_p^{-1}$$

がなりたつ ( )

(ii) を示そう、 $f^{-1}f = id_M, ff^{-1} = id_N$  であるから、

系 級微分同相写像が存在すれば、の次元との次元は等しい：

多様体入門 p48

$\varphi$  を  $M$  から  $M'$  への、 $\psi$  を  $M'$  から  $M''$  への可微分写像とすると  $M$  から  $M''$  への可微分写像  
 であって

$$((\psi \circ \varphi)_*)_p = (\psi_*)_{\varphi(p)} \circ (\varphi_*)_p$$

$$[(g \circ f)_*]_p = (g_*)_{f(p)} \circ (f_*)_p$$

がなりたつ。とくに  $M$  から  $M$  への微分同型とすると  $\varphi^{-1} \circ \varphi$  はの恒等写像、 $\varphi \circ \varphi^{-1}$  はの恒等写像  
 であるから、 $T_p(M)$  から  $T_{\varphi(p)}(M')$  の上への 1:1 線型写像で、その逆写像  $(\varphi_*)_p^{-1}$  と  $(\varphi_*^{-1})_{\varphi(p)}$   
 とが一致する。ゆえにの次元との次元はひとしい。したがって  $M$  から  $M'$  への微分同型  $\varphi$  が存在す  
 れば  $M$  と  $M'$  は同次元である。

記号

$$(df)_p : T_p(M) \rightarrow T_q(N) \quad (\text{基礎})$$

$$((df)_p(v))(\xi) = v(\xi \circ f) \quad (\text{基礎})$$

$$((\varphi_*)_p v)(f) = v(\varphi^* f) [= v(f \circ \varphi) = v(f(\varphi(\boldsymbol{p}())))] \quad (\text{入門})$$

$$(f_* V)[g \circ \psi^{-1}(y)] \equiv V[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)] \quad (\text{理論 5.32})$$

$$[(f_*)_p(v))(\xi) = v(\xi(f))]$$

$$[((f_*)_p(v))(\xi(())) = v(\xi(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}(x))))]$$

p80

定義 8 点  $p = \mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)$  における方向微分  $v$  とは、 $p$  の開近傍で定義された  $C^r$  級関数  $f$  に実数  $v(f)$  を対応させる操作であって、次の性質をもつものである。

$$() \quad v(af + bg) = av(f) + bv(g)$$

$$[v(af(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)) + bg(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m))) = av(f(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m))) + bv(g(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)))].$$

ここにであり、 $f, g$  は  $p$  の開近傍で定義された任意の  $C^r$  級関数。

$$() \quad v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

$$[v(f(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m))g(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)))$$

$$= v(f(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)))g(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)) + f(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m))v(g(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

例  $p$ 。  $p$  のまわりで定義された  $C^r$  級関数  $f$  に、 $p$  における  $x_i$  方向の偏微分係数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \in R$$

を対応させる操作を  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$  と書こう。

このとき、 $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$  は、 $p$  における方向微分の性質を持つ。

接ベクトル空間、接ベクトルの定義 { p83 ~ } { 30 講 P217 } { 微分幾何 P47 }

定義 8  $m$  個のベクトル  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$

$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m))\right]$  の張るベクトル空間を、点  $p = \mathbf{p}(a_1, a_2, \dots, a_m)$  における  $M$  の接ベクトル空間とよび、

$$T_p(M)$$

という記号で表わす。 $T_p(M)$  に属するベクトルを、点  $p$  における  $M$  の接ベクトルという。

この定義によれば、点  $p$  における  $M$  の接ベクトルとは

$$v = a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + a_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + \dots + a_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$$

という 1 次結合の形をした方向微分  $v$  のことである。

$$\text{例 } M = \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \sin x_1 \cos x_2 \\ 1 \sin x_1 \sin x_2 \\ 1 \cos x_1 \end{array} \right] \mid \begin{array}{l} 0 < x_1 < \pi \\ 0 < x_2 < 2\pi \end{array} \right\} \text{ とすると、}$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

点  $p$  のまわりで、と別の局所座標系を選んだとき、



点  $p$  のまわりで定義された任意の  $C^r$  級関数  $f$  について、次の変換公式がなりたつ。

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial y_j}(p)$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{p}_\beta(y^1(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots)), \dots)), \dots \right] = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots)) \frac{\partial f}{\partial y^j}(\mathbf{p}_\beta(y^1(\mathbf{p}_\alpha(a^1, \dots)), \dots))$$

p138

$\partial f / \partial x^i$  は  $\partial(f\varphi^{-1}(x))/\partial x^i$  の意味である。

接ベクトル

p80

定義 8 点  $p = [\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)]$  における方向微分  $v$  とは、 $p$  の開近傍で定義された  $C^r$  級関数  $f$  に実数  $v(f)$  を対応させる操作であって、次の性質をもつものである。

$$() \quad v(af + bg) = av(f) + bv(g)$$

$$[v(af(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))) + bg(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))] = av(f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))) + bv(g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))].$$

ここにであり、 $f, g$  は  $p$  の開近傍で定義された任意の  $C^r$  級関数。

$$() \quad v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

$$[v(f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

$$= v(f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)) + f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))v(g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

例  $p$ 。  $p$  のまわりで定義された  $C^r$  級関数  $f$  に、 $p$  における  $x_i$  方向の偏微分係数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \in R$$

を対応させる操作を  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$  と書こう。

このとき、 $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$  は、 $p$  における方向微分の性質を持つ。

接ベクトル空間、接ベクトルの定義 { p83 ~ } { 30 講 P217 } { 微分幾何 P47 }

定義 8  $m$  個のベクトル  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$

$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))\right]$  の張るベクトル空間を、点  $p = [\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)]$  における  $M$  の接ベクトル空間とよび、

$$T_p(M)$$

という記号で表わす。 $T_p(M)$  に属するベクトルを、点  $p$  における  $M$  の接ベクトルという。

この定義によれば、点  $p$  における  $M$  の接ベクトルとは

$$v = a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + a_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + \dots + a_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$$

という 1 次結合の形をした方向微分  $v$  のことである。

$$\text{例 } M = \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \sin x_1 \cos x_2 \\ 1 \sin x_1 \sin x_2 \\ 1 \cos x_1 \end{array} \right] \middle| \begin{array}{l} 0 < x_1 < \pi \\ 0 < x_2 < 2\pi \end{array} \right\} \text{ とすると、}$$

$$\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_1} \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_2} \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

点  $p$  のまわりで、と別の局所座標系を選んだとき、  
 点  $p$  のまわりで定義された任意の  $C^r$  級関数  $f$  について、次の変換公式がなりたつ。

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial y_j}(p)$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\psi^{-1}(\psi_1(\varphi^{-1}(a_1, \dots,)), \dots,)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(a_1, \dots,)) \frac{\partial f}{\partial y_j}(\psi^{-1}(\psi_1(\varphi^{-1}(a_1, \dots,)), \dots,)) \right]$$

{ P84 ~ }{ }

命題 8.3

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(\varphi_2^{-1}(b_1, b_2, \dots, b_m)), \frac{\partial f}{\partial y_2}(\varphi_2^{-1}(b_1, b_2, \dots, b_m)), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}(\varphi_2^{-1}(b_1, b_2, \dots, b_m))$$

の張るベクトル空間は、 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi_1^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi_1^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\varphi_1^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))$   
の張るベクトル空間に一致する。

証明

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi_1^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}() \frac{\partial f}{\partial y_j}(\varphi_2^{-1}(b_1, b_2, \dots, b_m))$$

1 次結合

{ p80 }

例 1  $f$  に、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)R$$

を対応させる操作を  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$  と書こう。

{ 多様体の基礎 p83 }

定義 8  $m$  個のベクトル  $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}_p, \left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\right\}_p, \dots, \left\{\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}_p$  の張るの部分ベクトル空間を、点  $p$  における  $M$  の接ベクトル空間と

{ p84 ~ }

命題 8.3

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\right\}_p, \left\{\frac{\partial}{\partial y_2}\right\}_p, \dots, \left\{\frac{\partial}{\partial y_m}\right\}_p$$

の張るベクトル空間は、 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}_p, \left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\right\}_p, \dots, \left\{\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}_p$  の張るベクトル空間に一致する。

証明

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial y_j}(p)$$

1 次結合

幾何学

$MR^n$

定義 ( ) 多様体の点を通る級の曲線全体の集合

$$= \{\Phi_i : (a_i, b_i) \longrightarrow M\}$$

を考える。点のまわりの座標近傍  $(U, \varphi)$  をとり、 $\Phi_1, \Phi_2$  の元の間

$$\Phi_1 \sim \Phi_2 \iff \frac{d(\varphi \circ \Phi_1)}{dt}(t_1) = \frac{d(\varphi \circ \Phi_2)}{dt}(t_2)$$

により定義すると、これは同値関係となり、さらに同値関係は座標近傍のとり方に依らない。この同値類を  $M$  のにおける接ベクトルと呼ぶ。

曲線と曲面の微分幾何 p47

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

点  $p(a, b)$  におけるこの曲線の速度ベクトルは

$$p_u(a, b), \quad p_u = \frac{\partial p}{\partial u}$$

多様体入門 p38

多様体  $M$  の点  $p$  のまわりで定義された任意の級関数  $f$  にたいし、実数  $v(f)$  が対応して

$$1) \quad v() = v(f) + v(g)$$

$$[v(af(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)) + bg(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))) = av(f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))) + bv(g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

$$2) \quad v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

$$[v(f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

$$= v(f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)) + f(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m))v(g(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)))]$$

という条件をみたしているとき、対応  $v$  を  $p$  における  $M$  の接ベクトルとよぶ。

このベクトル空間を  $T_p(M)$  であらわし、 $p$  における  $M$  の接ベクトル空間とよぶ。

を  $U$  における局所座標系とし、 $U$  の点  $p$  において

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_m)) \quad (i = 1, \dots, n)$$

とおくと、 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$  は  $p$  における接ベクトルである。

p16

$V$  から  $R$  への写像で線形なものを考える。すなわち写像

$$(x + y) = (x) + (y)$$

このようなを  $V$  上の線形関数ということにしよう。

30 講 p18

定義  $V$  上の線形関数全体のつくるベクトル空間を  $V$  の双対ベクトル空間、あるいは簡単に双対空間といい、によって表わす。

30 講 p217

定義 の双対空間をと表わして、における  $M$  の接空間という。の元を、における  $M$  の接ベクトルという。

p138

$f : MR$ 。方向微分  
[の意味である。]





接ベクトル空間、接ベクトルの定義 { P83 } { 30 講 P217 } { 微分幾何 P47 }  
 定義 8

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_m), \frac{\partial \vec{p}}{\partial x_2}(a_1, \dots, a_m), \dots, \frac{\partial \vec{p}}{\partial x_m}(a_1, \dots, a_m)$$

の張るベクトル空間を、点  $\vec{p}(a_1, \dots, a_m)$  における  $M$  の接ベクトル空間と

例  $M = \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \sin x_1 \cos x_2 \\ 1 \sin x_1 \sin x_2 \\ 1 \cos x_1 \end{array} \right] \mid \begin{array}{l} 0 < x_1 < \pi \\ 0 < x_2 < 2\pi \end{array} \right\}$  とすると、

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial x_1} \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial x_2} \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$