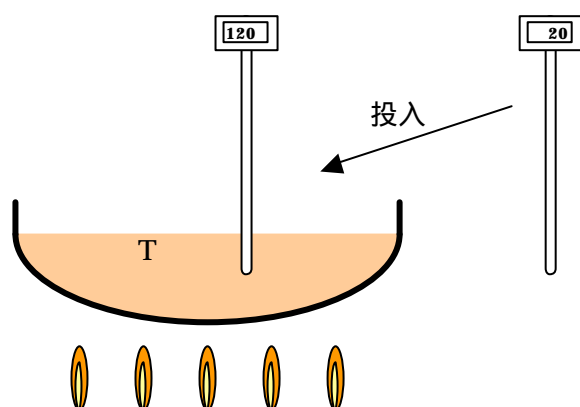


1.8 過渡応答事例

(1) 温度計の応答



室温 : 20
 天ぷら油の温度 : 120
 温度計の熱容量 : $100\text{J} / \text{K}$
 温度計の表面積 : 0.6m^2
 熱伝達率 : $300\text{W} / \text{m}^2 \text{K}$

図 1.17 鍋内の油の温度測定

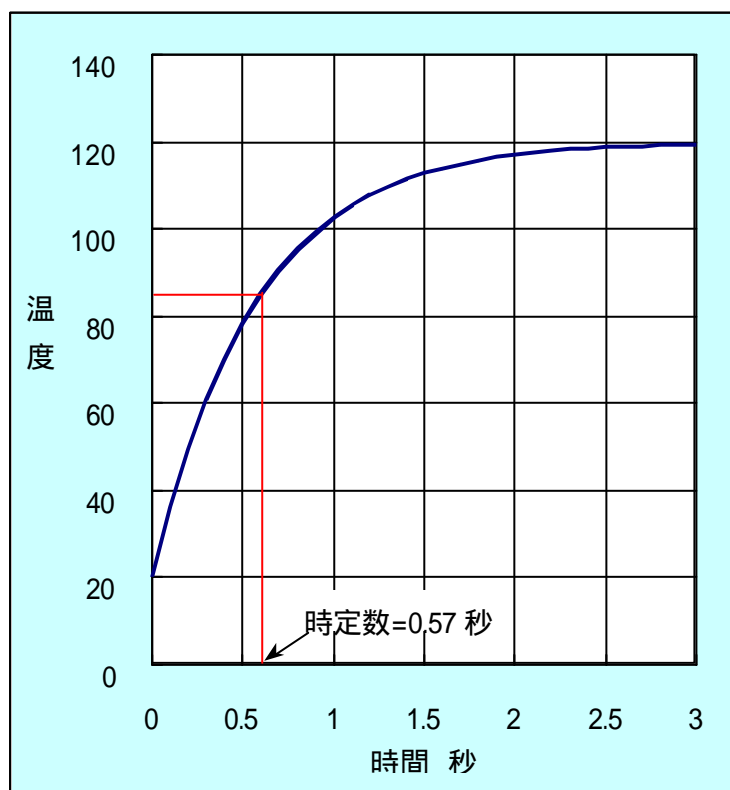


表 1.2 昇温値

時間 秒	温度
0	20.0
0.2	49.5
0.4	70.3
0.57	83.2
0.6	85.0
0.8	95.3
1.0	102.6
1.5	112.8
2.0	117.0
2.5	118.7
3.0	119.5

図 1.18 温度計の上昇カーブ

(1) 温度計の応答

いま、図 1.17 に示すように、室温 T_0 が 20 ののであるとき、天ぷら油の温度 T_1 ($= 120$) を測定する場合の過渡応答状態 (時間と温度の関係) を考える。温度計の熱容量と面積を M ($= 100\text{J/K}$) と A ($= 0.5\text{m}^2$) とし、油と温度計の間の熱伝達率 h を $350\text{W/m}^2\text{K}$ とする。

温度計を天ぷら油の中にいれた時刻を 0 秒とし、 t 秒後に T になったとすると、微小時間 dt に油から温度計に流れる熱量と、この微小時間に温度計が T だけ上昇することによって温度計内部に蓄えられる熱量とは等しくなるので、次式が成り立つ。

$$M\Delta T = hA(T_1 - T)\Delta t \quad (1.8a)$$

ここで $T = (T_1 - T)$ にとり、 dt を十分小さくし、微分形にすると

$$\frac{1}{(T_1 - T)} d(T_1 - T) = \frac{hA}{M} dt$$

となる。上式を時間 0 から t 秒まで積分すると求める過渡応答の油温度 T が時間の関数として導ける。

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{T_1 - T} d(T_1 - T) &= \frac{hA}{M} \int_0^t dt \\ -\ln \left(\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right) &= \frac{hA}{M} t \end{aligned}$$

ゆえに

$$T = T_1 - (T_1 - T_0)e^{-\frac{hA}{M}t}$$

となり、温度計の指示値は時間に対して指数関数的に変化する。そのようすを図 1.18 に示し、その計算値を表 1.2 に挙げる。

また、温度の指示値が T_0 から油の温度 T_1 に近づく割合が 63.2% になる時間を t とすると

$$\frac{hA}{M} t = 1$$

がその条件であるから、

$$t = \frac{M}{hA} = \frac{100}{350 \times 0.5} = 0.57 \text{ sec}$$

$$T = 120 - (120 - 20) \times e^{-1} = 83.2$$

になる。ここで、 t を温度計の時定数という。

一方、式 (1.8a) を伝達関数で表現するために $T = dT$ 、 $t = dt$ とおくと

$$MdT = hA(T_1 - T)dt$$

となる。さらに、 $T_1 = x(t)$ 、 $T = y(t)$ とおき、微分方程式にすると

$$\frac{M}{hA} \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t)$$

となるので伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{1}{\frac{M}{hA}s + 1}$$

の 1 次遅れ系になる。