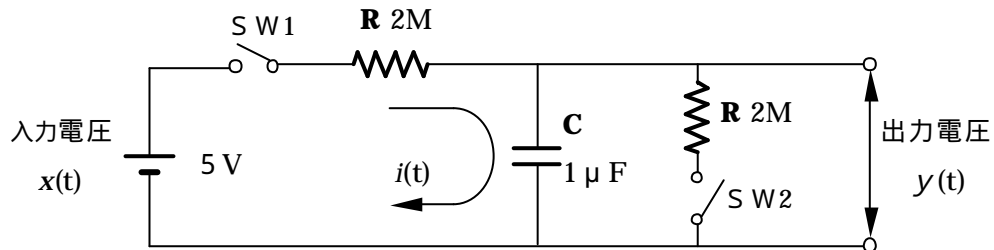


2.2 CR 回路の過渡応答数値解析

(1) CR 回路の例



$$\text{状態方程式} : T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t), \quad T = RC = 2 \quad \dots\dots(2.7)$$

$$\text{伝達関数} : G(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

図 2.2 CR 回路と状態方程式

(2) 計算式

$$y_n = \frac{1}{a} x_n + \frac{b}{a} y_{n-1} \quad \dots\dots(2.8)$$

$$\text{ただし、} \quad a = \left(1 + \frac{T}{q} \right), \quad b = \frac{T}{q}$$

(3) Excel の操作

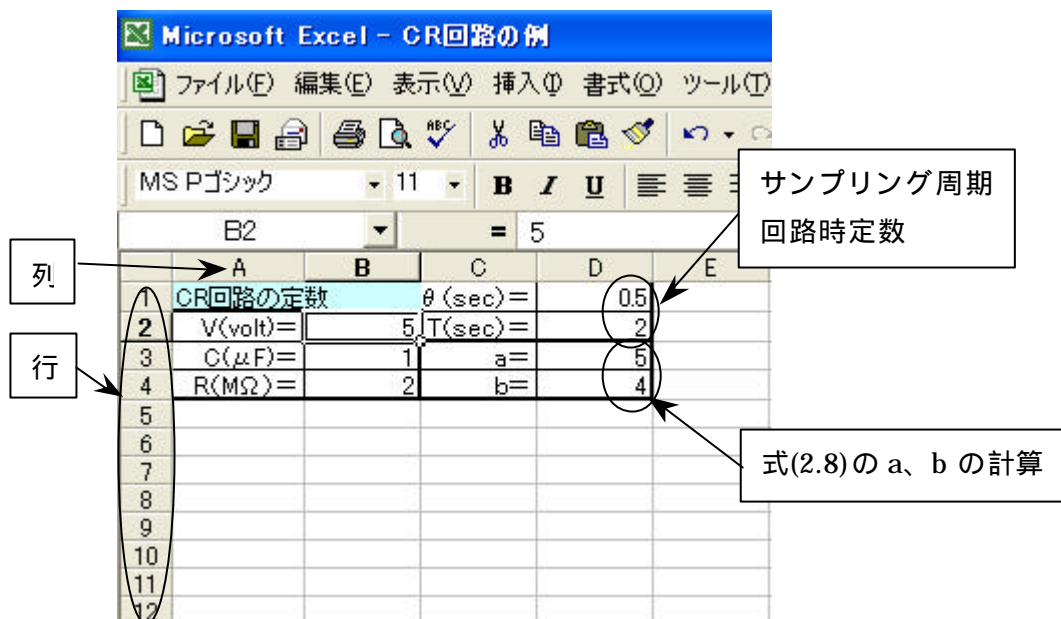


図 2.3 Excel シートの操作画面

(1) CR 回路の例

s (連続時間系) と z (離散時間系) の変換が習得できたので、初めに簡単な例として一次遅れ系を取上げ、Excel を使って数値シミュレーションする。図 2.2 に示す CR 回路においてスイッチ SW1 を入れると回路に電流が流れ、コンデンサ C に充電される。さらにスイッチ SW1 を切り、スイッチ SW2 を入れるとコンデンサーは放電する。この状態の変化を数値シミュレーションする技法について Excel 操作を含め説明する。

(2) 計算式

この CR 回路の状態方程式は式 (2.7) で表されるので、下記のように差分演算子を使って式 (2.8) を導くことができる。

$$\begin{aligned}
 T\Delta y(t) + y(t) &= x(t) \\
 T \frac{y_n - y_{n-1}}{q} + y_n &= x_n \\
 \left(1 + \frac{T}{q}\right)y_n - \frac{T}{q}y_{n-1} &= x_n \quad \dots(2.8a) \\
 y_n &= \frac{1}{a}x_n + \frac{b}{a}y_{n-1}, \quad a = 1 + \frac{T}{q}, \quad b = \frac{T}{q}
 \end{aligned}$$

また伝達関数で表現されている場合も下記のように導けば良い。

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + Ts} \\
 (1 + Ts)Y(s) &= X(s) \\
 \left(1 + T \frac{1 - z^{-1}}{q}\right)y(t) &= x(t) \quad \dots(2.8b) \\
 (a - bz^{-1})y(t) &= x(t), \quad a = 1 + \frac{T}{q}, \quad b = \frac{T}{q} \\
 ay_n - by_{n-1} &= x_n
 \end{aligned}$$

(3) Excel の操作

シミュレーション手順を図 2.3 の Excel ワークシート操作画面に沿って説明する。まず、CR 回路の定数である電池の電圧 V (= 5 volt)、コンデンサ容量 C (= 1 μF=10⁻⁶F) および抵抗 R (= 2 M = 2 × 10⁶) を Cell(B 2)に 5、(B3)に 1 および (B4)に 2を入力する。また微分時間 (サンプルング周期ともいう) を適当な値に選ぶが、ここでは 0.5sec とする。回路時定数 T = CR と計算値 a、b の入力方法は Cell 間の四則演算になり、以下の式をそれぞれ入力する。

T の計算 : Cell(D2) = B3 * B4

a の計算 : Cell(D3) = 1 + D2 / D1

b の計算 : Cell(D4) = D2 / D1

キーボードから「B3」と入力しなくともよい。
Cell(B3)をマウスでクリックする。

ここで Cell とは Excel シートの枠目を指し、行を数字、列をアルファベットで表し、Cell への計算式

(4) 計算表の作成

	A	B	C	D	E	F
1	CR回路の定数	θ (sec)=		0.5		
2	V(volt)=	5	T(sec)=	2		
3	C(μ F)=	1	a=	5		
4	R(M Ω)=	2	b=	4		
5						
6	データ番号	時間	入力電圧	出力電圧		
7	No.	t	x(t)	v(t)		
8	0	0.0	0	0.00		
9	1	0.5				
10	2					
11	3					
12	4					

図 2.4 計算表の作成画面 (時間の入力)

	A	B	C	D	E
1	CR回路の定数	θ (sec)=	0.5		
2	V(volt)=	5	T(sec)=	2	
3	C(μ F)=	1	a=		
4	R(M Ω)=	2	b=		
5					
6	データ番号	時間	入力電圧	出力電圧	
7	No.	t	x(t)	v(t)	
8	0	0.0	0	0.00	
9	1	0.5	5		
10	2	1.0			
11	3	1.5			
12	4	2.0			

	6	7	8	9	10	11	12
データ番号							
No.							
28	29	30	31	32	33	34	
14.0	14.5	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0	
5	5	5	0	0	0	0	

図 2.5 入力電圧の入力画面

	A	B	C	D	E	F
1	CR回路の定数	θ (sec)=	0.5			
2	V(volt)=	5	T(sec)=	2		
3	C(μ F)=	1	a=	5		
4	R(M Ω)=	2	b=	4		
5						
6	データ番号	時間	入力電圧	出力電圧		
7	No.	t	x(t)	v(t)		
8	0	0.0	0	0.00		
9	1	0.5	5	1.00		
10	2	1.0	5			
11	3	1.5	5			
12	4	2.0	5			

図 2.6 出力電圧の計算画面

(5) グラフの作成

	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
データ番号										
No.										
0	0.0	0	0.00							
1	0.5	5	1.00							
2	1.0	5	1.80							
3	1.5	5	2.44							
4	2.0	5	2.95							
5	2.5	5	3.36							
6	3.0	5	3.69							
7	3.5	5	3.95							

図 2.7 グラフ作成領域の指定

の入力は「=」から始める。また「B3」とキーボードから入力する代わりに、「=」を入力した後に Cell(B3)をマウスでクリックすることでも入力できる。

(4) 計算表とグラフの作成

Excel ワークシートを用い、計算表を作成する手順を説明する。まず、図 2.4 に示すように A、B、C および D 列にそれぞれデータ番号、時間 t 、入力電圧 $x(t)$ および出力電圧 $y(t)$ の入力領域をとる。

時間はサンプリング周期 0.5 秒毎に増加する。Cell への入力方法の一例を挙げると Cell(B8) = 0 を入力後、

Cell(B9)	= B8+D\$1	←	D の次の \$ 記号は行 1 を固定する。 = 0 + 0.5 (固定)
----------	-----------	---	--

と入力し、Cell 黒枠の右下角をダブルクリックするか、下方にドラックすると、列 B の Cell は計算式を入力せずとも、つぎつぎに計算できる。

さらに補足すると、\$ 記号は列と行を固定する役目であり、計算式の中の定数を表記する場合に使うと便利である。

たとえば

Cell(C9)	= \$B\$2
----------	----------

のように列と行の前に \$ 記号を入れると列 B と行 2 は固定され、上下左右にドラッグしても Cell(B2) の数値を表記するだけである。

入力電圧 $x(t)$ は初期値 Cell(C8)=0 を入力後、15 秒まで各 Cell に 5 を、それ以後に 0 を入力しても良いが、図 2.5(a) に示すように、条件文 IF を用いて表わすこともできる。

Cell(C9)	= IF (B9>15,0,B\$2)	←	B\$2 は入力電圧 5 である。
----------	-----------------------	---	-------------------

条件文は IF (理論式 , 真の場合 , 偽の場合) の構文であり、理論式の結果に応じて指定された真偽の値を返します。この条件文によって 15 秒以降では、図 2.5(b) に示すように入力電圧が 5 から 0 に変わる。

出力電圧 $y(t)$ は式(2.8)を入力することに帰着する。図 2.6 に示すように Cell(D8)に初期値 0 を入力後、Cell(D9)に以下の式を入力する。

Cell(D9)	= (1 / D\$3) * C9 + (D\$4 / D\$3) * D8	←	$= \frac{1}{a} x_n + \frac{b}{a} y_{n-1}$ を表している。
----------	--	---	---

さらに Cell(D9)の黒枠の右下角をダブルクリックするか、下方にドラックすることで計算表は完成する。

(5) グラフの作成

完成した計算表を使って、グラフの作成を行う。図 2.7 に示すように Cell(B7)にマウスカースルを当て、グラフの作成する領域を Cell(D68)までドラックし、黒塗りに反転する。または、Cell(B7)から Cell(D7)までドラッグした後に Shift + Ctrl + キーを押すと、一挙に Cell(B7)から Cell(D68)までの領域を選択することができる。


つぎにメニューツールバーの < 挿入 > < グラフ > を選択するか、直接ツールバーの  マークをクリックすると図 2.8 のグラフウィザード画面が表示されるので < グラフの種類 > を散布図、< 形式 > をサンプルの絵から選択する。グラフの形式は分散図の場合、5 種類 (スプラインの有無、プロッ



図 2.8 グラフウィザード画面

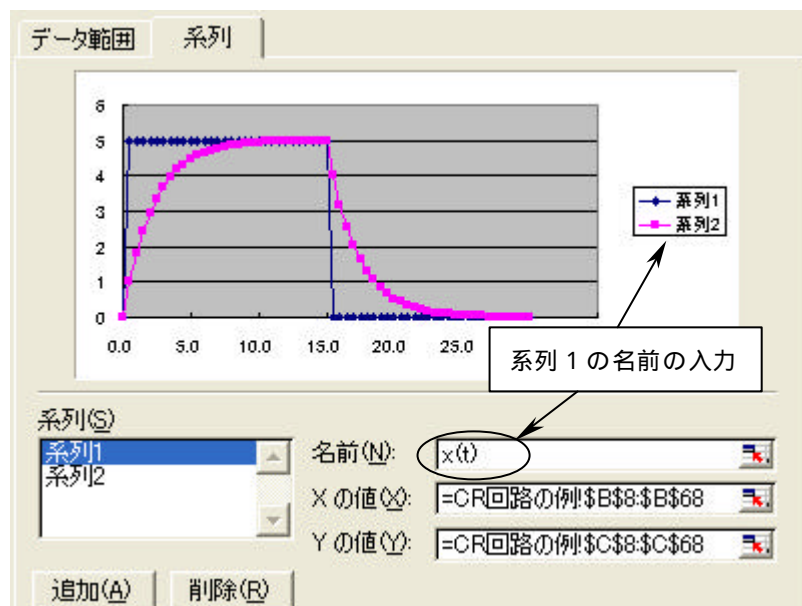


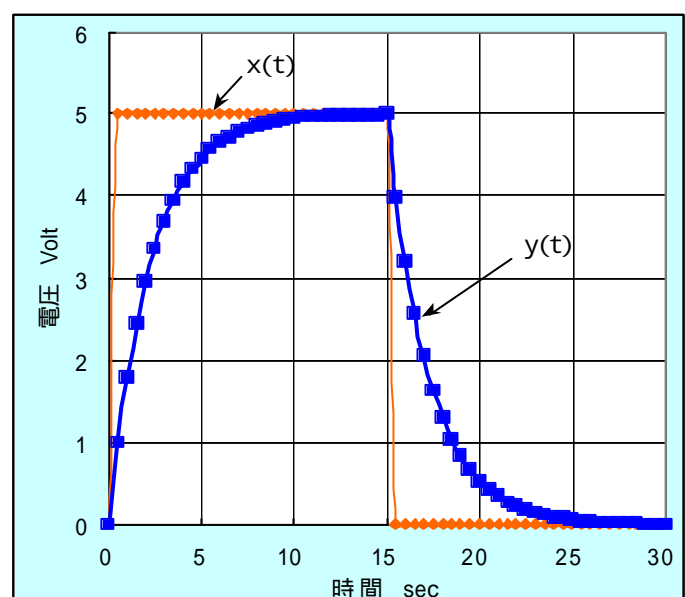
図 2.9 データ範囲と系列の確認

図 2.10 軸のラベルの入力

(6) 数値シミュレーション結果

図 2.11 CR 回路シミュレーション結果

サンプル周期 = 0.5 sec
 時定数 $T = 2$ sec
 0 秒 SW1 : ON
 15 秒 SW1 : OFF
 SW2 : ON



ト点の有無)が表示されるので表現目的にあった形式をクリックし、反転させることにより選ぶことができる。その後は図 2.9 や図 2.10 などのグラフウィザードの指示にしたがい、必要に応じて系列のラベル、グラフのタイトル、横軸縦軸のラベルおよび横軸の目盛線などを入力すれば CR 回路の 1 次遅れ系のシミュレーション結果がグラフ化されて表示される。

一般に、これだけの Excel 操作が習得できれば今後の章を学習するのに支障がないと思われる。Excel はさらに簡単なキー操作で複雑なプログラム作成 (VBA によるプログラミング) ができるので興味のある読者は Excel 操作の専門書を学習して下さい。

(5) 数値シミュレーション結果

図 2.11 に CR 回路の数値シミュレーション結果を示す。図 2.2 で SW1 を ON にすると CR 回路に 5 volt が印加され、時間とともにコンデンサ C に充電されるので出力電圧 $y(t)$ は 5 Volt まで上昇する。15 秒までステップ応答した後、SW 1 を OFF し、SW2 を ON するとコンデンサは放電され、時間の経過とともに出力電圧は 0 volt に漸近する過渡応答状態が観察できている。

数値シミュレーション誤差について少し述べる。CR 回路の時定数は $T = 2$ 秒であるあるから理論的に $63.2\% [= \{1 - \exp(-t/T)\} * 100 = \{1 - \exp(-2/2)\} * 100]$ の応答を示す出力電圧は $y(2) = 3.16 (= 5 \times 0.632)$ である。これに対して数値シミュレーション結果では $y(2) = 0.295$ であるから、約 6.65% の誤差が生じている。この誤差を小さくするには差分方程式のサンプリング時間 を小さくすることによって改善することができる。たとえば、 $\Delta t = 0.1$ 秒では誤差約 1.27%、 $\Delta t = 0.05$ 秒では約 0.63% に減少することができる。

	$y(2)$	誤差 %
0	3.16	0.00
0.05	3.14	0.63
0.1	3.12	1.27
0.5	2.95	6.65