

2.6 数値シミュレーションの演習

(1) 参照モデルの係数

表 2.2 2 項展開型参照モデル

n	a0	a1	a2	a3	a4	a5
2	1	1	0.25	-	-	-
3	1	1	0.333	0.03704	-	-
4	1	1	0.375	0.0625	0.003906	-
5	1	1	0.4	0.08	0.008	0.00032

$$G_{m1}(s) = \frac{1}{\sum_{i=0}^5 a_i s^i} \quad \dots(2.18)$$

表 2.3 ITAE 型参照モデル

n	b0	b1	b2	b3	b4	b5
2	1	1	0.3102	-	-	-
3	1	1	0.3786	0.1006	-	-
4	1	1	0.4664	0.1067	0.01882	-
5	1	1	0.4758	0.1272	0.02095	0.002201

$$G_{m2}(s) = \frac{1}{\sum_{i=0}^5 b_i s^i} \quad \dots(2.19)$$

(2) Excel の操作

IF		X		✓	=	=-F10/C\$13^3-4*G10/C\$13^4			
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
6		2項展開型							
7		n	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	
8		2	1	1	0.25	-	-	-	
9		3	1	1	0.333	0.03704	-	-	
10		4	1	1	0.375	0.0625	0.00391	-	
11		5	1	1	0.4	0.08	0.008	0.00032	
12		θ = 0.1							
13		n	e ₀	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	
14		2	36	-60	25	-	-	-	
15		3	81.34	-187.72	144.42	-37.04	-	-	
16		4	150.06	-428.74	459.36	C\$13^4	39.06	-	
17		5	243	-810	1080	-720	240	-32	

Cell(F17)
の計算式

Cell(F17)
の計算式

図 2.18 2 項展開型参照モデルの係数入力と計算エリア

IF		✖		✔		=		=(C27-D\$17*F26-E\$17*F25-F	
A	B	C	D	E	F	G	H		
20	2項展開型								
21	時間	$x(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$	$y_4(t)$	$y_5(t)$			
22	-0.5	0	0	0	0	0	0		
23	-0.4	0	0	0	0	0	0		
24	-0.3	0	0	0	0	0	0		
25	-0.2	0	0	0	0	0	0		
26	-0.1	0	0	0	0	0	0		
27	0	0	0	0	0	0	0		
28	0.1	100	2.77778	1.22941	0.6664	0.41152			
29	0.2	100	7.40741	4.06669	2.57039	1.78326			
30	0.3	100	13.1944	8.43186	5.97035	4.52675			

Cell(F27)
の計算式

Cell(F27)
の計算式

図 2.19 2 項展開型参照モデルの数値シミュレーションエリア

数値シミュレーション技法の演習問題として、さらに参照モデルを例にとって説明する。参照モデルは制御状態を望ましい制御状態になるように PID 定数を決めるひとつの方法として用いられ、第3章の部分モデルマッチング I-PD 制御の事例で詳しく扱うことにするが、ここでは参照モデルの応答波形を数値シミュレーションすることに留める。

(1) 参照モデルの係数

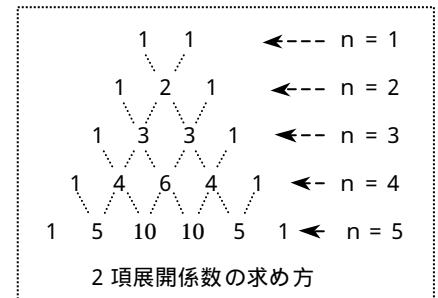
Graham と Lathrop¹⁾ はうまく設計された制御系が持つべき伝達関数の標準形を計算し、2次から8次までの係数列を与えている。ここで言ううまく設計された制御系とはステップ応答における制御偏差面積を最小にする方法で求めた系と考える。ここでは2項展開型の係数列と ITAE(偏差面積最小法)の係数列を表2.2と表2.3に紹介する。表2.2の2項展開型の係数列は $(1+s)^n$ を展開して、つぎのようにして求めることができる。

$$(1+as)^2 = 1 + 2as + a^2s^2, \quad a = 1/2$$

$$(1+as)^3 = 1 + 3as + 3a^2s^2 + a^3s^3, \quad a = 1/3$$

$$(1+as)^4 = 1 + 4as + 6a^2s^2 + 4a^3s^3 + a^4s^4, \quad a = 1/4$$

$$(1+as)^5 = 1 + 5as + 10a^2s^2 + 10a^3s^3 + 5a^4s^4 + a^5s^5, \quad a = 1/5$$



2項展開型参照モデルの一般式を式(2.18)に示す。

表2.3の ITAE (Integral of Time weighted Absolute Error) 型の係数はステップ応答における制御偏差面積を最小にする次式で決定している。

$$ITAE = \int_0^\infty |e(t)| t dt$$

ただし、 $e(t)$ は偏差である。式(2.19)にこのようにして求めた係数列の一般式を示す。

つぎに $n = 4$ の場合の2項展開型係数列を用いて数値シミュレーションする手順について述べる。ITAE 型については同様にして数値シミュレーションアルゴリズムを導くことができるので読者の皆さんが試してください。まず、 $n = 4$ の参照モデル $G_{m1}(s)$ は

$$\left. \begin{aligned} G_{m1}(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4} \\ (a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4)Y(s) &= X(s) \\ \left\{ a_0 + a_1 \frac{1-z^{-1}}{q} + a_2 \frac{(1-z^{-1})^2}{q^2} + a_3 \frac{(1-z^{-1})^3}{q^3} + a_4 \frac{(1-z^{-1})^4}{q^4} \right\} y(t) &= x(t) \\ g_0y_n + g_1y_{n-1} + g_2y_{n-2} + g_3y_{n-3} + g_4y_{n-4} &= x_n \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.18a)$$

ただし、

$$\begin{aligned} g_0 &= a_0 + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^3} + \frac{a_4}{q^4}, & g_1 &= -\frac{a_2}{q} - 2\frac{a_2}{q^2} - 3\frac{a_3}{q^3} - 4\frac{a_4}{q^4} \\ g_2 &= \frac{a_2}{q^2} + 3\frac{a_3}{q^3} + 6\frac{a_4}{q^4}, & g_3 &= -\frac{a_3}{q^3} - 4\frac{a_4}{q^4}, & g_4 &= \frac{a_4}{q^4} \end{aligned}$$

したがって

$$y_n = \frac{(x_n - g_1y_{n-1} - g_2y_{n-2} - g_3y_{n-3} - g_4y_{n-4})}{g_0} \dots\dots(2.18b)$$

となる。

(3) 2 項展開型と ITAE 型参照モデルの数値シミュレーション

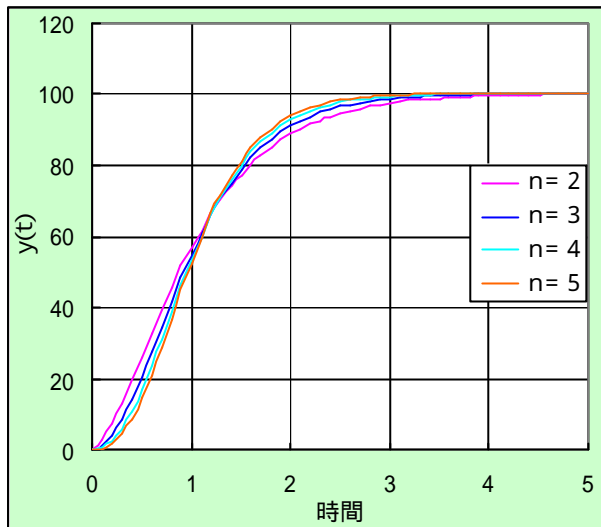


図 2.20 2 項展開型参照モデル

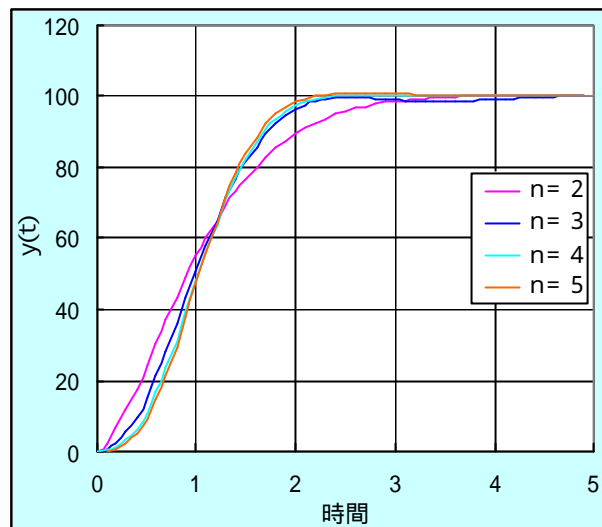


図 2.21 ITAE 型参照モデル

(4) 合成参照モデル

$$G_m(s) = \frac{1}{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + c_4 s^4} \quad \left. \begin{array}{l} \\ c_i = (1-a)a_i + ab_i \quad (i=0,1,2,3,4) \end{array} \right\} \dots\dots(2.20)$$

表 2.4 2 項展開型と ITAE 型参照モデルの合成 (n = 4)

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
0	1	1	0.37500	0.06250	0.003906
0.5	1	1	0.42070	0.08460	0.011363
1	1	1	0.46640	0.10670	0.018820
1.5	1	1	0.51210	0.12880	0.026277
2	1	1	0.55780	0.15090	0.033734

(5) 合成参照モデルの数値シミュレーション

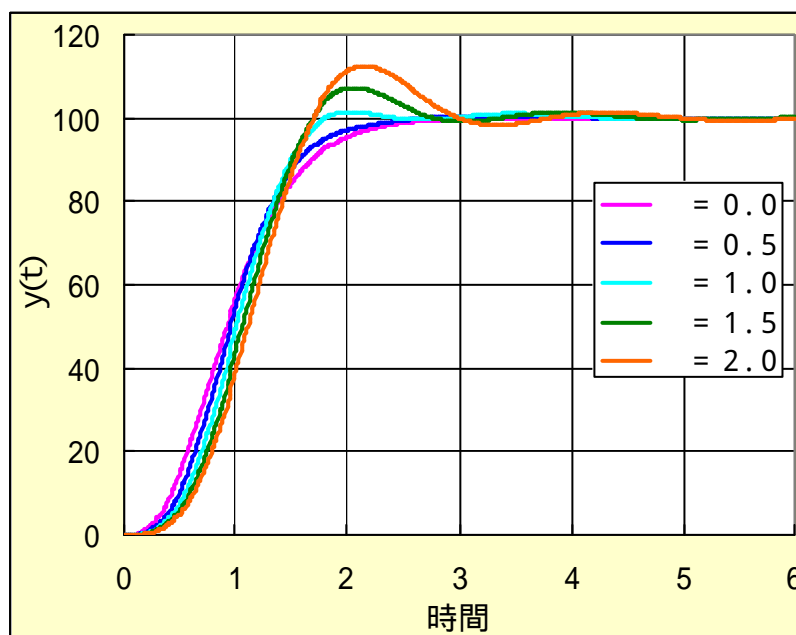


図 2.22 合成参照モデルの数値シミュレーション

(2) Excel の操作

まず参照モデルの係数 a_i を入力するエリアとこの係数を用いて差分式にするための係数 g_i ($i=0 \sim 5$) を計算するエリアを図 2.18 に示すように確保する。参照モデルのそれぞれの次数に対応する表 2.2 の数値を入力する。つぎに g_i をそれぞれの係数に対応して計算する。 $n = 4$ の場合の一例である Cell(F17) の計算式を示す。

Cell(F17)	=-F10/CS\$13^3-4*G10/CS\$13^4	← $g_3 = -a_3 / 3 - a_4 / 4$
-----------	-------------------------------	------------------------------

これら係数を用いて、さらに図 2.19 に示す y_n を計算することで参照モデルの数値シミュレーションが可能になる。 $n = 4$ の場合の Cell(F27) の計算例を示すと

Cell(F27)	=(C27-D\$17*F26-E\$17*F25-F\$17*F24-G\$17*F23)/C\$17
-----------	--

である。この計算式は式 (2.18b) である。ここでは省略するが、 $n = 2, 3$ および 5 の場合も同様にして数値シミュレーションすることができる

(3) 2 項展開型と ITAE 型参照モデルの数値シミュレーション

2 つの参照モデルの数値シミュレーション結果を示すと図 2.20 と図 2.21 のようになる。2 項展開型参照モデルはオーバーシュートがなく、定常状態に移行し、次数が大きいほど応答が速い。ITAE 型参照モデルは多少のオーバーシュートを許容するのであれば応答の追従性に優れている。これら 2 者の特徴を併せ持たせる合成参照モデルについて述べる。

(4) 合成参照モデル

2 項展開型と ITAE 型参照モデルを合成するために式 (2.20) のように重み係数 を導入する。

はこの 2 種類の参照モデルを組み合わせる重み係数で時間応答形状を連続的に変化させることができるので、応答形状係数という。 c_i は合成モデル $G_m(s)$ のステップ応答性能を決める係数である。この合成参照モデルの数値シミュレーション手順はこれまでに説明してきたの手法と同じであるので詳しい説明は省略する。 $n = 4$ の場合の合成したそれぞれの次数の係数 c_i を、 をパラメータにし、表 2.4 に計算して表わしている。この係数 c_i を用い、 y_n を計算すると

$$y_n = \frac{(x_n - g_1 y_{n-1} - g_2 y_{n-2} - g_3 y_{n-3} - g_4 y_{n-4})}{g_0}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= c_0 + \frac{c_1}{q} + \frac{c_2}{q^2} + \frac{c_3}{q^3} + \frac{c_4}{q^4}, & g_1 &= -\frac{c_1}{q} - 2\frac{c_2}{q^2} - 3\frac{c_3}{q^3} - 4\frac{c_4}{q^4} \\ g_2 &= \frac{c_2}{q^2} + 3\frac{c_3}{q^3} + 6\frac{c_4}{q^4}, & g_3 &= -\frac{c_3}{q^3} - 4\frac{c_4}{q^4}, & g_4 &= \frac{c_4}{q^4} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.20a)$$

(5) 合成参照モデルの数値シミュレーション結果

図 2.22 が 2 項展開型と ITAE 型参照モデルを合成した数値シミュレーション結果である。重み係数は応答性の要求により、たとえばオーバーシュートを絶対に許さなければ を小さく、オーバーシュートをある程度許容しながら速い応答を望むのであれば を 1 より大きく選ぶことで、ある程度汎用性のある参照モデルができあがり、プロセス運転の制御状態要求条件に適した状態を作り出すことができる。参照モデルを用いて PID 定数を計算するフィードバック制御については第 3 章で詳しく取り扱う。