

## 4.4 AR モデルのシステム同定事例

### (1) AR モデル

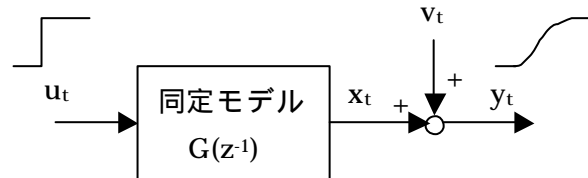


図 4.12 同定のための線形離散時間モデル（入力信号がステップ応答の場合）

$$G(z^{-1}) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad \leftarrow \quad G(s) = \frac{d_0}{1 + c_1 s + c_2 s^2} \quad \dots\dots (4.26)$$

$$x_t = -\sum_{i=1}^2 a_i x_{t-i} + b_0 u_t \quad \dots\dots (4.27)$$

$$y_t = x_t + v_t \quad \dots\dots (4.28)$$

### (2) Excel の操作

$$\hat{\mathbf{j}}^T = [a_1 \quad a_2 \quad b_0], \quad \mathbf{z}_t^T = [-y_{t-1} \quad -y_{t-2} \quad u_t] \quad \dots\dots (4.29)$$

$$\hat{\mathbf{j}}_N = \hat{\mathbf{j}}_{N-1} + \frac{P_{N-1} \mathbf{z}_N}{1 + \mathbf{z}_N^T P_{N-1} \mathbf{z}_N} (y_N - \mathbf{z}_N^T \hat{\mathbf{j}}_{N-1}), \quad P_N = P_{N-1} - \frac{P_{N-1} \mathbf{z}_N \mathbf{z}_N^T P_{N-1}}{1 + \mathbf{z}_N^T P_{N-1} \mathbf{z}_N} \quad \dots\dots (4.30)$$

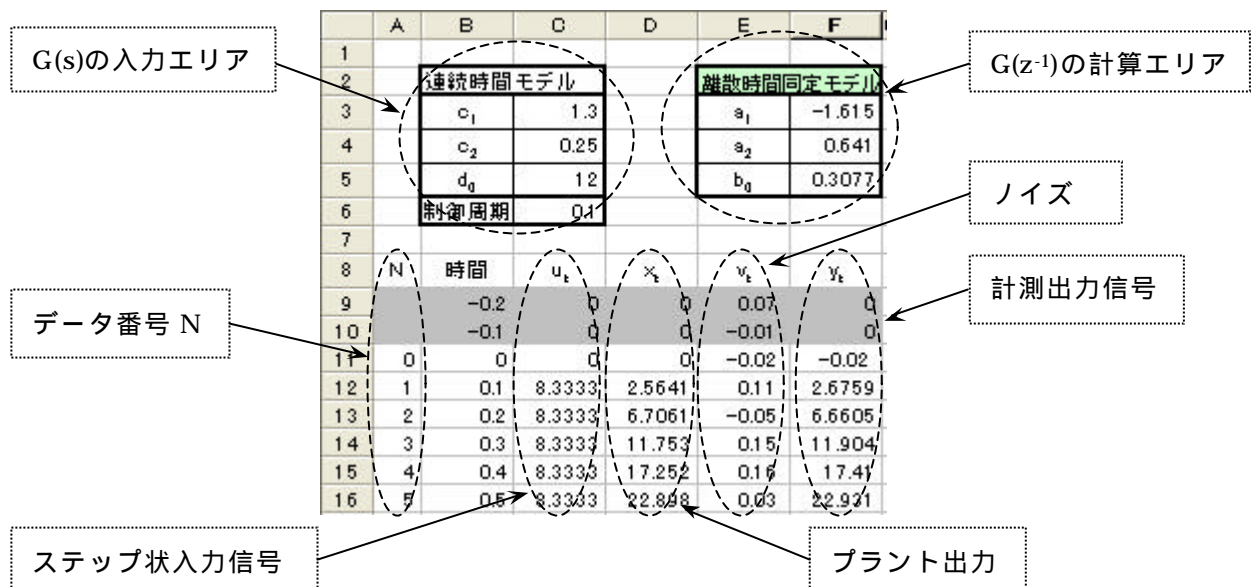


図 4.13 同定モデルからの出力信号の発生領域

第 3 章で扱ってきた 2 次遅れ系を取り上げて AR モデルのシステム同定の手法について説明する。同定次数の最適化については何ら考慮することはせず、ただ単純に逐次最小 2 乗法を使ったシステム同定の手順について述べることにする。

### ( 1 ) AR モデル

同定システムは図 4.12 の線形離散時間 AR モデルを取り扱う。ここで  $u_t$  はプラントの入力信号、 $x_t$  はプラントの出力、 $y_t$  は出力の計測信号であり、 $v_t$  は計測ノイズである。 $G(z^{-1})$  は AR モデルプラントの伝達関数 ( 式 ( 4.21 ) ) であり、連続時間系の伝達関数  $G(s)$  とはつぎの関係がある。

$$a_1 = \frac{-\frac{c_1}{q} - 2\frac{c_2}{q^2}}{1 + \frac{c_1}{q} + \frac{c_2}{q^2}}, \quad a_2 = \frac{\frac{c_2}{q^2}}{1 + \frac{c_1}{q} + \frac{c_2}{q^2}}, \quad b_0 = \frac{d_0}{1 + \frac{c_1}{q} + \frac{c_2}{q^2}} \quad \dots\dots ( 4.26a )$$

ここで  $q$  はサンプリング周期である。線形離散時間モデルの入出力関係は式 ( 4.27 ) の差分式で示され、計測ノイズを加えた計測出力は式 ( 4.28 ) で示される。ここで、計測ノイズは白色ノイズである。

### ( 2 ) Excel の操作

いま、同定すべき AR モデルの推定パラメータは  $\{a_1, a_2, b_0\}$  の 3 つであり、計測できる入出力データは  $\{u_i, y_i (i=1, 2, \dots, N)\}$  である。ここでは同定モデルの次数を 3 ( 現場では大きい値にする ) にして数値解析する。以下では、推定パラメータと計測データを式 ( 4.29 ) の 3 次元ベクトルで定義し、逐次最小 2 乗法の公式 ( 4.30 ) に当てはめることによって、推定パラメータを求める。

以下 Excel の操作手順について説明する。

手順 1 : 連続時間系モデル  $G(s)$  の係数入力エリアの確保 ( 図 4.13 )。

$c_1=1.3, c_2=0.25, d_0=12$  の入力

サンプリング ( 制御 ) 周期  $=0.1$  の入力

手順 2 : 離散時間系モデル  $G(z^{-1})$  の係数エリアの確保と計算 ( 図 4.13 )。

式 ( 4.26a ) を用いて  $a_1, a_2$  および  $b_0$  の計算。

$a_1$  : Cell(F3)  $=(-C3/C6-2*C4/C6^2)/(1+C3/C6+C4/C6^2)$

$a_2$  : Cell(F4)  $=C4/C6^2/(1+C3/C6+C4/C6^2)$

$b_0$  : Cell(F5)  $=C5/(1+C3/C6+C4/C6^2)$

手順 3 : 計測出力信号の発生 ( 図 4.13 )。

データ No.、時間の領域の確保。 時間 : Cell(B11)  $=B10+C\$6$

ステップ状プラント入力信号  $u_t$  の入力 (  $8.333=100/12$  定常出力が 100 になる値 )

プラントの出力信号  $x_t$  の計算。 Cell(D11)  $=F\$3*D10-F\$4*D9+F\$5*C11$

白色ノイズ  $v_t$  の発生。 Cell(E11)  $=(RAND()-RAND())*0.2$

計測出力信号  $y_t$  の計算。 Cell(F11)  $=D11+E11$

手順 4 : システム同定器  $P_{N-1}Z_N$  と  $Z_N^T P_{N-1}$  の計算 ( 図 4.14 )。

$P_{N-1}Z_N$  の計算。

$$PZ = \begin{bmatrix} pz_1 \\ pz_2 \\ pz_3 \end{bmatrix}$$

$pz_1$  : Cell(H11)  $=N11*\$F10-O11*\$F9+P11*\$C11$

$pz_2$  : Cell(I11)  $=Q11*\$F10-R11*\$F9+S11*\$C11$

$pz_3$  : Cell(G11)  $=T11*\$F10-U11*\$F9+V11*\$C11$

	H11			=	=-N11*\$F10-O11*\$F9+					
	G	H	I	J	K	L	M			
6	システム同定器									
7	PZ			ZP						
8	pz1	pz2	pz3	zp1	zp2	zp3				
9	0	0	0	0	0	0				
10	0	0	0	0	0	0				
11	0	0	0	0	0	0				
12	-1943.6	0	833333.3	-1943.6	0	833333.3				
13	-253858	-1943.6	-591.957	-253858	-1943.6	-591.957				
14	1917.445	-250665	4.274822	1917.445	-250665	4.274822				
15	1.236448	-3.99012	0.088058	1.236448	-3.99012	0.088058				

図 4.14 システム同定器 ( $P_{N-1}Z_N$  と  $Z_N^T P_{N-1}$  の計算領域)

	N12			=	=N11-W11/(1+\$AF11)				
	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
6									
7	P								
8	p11	p12	p13	p21	p22	p23	p31	p32	p33
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	100000	0	0	0	100000	0	0	0	100000
12	100000	0	0	0	100000	0	0	0	100000
13	99999.46	0	233.2301	0	100000	0	233.2301	0	0.558366
14	6.171677	-765.571	0.061662	-765.571	99994.14	-1.78519	0.061662	-1.78519	0.014654
15	0.320718	-0.68433	0.048617	-0.68433	1.691169	-0.07992	0.048617	-0.07992	0.014625

図 4.15 システム同定器 ( $P_{N-1}$  の計算領域)

	W11			=	=\$H11*K11				
	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE
7	PZZP								
8	pzzp11	pzzp12	pzzp13	pzzp21	pzzp22	pzzp23	pzzp31	pzzp32	pzzp33
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1.53E+08	0	-1E+10	0	0	0	-1E+10	0	6.94E+11
13	5.14E+10	2.81E+09	7.63E+08	2.81E+09	1.53E+08	41673703	7.63E+08	41673703	11335524
14	1.22E+08	-2.2E+09	1812960	-2.2E+09	4.1E+10	-3.3E+07	1812960	-3.3E+07	26889.99
15	7.59709	-22.5005	0.64967	-22.5005	66.6403	-1.92414	0.64967	-1.92414	0.055557

図 4.16 システム同定器 ( $P_{N-1}Z_N Z_N^T P_{N-1}$  の計算領域)

	AF11			=	=-K11*\$F10-L11*\$F9+M11*\$C11				
	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	
6									初期値
7	ZP2	Zφ		φ		Δφ			
8	zpz	zφ	a1	a2	b0		y	e	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	
10	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	0	0	0	0	0	0.064136	0	0	
12	6944856	0	0	0	0	3.52E-07	0	2.564103	
13	568435.7	2.452918	-0.00226	0	0.293686	7.61E-06	2.447386	4.258729	
14	513515.6	14.75328	-1.8153	-0.04879	0.279733	-5.9E-06	6.773852	4.979549	
15	19.63855	15.30793	-1.85125	1.287425	0.279458	0.090477	11.71806	5.533514	

図 4.17 システム同定器 ( $Z_N P_{N-1} Z_N^T$ ,  $Z_N$ ,  $N$ ,  $N$ ,  $N$ ,  $y_t$  および  $e_t$  の計算領域)

$z_N^T P_{N-1}$  の計算。

$$ZP = \begin{bmatrix} zp_1 \\ zp_2 \\ zp_3 \end{bmatrix}^T$$

$$zp_1 : \text{Cell}(K11) = -N11 * \$F10 - Q11 * \$F9 + T11 * \$C11$$

$$zp_2 : \text{Cell}(L11) = -O11 * \$F10 - R11 * \$F9 + U11 * \$C11$$

$$zp_3 : \text{Cell}(M11) = -P11 * \$F10 - S11 * \$F9 + V11 * \$C11$$

手順 5 : システム同定器 ( $P_N$  の計算) (図 4.15)。

$P_0$  の初期値の入力。

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = 10000$$

$$p_{11} : \text{Cell}(N11) = 10000$$

$$p_{12} : \text{Cell}(O11) = 0$$

$$p_{13} : \text{Cell}(P11) = 0$$

$$p_{21} : \text{Cell}(Q11) = 0$$

$$p_{22} : \text{Cell}(R11) = 10000$$

$$p_{23} : \text{Cell}(S11) = 0$$

$$p_{31} : \text{Cell}(T11) = 0$$

$$p_{32} : \text{Cell}(U11) = 0$$

$$p_{33} : \text{Cell}(V11) = 10000$$

$P_N$  の計算。

$$P_N = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$p_{11} : \text{Cell}(N12) = N11 - W11 / (1 + \$AF11)$$

$$p_{12} : \text{Cell}(O12) = O11 - X11 / (1 + \$AF11)$$

$$p_{13} : \text{Cell}(P12) = P11 - Y11 / (1 + \$AF11)$$

$$p_{21} : \text{Cell}(Q12) = Q11 - Z11 / (1 + \$AF11)$$

$$p_{22} : \text{Cell}(R12) = R11 - AA11 / (1 + \$AF11)$$

$$p_{23} : \text{Cell}(S12) = S11 - AB11 / (1 + \$AF11)$$

$$p_{31} : \text{Cell}(T12) = T11 - AC11 / (1 + \$AF11)$$

$$p_{32} : \text{Cell}(U12) = U11 - AD11 / (1 + \$AF11)$$

$$p_{33} : \text{Cell}(V12) = V11 - AE11 / (1 + \$AF11)$$

手順 6 : システム同定器  $P_{N-1} z_N z_N^T P_{N-1}$  の計算 (図 4.16)。

$$PZZP = \begin{bmatrix} PZZP_{11} & PZZP_{12} & PZZP_{13} \\ PZZP_{21} & PZZP_{22} & PZZP_{23} \\ PZZP_{31} & PZZP_{32} & PZZP_{33} \end{bmatrix}$$

$$PZZP_{11} : \text{Cell}(W11) = \$H11 * K11$$

$$PZZP_{12} : \text{Cell}(X11) = \$H11 * L11$$

$$PZZP_{13} : \text{Cell}(Y11) = \$H11 * M11$$

$$PZZP_{21} : \text{Cell}(Z11) = \$I11 * K11$$

$$PZZP_{22} : \text{Cell}(AA11) = \$I11 * L11$$

$$PZZP_{23} : \text{Cell}(AB11) = \$I11 * M11$$

$$PZZP_{31} : \text{Cell}(AC11) = \$J11 * K11$$

$$PZZP_{32} : \text{Cell}(AD11) = \$J11 * L11$$

$$PZZP_{33} : \text{Cell}(AE11) = \$J11 * M11$$

手順 7 : システム同定器  $z_N P_{N-1} z_N^T$ ,  $z_N^T z_N$ ,  $N$ ,  $N$ ,  $N$ ,  $y_t$  および  $e_t$  の計算 (図 4.17)。

$z_N P_{N-1} z_N^T$  の計算。

$$ZPZ : \text{Cell}(AF11) = -K11 * F10 - L11 * F9 + M11 * C11$$

	AN	AO	AP
6			
7			
8	c1	c2	d0
9	0	0	0
10	0	0	0
11	0	0	0
12	0	0	0
13	8.33E-05	0	0.317339
14	-0.26282	0.000216	-0.50263
15	0.174249	0.06981	3.041871

図 4.18 G(s) の計算エリア

### ( 3 ) AR モデルの同定結果

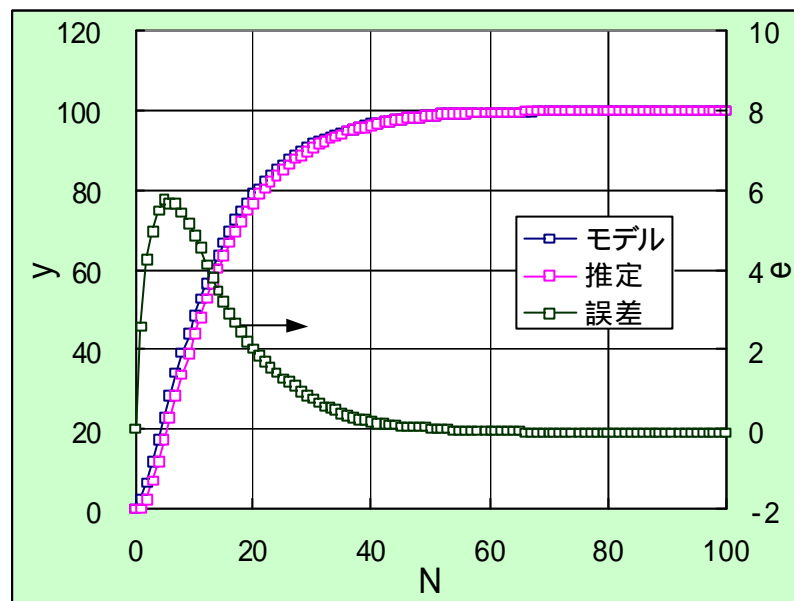


図 4.19 AR モデル同定の結果

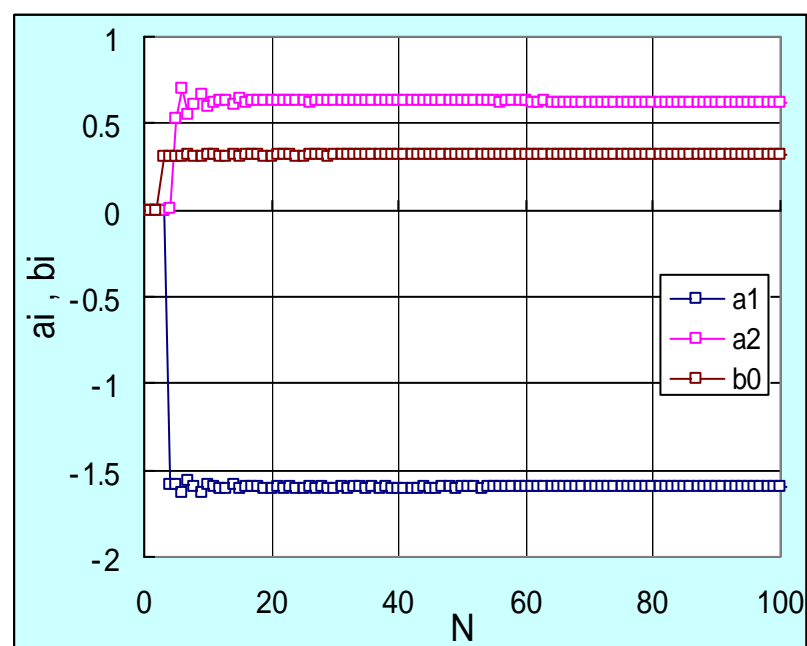


図 4.20 AR モデル同定の収束過程

$z_N$  の計算。

$$zf : \text{Cell(AG11)} = -F10*AH11 - F9*AI11 + C11*AJ11$$

の計算。

・初期値  $f_0$  の入力

$$f_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 : \text{Cell(AH11)} = 0$$

$$a_2 : \text{Cell(AH11)} = 0$$

$$b_0 : \text{Cell(AJ11)} = 0$$

・  $f_N$  の計算

$$f_N = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{a}_1 : \text{Cell(AH12)} = AH11 + \$AK11 * H11$$

$$\hat{a}_2 : \text{Cell(AI12)} = AI11 + \$AK11 * I11$$

$$\hat{b}_0 : \text{Cell(AJ12)} = AJ11 + \$AK11 * J11$$

$y_N$  の計算。

$$\Delta f_N = \frac{y_N - Zf}{1 + ZPZ} : \text{Cell(AK11)} = (F11 - AG11) / (1 + \$AF11)$$

$y_N$  の計算。

$$y_N : \text{Cell(AL11)} = -AH11 * AL10 - AI11 * AL9 + AJ11 * C11$$

$e$  の計算。

$$e : \text{Cell(AM11)} = D11 - AL11$$

以上の操作により、推定値  $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_0\}$  を求めることができる。さらに連続時間系のプラント  $G(s)$  は推定値を用いて次の式で計算することができる。

手順 8 : プラント  $G(s)$  の推定 ( 図 4.18 )

$$\hat{c}_1 = \frac{\hat{a}_1 + 2\hat{a}_2}{1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2}$$

$$\hat{c}_1 : \text{Cell(AN13)} = (-AH13 - 2*AI13) / (1 + AH13 + AI13) * CS6$$

$$\hat{c}_2 = \frac{\hat{a}_2}{1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2}$$

$$\hat{c}_2 : \text{Cell(AO13)} = AI13 / (1 + AH13 + AI13) * CS6^2$$

$$\hat{d}_0 = \frac{\hat{b}_0}{1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2}$$

$$\hat{d}_0 : \text{Cell(AP13)} = AJ13 / (1 + AH13 + AI13)$$

ただし、 $\hat{\phantom{x}}$  は推定値を表す。

### ( 3 ) AR モデルの同定結果

図 4.19 が AR モデルの同定結果である。同定モデルと逐次推定による数値シミュレーションによる誤差は  $N=6$  で最大を示し、その後 0 に収束する。また、図 4.20 は逐次推定値  $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_0\}$  の収束過程を示している。 $N=6$  程度でほぼ収束し、 $N=20$  になると変動なく一定値に収束することがわかる。ここでは示していないが、初期値  $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_0\}$  を 0 ではなく、一度数値シミュレーションした推定値を初期値に用いると、さらに収束が早くなり、誤差はさらに 0 に近づく。

また、ノイズは同定結果に大きな影響を与える。ここでは最大最小  $\pm 0.2$  のノイズを発生しているが、この値を大きくする ( S/N 比を小さくする ) と推定誤差が大きくなり、収束しなくなる。