

4.7 同定次数の決め方

(1) 極・零消去法

$$\hat{G}(z^{-1}) = \frac{\hat{B}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})} \quad \dots\dots (4.41)$$

$$\hat{A}(z^{-1}) = 0, \quad \hat{B}(z^{-1}) = 0 \quad \dots\dots (4.42)$$

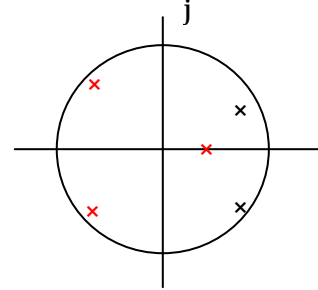


図 4.34 極・零の相殺例

(2) 同定モデルの表現

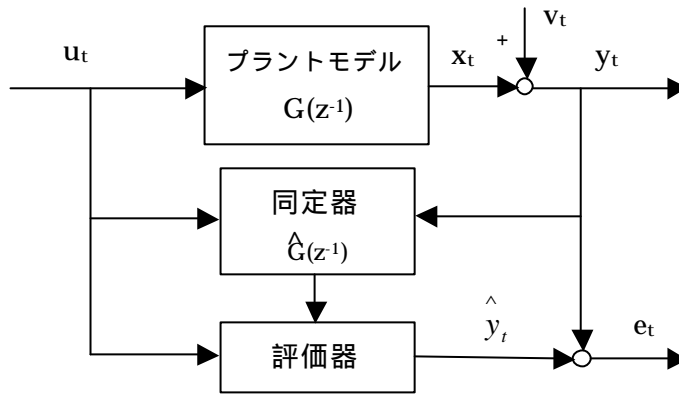


図 4.35 同定のためのブロック線図

$$\text{プラントモデル: } G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (n_0 = 2) \quad \dots\dots (4.43)$$

$$\text{同定モデル: } \left. \begin{aligned} \hat{A}(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + a_5 z^{-5} \\ \hat{B}(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5} \end{aligned} \right\} (n = 5) \quad \dots\dots (4.44)$$

(3) 逐次最小 2 乗法による係数列の推定

$$y_t = -\sum_{i=1}^5 a_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^5 b_i u_{t-i} + v_t \quad \dots\dots (4.45)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j}^T &= [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5] \\ \mathbf{z}_t^T &= [-y_{t-1} \ -y_{t-2} \ -y_{t-3} \ -y_{t-4} \ -y_{t-5} \ u_{t-1} \ u_{t-2} \ u_{t-3} \ u_{t-4} \ u_{t-5}] \\ \mathbf{j}_N &= \mathbf{j}_{N-1} + \frac{P_{N-1} \mathbf{z}_N}{1 + \mathbf{z}_N^T P_{N-1} \mathbf{z}_N} (y_N - \mathbf{z}_N^T \mathbf{j}_{N-1}) \\ P_N &= P_{N-1} - \frac{P_{N-1} \mathbf{z}_N \mathbf{z}_N^T P_{N-1}}{1 + \mathbf{z}_N^T P_{N-1} \mathbf{z}_N} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.46)$$

前節までは同定モデル（プラント）の構造（AR、AM、ARMA モデルなどの線関数表現とその係数列の次数）があらかじめ分っている仮定として説明を進めてきた。しかし現実のプラントでは、モデルの構造はほとんど未知であることが多い。ここでは、プラントの構造を ARMA モデルで表現した場合の係数列の次数を決定する極・零点消去法について紹介する。

（１）極・零消去法

実際には既知ではないが数値シミュレーションを行なうために便宜上、プラントモデルの次数を n_0 とし、同定モデルのそれを n ($n > n_0$) と仮定して、係数列の推定値が得られた場合に、伝達関数の推定値が式（4.41）で表わされたとする。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n} \\ \hat{B}(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n} \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (4.41a)}$$

で表わされる場合、分母と分子が独立に 0 になる、つまり式（4.42）が成り立つことによって極と零点の相殺が起きる。分母 $A(z^{-1})$ が 0 のときに極といい、分子 $B(z^{-1})$ が 0 のときに零点という。

図 4.34 は $n = 5$ として最小 2 乗法で得られた極（×）と零点（○）の配置を z （複素数）平面にプロットした一例である。似通った極と零点を相殺することで ARMR モデルを既約分数形にすれば、プラントの係数列と次数を求めることができる。以下その手順に沿って説明する。

（２）同定モデルの表現

図 4.35 に同定のためのブロック線図を示す。プラントの伝達関数 $G(z^{-1})$ に入力信号 u_t を加え、その出力 x_t にノイズ v_t をプラスした信号を計測出力信号 y_t とする。同定器は u_t と y_t の入出力を逐次最小 2 乗法に放り込んでプラントの伝達関数 $G(z^{-1})$ を同定する。さらに評価器では同定された伝達関数 $\hat{G}(z^{-1})$ に入力信号 u_t を加え、出力信号 \hat{y}_t を発生させ、プラントの出力 y_t と比較する（差をとる）ことで同定した係数列の妥当性を検討している。

いま真のプラントモデルが式（4.43）で表わされ、その係数列が

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.9, & a_2 &= 0.6 \\ b_1 &= 0.5, & b_2 &= 0.2 \end{aligned} \quad \left(G(z^{-1}) = \frac{0.5z^{-1} + 0.2z^{-2}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.6z^{-2}} \right)$$

であるとして、同定のための入出力信号 $\{ u_t, y_t \}$ を発生させる。つぎに同定モデルを式（4.44）に仮定して表わすことにする（ $n = 5$ の場合）。

（３）逐次最小 2 乗法による係数列の推定

前節でも説明してきたように逐次最小 2 乗法を用いて係数列の推定を行なう。真のプラントモデルの次数が $n_0 = 2$ であるから、同定モデルの次数を十分大きくとり $n = 5$ としたので、逐次最小 2 乗法の次数は 10 次（ $= 2n$ ）である。同定のための離散式は式（4.45）で表わされ、推定値 \hat{f} と列ベクトル z_t^T および逐次最小 2 乗法は式（4.46）で示される。Excel による同定手順を説明する。

手順 1：プラントモデルの係数列の入力（図 4.36）

$$a_1 = -0.9, \quad a_2 = 0.6, \quad b_1 = 0.5, \quad b_2 = 0.2$$

手順 2：入力信号（同定信号）の発生（図 4.36）

・ u_t はランダム信号を、Excel コマンドを用いて以下のように発生させる。

$$u_t = (\text{rand()} - \text{rand}()) * 100$$

（同定信号は ± 100 以内の信号になる）

ノイズ：ランダム信号

同定信号：ランダム信号

	A	B	C	D	E
1	プラントモデル				
2	係数列	a_1	a_2	b_1	b_2
3	初期値	-0.9	0.6	0.5	0.2
4					
5					
6					
7	N	u_t	x_t	e_t	y_t
8	-2	0	0	0.00	0
9	-1	0	0	0.00	0
10	0	34.356	0	0.14	0.14
11	1	-26.69	17.178	-0.18	17
12	2	12.898	8.9856	0.02	9.0103
13	3	-35.5	-1.109	0.15	-0.956
14	4	-28.35	-21.56	0.17	-21.38
15	5	-52.31	-40.01	0.21	-39.81

図 4.36 同定信号と出力信号の発生エリア

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		推定値									
2		a1	a2	a3	a4	a5	b1	b2	b3	b4	b5
3		-0.2555	-0.0993	0.2989	0.1030	-0.1162	0.4996	0.5220	0.0695	-0.1219	-0.0401
4											
5		同定器									
6		PZ									
7		PZ0	PZ1	PZ2	PZ3	PZ4	PZ5	PZ6	PZ7	PZ8	PZ9
8											
9											
10											
11											
12											
13		21295	-364.9	293.27	0	0	-71546	-42259	0	0	0
14		49460	21534	-557.4	293.27	0	40489	-43816	-42259	0	0
15		10105	40349	21908	-679	293.27	-19643	38152	-26285	-42259	0

図 4.37 同定器の計算エリア(一部)と同定結果表示エリア

(4) 極・零点の求め方

	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1			A(z ⁻¹)					B(z ⁻¹)				
2		係数列	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅
3		モデル	-0.9	0.6	0	0	0	0.5	0.2	0	0	0
4		同定値	-0.9089	0.5990171	0	0	0	0.49976	0.203689	0	0	0
5		推定値	-0.06967	0.0098405	0.233449	0.205312	-0.073744	0.49976	0.61528	0.244555	-0.02971	-0.02487
6			↑この枠に貼り付ける。						1.231151	0.489344	-0.05945	-0.04976
7												

図 4.38 推定結果の表示エリアと極・零点消去後の同定結果

図 4.39 貼り付けの形式選択ウィンドウ

形式を選択して貼り付け

貼り付け

☐ すべて(A)
 ☐ コメント(C)

☐ 数式(E)
 ☐ 入力規則(N)

☒ 値(V)
 ☐ 罫線を除くすべて(O)

☐ 書式(I)
 ☐ 列幅(W)

演算

☒ しない(O)
 ☐ 乗算(M)

☐ 加算(D)
 ☐ 除算(D)

☐ 減算(S)

☐ 空白セルを無視する(B)
 ☐ 行列を入れ替える(E)

リンク貼り付け(L)
 OK
 キャンセル

手順 3：プラントモデルの出力、ノイズおよび計測出力信号の発生（図 4.36）。

$$\begin{aligned}x_t &= 0.9x_{t-1} - 0.6x_{t-2} + 0.5u_{t-1} + 0.2u_{t-2} \\v_t &= 0.2(rand() - rand()) \\y_t &= x_t + v_t\end{aligned}$$

手順 4：同定器による計数列の計算と推定値の表示（図 4.37）。

10 次同定器による係数列の推定

（同定器の計算内容については前節で 4 次の場合について説明したので省く）

推定結果の表示

・それぞれの推定値は N=80 ~ 100 の平均値を表示している。

このようにして得られた同定結果の一例は

$$\left. \begin{aligned}\hat{A}(z^{-1}) &= 1 - 0.25547z^{-1} - 0.09926z^{-2} + 0.29877z^{-3} + 0.102975z^{-4} - 0.116192z^{-5} \\ \hat{B}(z^{-1}) &= 0.499562z^{-1} + 0.521958z^{-2} + 0.069511z^{-3} - 0.12192z^{-4} - 0.04014z^{-5}\end{aligned} \right\} \dots\dots (4.39a)$$

である。ただし N=100 である。

（４）極・零点の求め方

得られた同定結果の $A(z^{-1})$ と $B(z^{-1})$ は 5 次方程式である。5 次方程式の根を求める公式はないが、幸いにも 2 ~ 4 次方程式の公式は存在するし、5 次方程式の少なくとも 1 つの根は実数であるから 1 次と 4 次要因分解できるので、結局、4 次方程式を解くことに帰着する。

まず式（4.39）をつぎのように変形すると

$$\left. \begin{aligned}A(z) &= z^5 + a_1z^4 + a_2z^3 + a_3z^2 + a_4z + a_5 \\ &= (z - A)(z^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E) = 0\end{aligned} \right\} \dots\dots (4.39b)$$

$$\text{ただし、 } B = a_1 + A, \quad C = a_2 + AB, \quad D = a_3 + AC, \quad E = a_4 + AD \quad (\text{or } E = \frac{-a_5}{A})$$

$$\left. \begin{aligned}B(z) &= b_1z^5 + b_2z^4 + b_3z^3 + b_4z^2 + b_5z \\ &= b_1z(z^4 + \frac{b_2}{b_1}z^3 + \frac{b_3}{b_1}z^2 + \frac{b_4}{b_1}z + \frac{b_5}{b_1}) = 0\end{aligned} \right\} \dots\dots (4.39c)$$

になり、 $A(z)$ と $B(z)$ の 1 つの根は $z_1 = A$ と $z_1 = 0$ である。残りの根はそれぞれの 4 次方程式を解くことで得ることができる。4 次方程式の根の公式については、附録に、詳しく 4 次方程式の解法と題して Excel プログラムとともに添付しているので参考にされたい。以下は 4 次方程式の解法に関する解法の手順である。

手順 1：推定した係数列の 4 次方程式解法領域への入力。

図 4.37 の赤枠内のエリアを G3 ~ P3 までドラッグし、コピーする。

図 4.38 の F5 にカーソルを当て、編集（E）形式を選択して張り付けを開き、貼り付け 値（V）を選び、OK（図 4.39）をクリックしてデータを貼り付ける。

	A	B	C	D	E
1	関数 A(z)B(z) のグラフ				
2	z	A(z)	B(z)	係数列	
3	-1	-1.0765	0.258016	モデル	
4	-0.95	-0.84104	0.195772	同定値	
5	-0.9	-0.65252	0.146423	推定値	
6	-0.85	-0.50389	0.107976		
7	-0.8	-0.38879	0.078591		
8	-0.75	-0.30157	0.056576	$A(z^{-1}) = z^5 + a$	
9	-0.7	-0.23719	0.040391	A	
10	-0.65	-0.19122	0.028642	0.45	
11	-0.6	-0.15981	0.02009		
32	0.45	-0.0104	-0.02578	根	
33	0.5	0.01289	0.025513	x1	
34	0.55	0.041291	0.092851	x2	
35	0.6	0.0764	0.178593	x3	
36	0.65	0.120184	0.285246		
37	0.7	0.175026	0.41547		
38	0.75	0.243755	0.572072		
39	0.8	0.329688	0.758012		
40	0.85	0.436666	0.976399		
41	0.9	0.569091	1.23049		
42	0.95	0.731967	1.523694		
43	1	0.93093	1.859571		

図 4.40 A(z)、B(z)の関数の計算

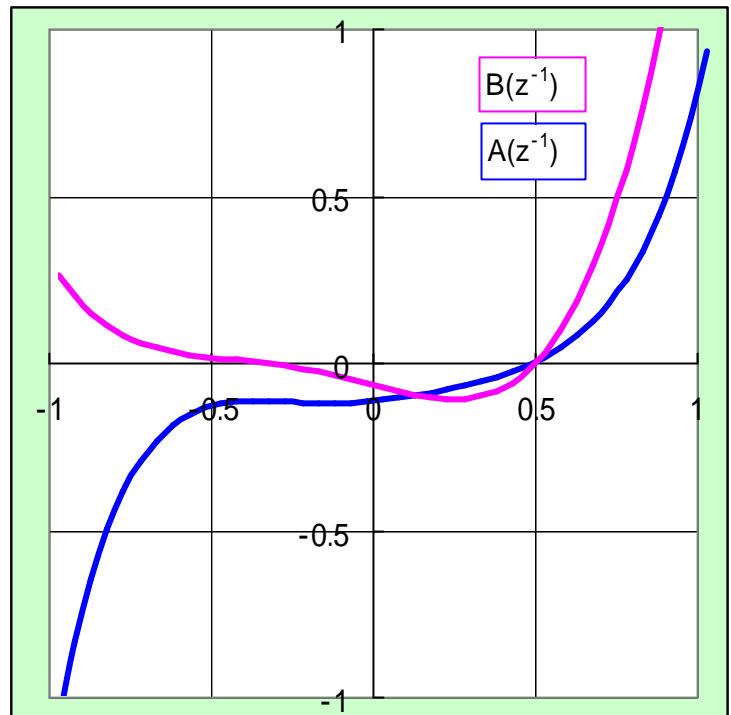


図 4.41 関数 A(z)、B(z)のグラフ

8	$A(z^{-1}) = z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5 = (z - A)(z^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E) = 0$				$B(z^{-1}) = b_1 z \{ z^4 + (b_2/b_1)z^3 + (b_3/b_1)z^2 + (b_4/b_1)z + (b_5/b_1) \} = 0$			
42		根	実数	虚数		根	実数	虚数
43		z1	0.45	0		z1	0	0
44		z2	0.454008	0.6218892		z2	0.476941	0
45		z3	0.454008	-0.621889		z3	-0.41614	0
46		z4	-0.55127	0.6087264		z4	-0.55282	0.630034
47		z5	-0.55127	-0.608726		z5	-0.55282	-0.63003

図 4.42 A(z)=0、B(z)=0 の根の計算エリア

(5) 極・零点消去の結果

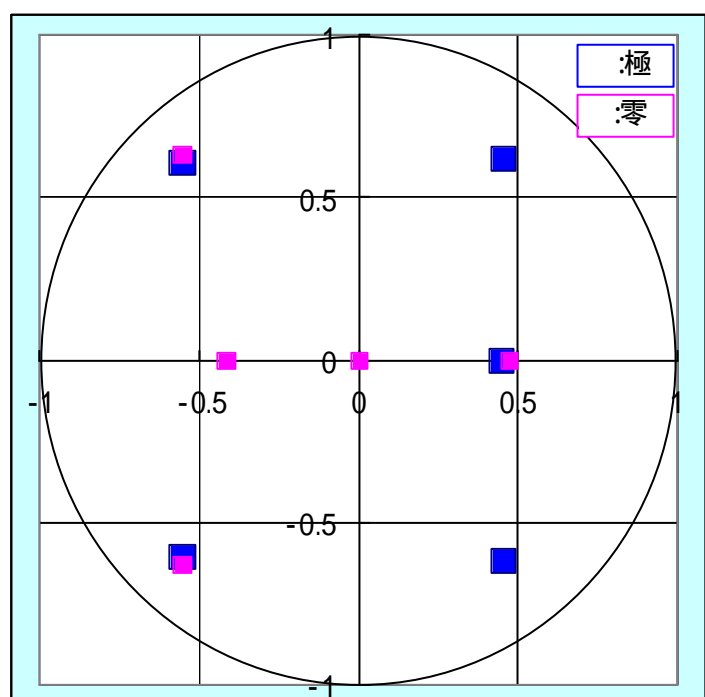
極

0.45,
 0.45401 ± 0.62189
 -0.5513 ± 0.60872

零点

0
 0.47694
 -0.4161
 -0.5528 ± 0.6300

図 4.43 極・零点のプロット



手順 2：関数 $A(z)$ のグラフの作成から根 A を求める（図 4.40 と図 4.41）。

z を 0.05 間隔で、-1 から +1 まで入力、表示する。

関数 $A(z)$ を計算する。

$$\begin{aligned}\hat{A}(z) &= (z - A)(z^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E) \\ &= z^5 - 0.2554z^4 - 0.09926z^3 + 0.2987z^2 + 0.1029z - 0.1162\end{aligned}$$

図 4.40 から関数 $A(z)$ の符号が変わる z の値が根 A である ($0.45 < A < 0.5$)。

根 A を Cell(E10) に入力すると係数 B, C, D および E が式 (4.39b) から求まる。

2 つの 4 次方程式は

$$\left. \begin{aligned} z^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E &= 0 \\ z^4 + \frac{b_2}{b_1}z^3 + \frac{b_3}{b_1}z^2 + \frac{b_4}{b_1}z + \frac{b_5}{b_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} z^4 + 0.1945z^3 - 0.0117z^2 + 0.2936z + 0.2361 &= 0 \\ z^4 + 1.0448z^3 + 0.1391z^2 - 0.2441z - 0.0804 &= 0 \end{aligned}$$

である。

手順 3：4 次方程式の根と 5 次方程式の 1 つの実根を表示する（図 4.42）。

それぞれの方程式の根 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 を確認し、

値の近い根を見つける。

ここでは 0.45 と 0.476941、 $-0.55127 \pm 0.6087264j$ と $-0.5528 \pm 0.6300j$ の 3 つの組が近い根であると見る。

さらにこれらの根をプロットすると極と零点の相殺がよくわかる（図 4.43）。

（5）極・零点消去の結果

上記の手順によって相殺されなかった根はそれぞれ

$$\begin{aligned}A(z) &= \{z - (e + fi)\}\{z - (e - fi)\} = z^2 - 2gz + (e^2 + f^2) \\ e &= 0.45401, \quad f = 0.62189\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B(z) &= b_1z(z - e) = b_1z^2 - b_1gz \\ g &= -0.4161\end{aligned}$$

であるから、プラントモデルの式 (4.38) と係数を比較すると

$$a_1 = -2g, \quad a_2 = e + f, \quad b_2 = -bg$$

になる。ただし、図 4.37 から $b_1 = 0.4995$ である。

すなわち、求める同定モデルは

$$\hat{G}(z) = \frac{0.4995z^{-1} + 0.2078z^{-2}}{1 - 0.9080z^{-1} + 0.5928z^{-2}}$$

を得る。プラントモデルの係数と比較すると良い推定値になっていることがわかる。