

6.1 安定評価の方法

(1) フィードバック制御の安定性の概念

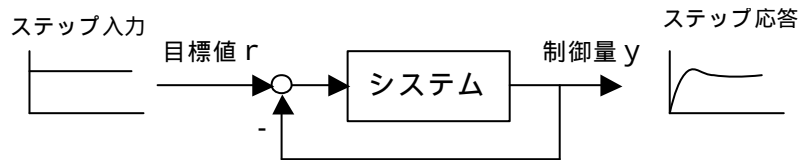


図 6.1 フィードバック結合とステップ応答

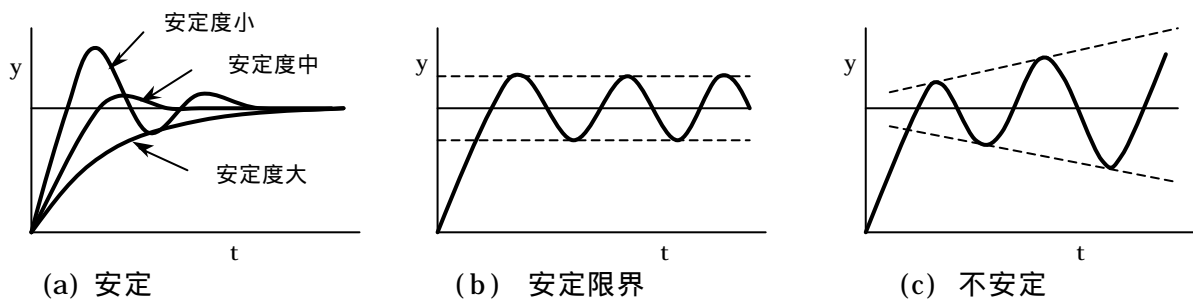


図 6.2 フィードバック制御の安定状態

(2) ナイキストの安定判別法

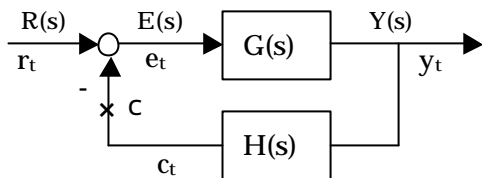


図 6.3 閉ループ結合（閉ループ伝達）

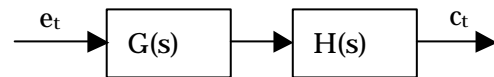


図 6.4 開ループ結合（一巡伝達）

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad \dots\dots (6.1)$$

$$C(s) = G(s)H(s) \quad \dots\dots (6.2)$$

(3) ゲイン余裕と位相余裕

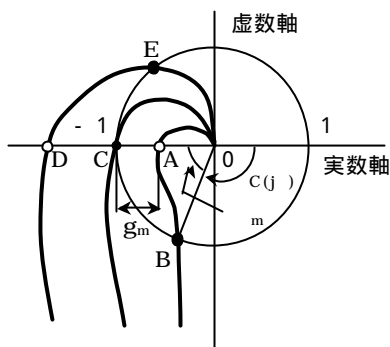


図 6.5 ベクトル軌跡

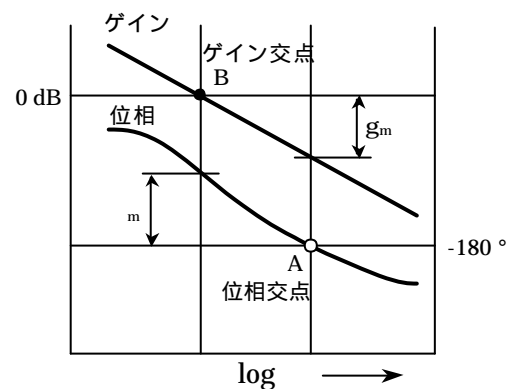


図 6.6 ボード線図

本節では PID と I-PD フィードバック制御の安定性とその評価方法を、よく知られているナイキストの安定判別法とゲイン・位相余裕法から、簡単に説明する。

(1) フィードバック制御の安定性の概念

図 6.1 に示すフィードバック系に目標値としてステップ入力を加えた場合、その出力である操作量が目標値に近づくか、発散するかで、その制御系の安定性を評価している。つまり、制御量が図 6.2(a) に示すように、おおよび のように時間の経過と共に目標値に収束する場合、安定であるといい、図 6.2(b) のように持続的な振動をする場合、安定限界という。また、図 6.2(c) のように時間の経過と共に次第に振幅が大きく発散する場合を不安定という。

フィードバック制御の目的は安定して目標値に一致させることであるが、実際には、ただ安定であるだけでは制御の要求を満足しない。この要求は多くの場合、振動せずに速やかに精度良く目標値に一致すること、つまり、図 6.2(a) の と の間が望まれる。しかし、速応性と安定性とは相反する事象であり、両者の和をとった制御が一般的にならざるおう得ない。下記にシステム制御の安定度合いを調べる評価方法を説明する。

(2) ナイキストの安定判別法

図 6.3 に示すフィードバック制御系の閉ループ伝達関数は式 (6.1) で表わされる。また分母 = 0、すなわち、 $1 + G(s)H(s) = 0$ を特性方程式という。そして偏差 e_t からスタートし、閉ループを c 点で切り開いた図 6.4 の帰口線図を考えると、その伝達式は式 (6.2) で表わされる。この式を開ループ伝達関数あるいは一巡伝達関数という。

ナイキストの安定評価法は、まず一巡伝達関数のベクトル軌跡を描き (図 6.5)、一巡伝達関数の位相角 $\angle C(j\omega)$ が -180° になる角周波数が ω_A のとき

$$|C(j\omega_A)| < 1 \quad \text{ならば安定}$$

$$|C(j\omega_A)| = 1 \quad \text{ならば持続振動 (安定限界)}$$

$$|C(j\omega_A)| > 1 \quad \text{ならば不安定}$$

であると判別する。したがって、ただ単に (制御側からの要求条件とは異なるので)、フィードバック制御系が安定であるためには、角周波数が 0 から ω_A まで増加するとき、図 6.5 の示すベクトル軌跡が点 $(-1, 0)$ の右側を通り、0 に収束すること (図 6.5 の場合) である。

(3) ゲイン余裕と位相余裕

一巡伝達関数におけるベクトル軌跡 (図 6.5) の点 $(-1, 0)$ は $\angle C(j\omega_A) = -180^\circ$ かつ $|C(j\omega_A)| = 1$ の場合である。ゲイン余裕 g_m は位相交点 A での角周波数を ω_A とすると、

$$g_m = 1 / |C(j\omega_A)|$$

で表わされ、位相 $\angle C(j\omega_A)$ が -180° のとき、ゲイン $|C(j\omega_A)|$ があとどれだけ増加すれば 1 になり、不安定になるかという余裕の量を定義している。また、位相余裕 ϕ_m はゲイン $|C(j\omega_B)|$ が 1 であるゲイン交点 B での角周波数を ω_B とすると、

$$\phi_m = 180^\circ + \angle C(j\omega_B)$$

で表わす。そして、ゲイン $|C(j\omega_B)|$ が 1 のとき、位相 $\angle C(j\omega_B)$ があとどれだけ遅れたら -180° になるかという余裕の角度を位相余裕として定義している。

また、ボード線図におけるゲイン余裕と位相余裕を図 6.6 に示している。ゲイン余裕と位相余裕は大きいほどフィードバック制御系の安定度は良くなり、ゲイン余裕と位相余裕が負になるとフィードバック制御系は不安定になる。このようにゲイン余裕と位相余裕の正負と値の大きさは制御系の安定度の目安として利用される。

(4) 安定判別の例

(a) $C_1(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$, $a > 1$

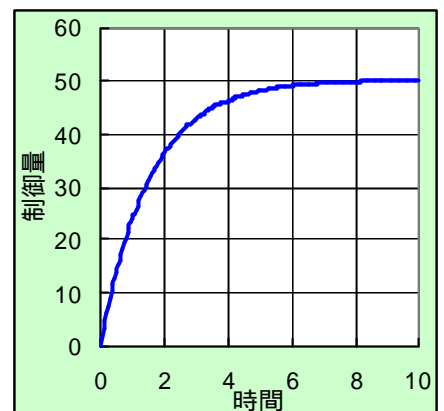
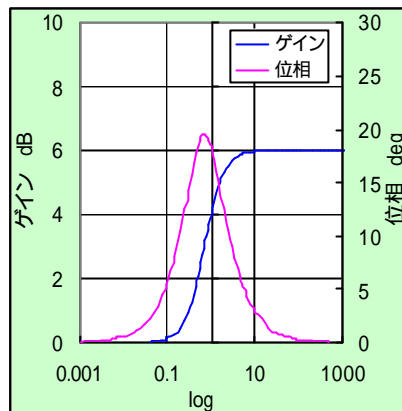
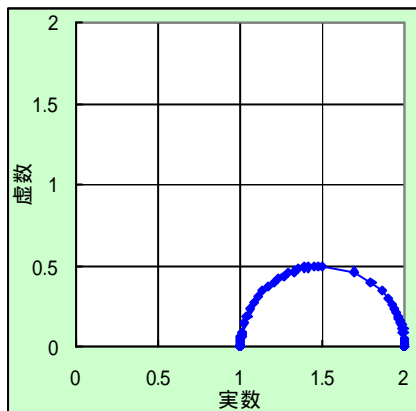


図 6.7 (a) $C_1(j)$ のベクトル軌跡

(b) $C_1(j)$ のボード線図

(c) $C_1(j)$ のステップ応答

(b) $C_2(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$

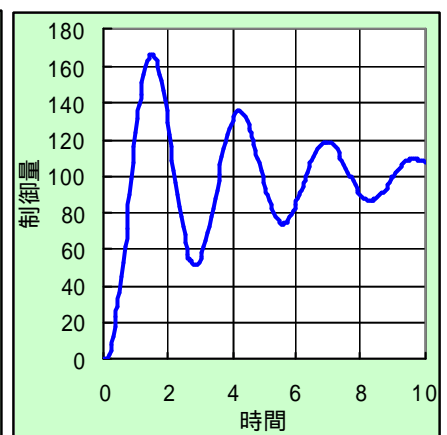
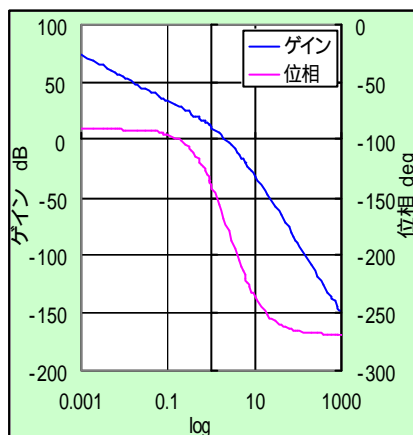
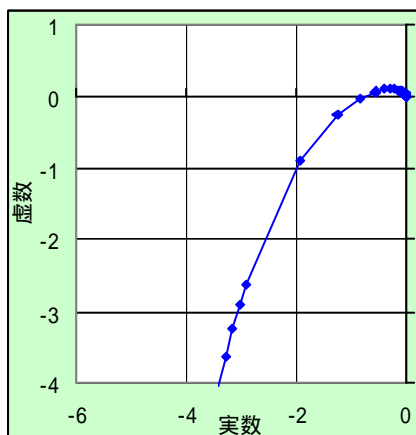


図 6.8 (a) $C_2(j)$ のベクトル軌跡

(b) $C_2(j)$ のボード線図

(c) $C_2(j)$ のステップ応答

(c) $C_3(s) = \frac{K(1+T_2s)}{s^2(1+T_1s)}$, $T_1 > T_2$

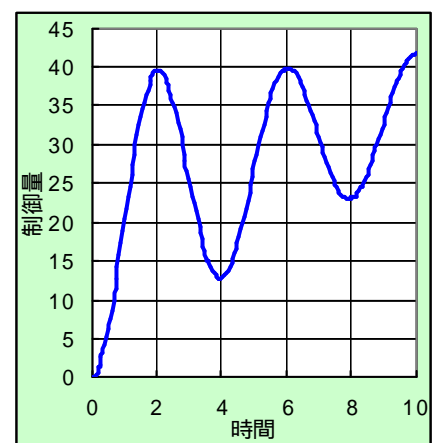
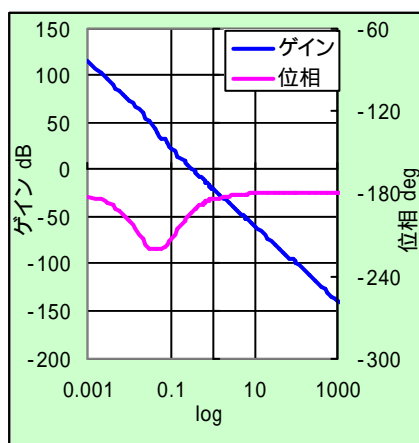
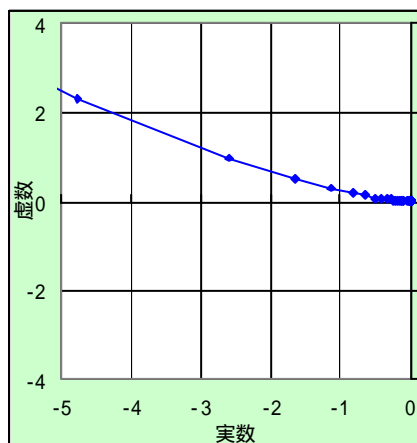


図 6.9 (a) $C_3(j)$ のベクトル軌跡

(b) $C_3(j)$ のボード線図

(c) $C_3(j)$ のステップ応答

(4) 安定判別の例

フィードバック制御系の2, 3の開ループ伝達関数 $C_i(s)$ のベクトル軌跡、ボード線図およびステップ応答の事例を紹介する。下記の事例では式(6.2)で $H(s)=1$ 、 $G(s)=C_i(s)$ の場合である。

(a) $C_1(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$, $a>1$ の場合。 (ただし、図6.7では $a=2$ 、 $T=1$)

$$\text{開ループ周波数伝達関数: } C_1(j\omega) = \frac{1+j\omega aT}{1+j\omega T} = \frac{1+a(\omega T)^2}{1+(\omega T)^2} + j \frac{(a-1)\omega T}{1+(\omega T)^2}$$

$$\text{ゲイン [dB]: } |C_1(j\omega)| = 20 \log \frac{|1+j\omega aT|}{|1+j\omega T|} = 20 \log \sqrt{\frac{1+(a\omega T)^2}{1+(\omega T)^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{位相 [deg]: } \angle C_1(j\omega) &= \angle(1+j\omega aT) - \angle(1+j\omega T) \\ &= \tan^{-1} a\omega T - \tan^{-1} \omega T = \tan^{-1} \frac{(a-1)\omega T}{1+a(\omega T)^2} \end{aligned}$$

図6.7(a)、(b)および(c)に $C_1(j\omega)$ のベクトル軌跡、ボード線図およびステップ応答を示す。 $a>1$ の条件で T の大小に関係なく安定である。

(b) $C_2(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$ の場合。 (ただし、図6.8では $K=5$ 、 $T_1=0.75$ 、 $T_2=0.2$)

$$\begin{aligned} \text{開ループ周波数} \\ \text{伝達関数: } C_2(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \\ &= \frac{-K(T_1+T_2)\omega^2}{(T_2+T_2)^2\omega^4 + (1-T_1T_2\omega^2)\omega^2} + j \frac{-K(1-T_1T_2\omega^2)\omega}{(T_2+T_2)^2\omega^4 + (1-T_1T_2\omega^2)\omega^2} \end{aligned}$$

$$\text{ゲイン [dB]: } |C_2(j\omega)| = 20 \log \frac{|K|}{|j\omega| |1+j\omega T_1| |1+j\omega T_2|} = 10 \log \frac{K}{\omega \sqrt{\{1+(\omega T_1)^2\} \{1+(\omega T_2)^2\}}}$$

$$\begin{aligned} \text{位相 [deg]: } \angle C_2(j\omega) &= \angle K - \{\angle j\omega + \angle(1+j\omega T_1) + \angle(1+j\omega T_2)\} \\ &= -(90^\circ + \tan^{-1} \omega T_1 + \tan^{-1} \omega T_2) \end{aligned}$$

図6.8(a)、(b)および(c)に $C_2(j\omega)$ のベクトル軌跡、ボード線図およびステップ応答を示す。 K が小さいときは安定、 K が増大すると不安定になる。

(c) $C_3(s) = \frac{K(1+T_2s)}{s^2(1+T_1s)}$, $T_1>T_2$ の場合。 (ただし、図6.9では $K=0.5$ 、 $T_1=50$ 、 $T_2=10$)

$$\text{開ループ周波数伝達関数: } C_3(j\omega) = \frac{K(1+j\omega T_2)}{(j\omega)^2(1+j\omega T_1)} = \frac{-K}{\omega^2} \left\{ \frac{1+\omega T_1 T_2}{1+(\omega T_1)^2} + j \frac{\omega(T_2-T_1)}{1+(\omega T_1)^2} \right\}$$

$$\text{ゲイン [dB]: } |C_3(j\omega)| = 20 \log \frac{|K| |1+j\omega T_2|}{|(j\omega)^2| |1+j\omega T_1|} = 20 \log \frac{K}{\omega^2} \sqrt{\frac{1+(\omega T_2)^2}{1+(\omega T_1)^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{位相 [deg]: } \angle C_3(j\omega) &= \angle K + \angle(1+j\omega T_2) - \{2\angle j\omega + \angle(1+j\omega T_1)\} \\ &= \tan^{-1} \omega T_2 - (180^\circ + \tan^{-1} \omega T_1) \end{aligned}$$

図6.9(a)、(b)および(c)に $C_3(j\omega)$ のベクトル軌跡、ボード線図およびステップ応答を示す。ベクトル軌跡が点(-1,0)の右側を通らないので不安定になる。