

6.3 I-PD 制御の安定性評価

(1) I-PD 制御

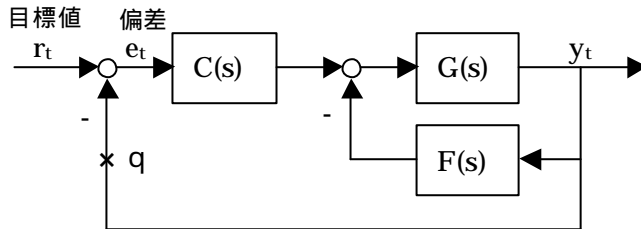


図 6.21 I-PD 制御ブロック線図

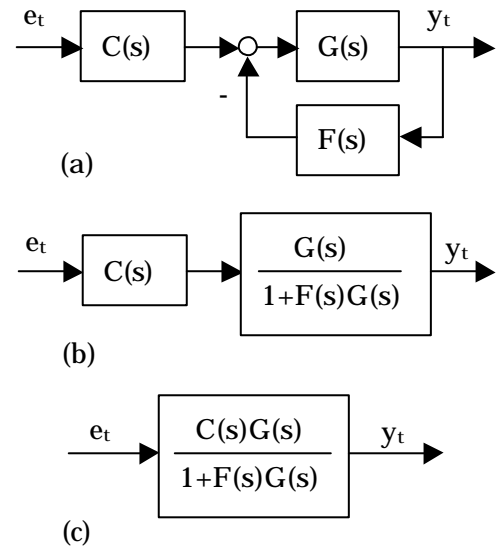


図 6.22 I-PD 制御開ループ伝達関数

$$G(s) = \frac{w_n^2}{w_n^2 + 2\zeta w_n s + s^2} \quad \dots\dots (6.7)$$

$$C(s) = \frac{1}{K_I s}, \quad F(s) = K_P + K_D s \quad \dots\dots (6.8)$$

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + \{C(s) + F(s)\}G(s)} \quad \dots\dots (6.9)$$

$$G_0(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} \quad \dots\dots (6.10)$$

(2) ベクトル軌跡

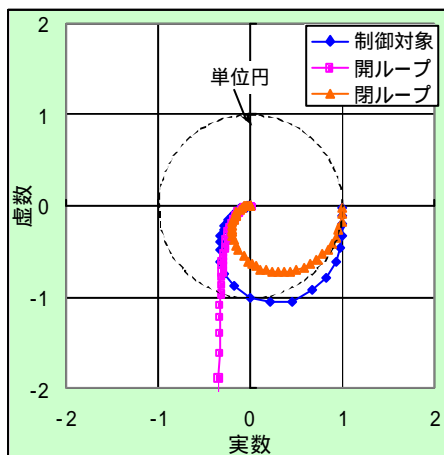
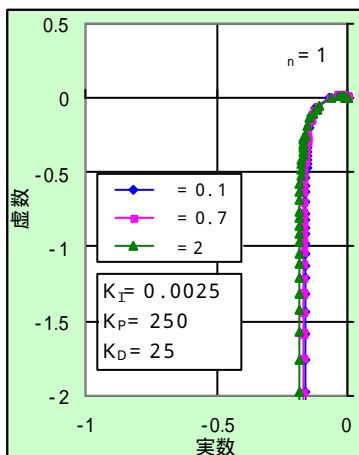
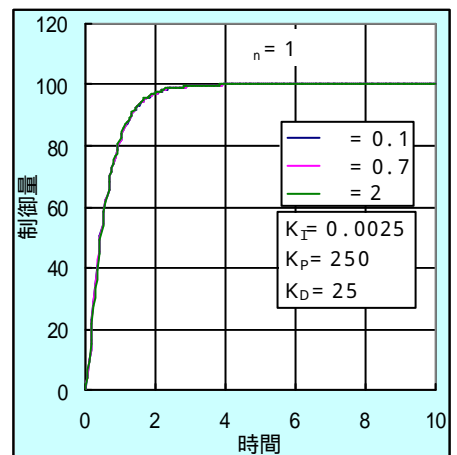


図 6.22 $W(j\omega)G_0(j\omega)$ のベクトル軌跡



(a) $G_0(j\omega)$ ベクトル軌跡 ($\zeta > 0$)



(b) ステップ応答 ($\zeta > 0$)

図 6.23 IPD 定数最適化時のベクトル軌跡とステップ応答

PID フィードバック制御の安定性評価に引続き、重複するところもあるが、ベクトル軌跡とボード線図を用いて簡単に I-PD フィードバック制御の安定性を説明する。

(1) I-PD 制御

I-PD フィードバック制御のブロック線図は前に説明したように図 6.21 で表現され、開ループ伝達関数は偏差 e_t から点 q まで切り開いた伝達関数である。その状態を図 6.22(a)に示す。さらに(b) (c)の順に結合すると閉ループ (一巡) 伝達関数が求まる。制御対象の伝達関数 $G(s)$ を前節と同様に一般的な 2 次遅れ系式 (6.7) で表わし、I-PD 制御関数 $C(s)$ と $F(s)$ を式 (6.8) にすると、閉ループ伝達関数と開ループ伝達関数は次式で表わされる。

$$W(s) = \frac{w_n^2}{w_n^2 + w_n^2 K_I (1 + K_P)s + w_n K_I (2V + w_n K_D)s^2 + K_I s^3} \quad \dots\dots (6.9a)$$

$$G_0(s) = \frac{w_n^2}{K_I s \{ w_n^2 (1 + K_P) + w_n (2V + w_n K_D)s + s^2 \}} \quad \dots\dots (6.10a)$$

この両式は AR モデルであるから零点が存在しない。つまり、極・零点の相殺は生じない。

また、それぞれの周波数伝達関数は

$$W(jw) = \frac{w_n^2 A}{A^2 + B^2} + j \frac{-w_n^2 B}{A^2 + B^2} \quad \dots\dots (6.9b)$$

$$\text{ただし、 } A = w_n^2 - w_n K_I (2V + w_n K_D) w^2$$

$$B = w_n^2 K_I (1 + K_P) w - K_I w^3$$

$$G_0(jw) = \frac{w_n^2 a}{K_I (a^2 + b^2)} + j \frac{-w_n^2 b}{K_I (a^2 + b^2)} \quad \dots\dots (6.10b)$$

$$\text{ただし、 } a = -w_n (2V + w_n K_D) w^2$$

$$b = w_n^2 (1 + K_P) w - w^3$$

である。

(2) ベクトル軌跡

閉ループ伝達関数のベクトル軌跡は式 (6.9b) の実数部と虚数部を次式により求め、実数軸と虚数軸にプロットすることで得られる。

$$x_w = \frac{w_n^2 A}{A^2 + B^2}, \quad y_w = \frac{-w_n^2 B}{A^2 + B^2}$$

同様に、開ループ (一巡) 伝達関数の実数部と虚数部は次式により求めることができる。

$$x_0 = \frac{w_n^2 a}{K_I (a^2 + b^2)}, \quad y_0 = \frac{-w_n^2 b}{K_I (a^2 + b^2)}$$

制御対象、閉ループおよび開ループ伝達関数のベクトル軌跡の例を図 6.22 に示す。ほぼベストチューニングされた IPD 定数と制御対象伝達関数係数は $(K_I, K_P, K_D) = (0.0025, 250, 25)$ と $(\quad, \quad_n) = (0.7, 1)$ である。ベクトル軌跡は虚数軸に平行に移動し、実数軸に接近すると原点に向かって円弧を描き、点 $(-1, 0)$ の遙かに右側をとるので、当然、制御系は安定になる。さらに、開ループのベクトル軌跡は同じ IPD 定数でパラメータ を変化しても大きく変わらず、図 6.23(a) と (b) が示すようにステップ応答もほぼ一致した制御状態を表わしている。I-PD 制御は制御対象の伝達関数が多少変化

(3) ボード線図

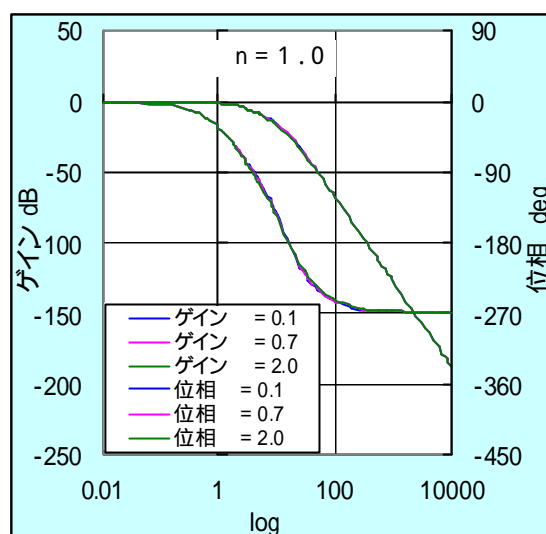
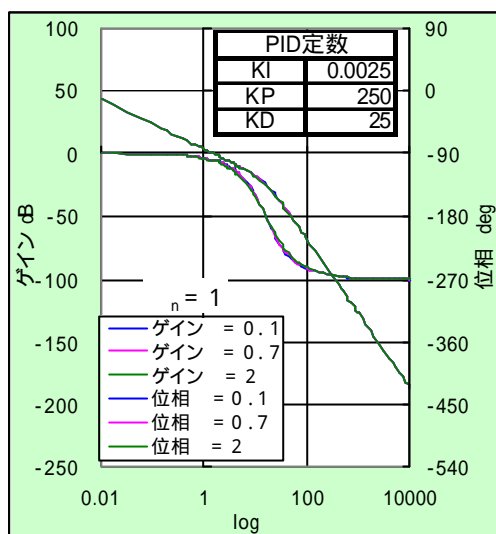


図 6.23 (a) $G_0(j)$ のボード線図 (> 0)

(b) $W(j)$ のボード線図 (> 0)

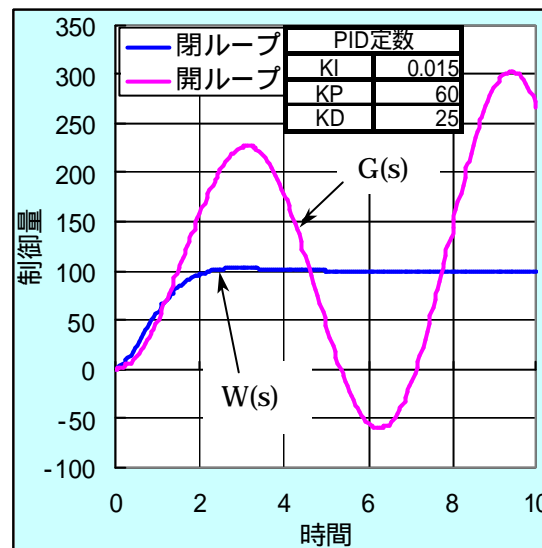
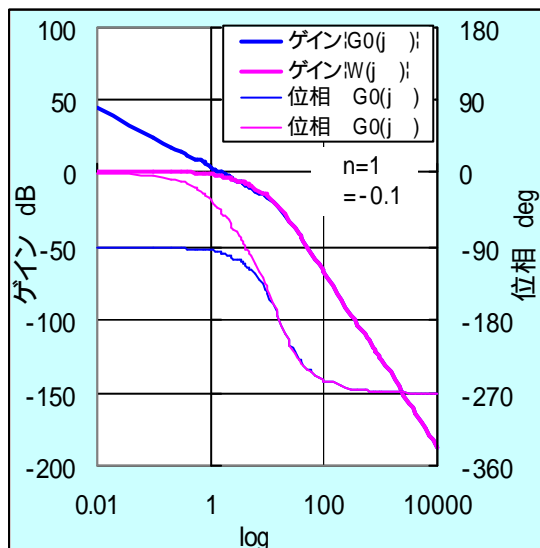


図 6.24 $G_0(j)$ と $W(j)$ のボード線図 (< 0)

図 6.25 ステップ応答 (< 0)

(4) 閉ループ伝達関数の極

表 6.3 パラメータ と閉ループ伝達関数 $W(s)$ の極

(a) $= 0.7$

($n=1$)

PID定数	
KI	0.003
KP	220
KD	20

$W(s)$ 極	実数	虚数
s_1	-1.7937	0
s_2	-9.8031	9.4726
s_3	-9.8031	-9.4726

(b) $= 2$

($n=1$)

PID定数	
KI	0.003
KP	200
KD	30

$W(s)$ 極	実数	虚数
s_1	-27.017	0
s_2	-3.4916	0.38339
s_3	-3.4916	-0.3834

(c) $= -0.1$

($n=1$)

PID定数	
KI	0.015
KP	60
KD	25

$W(s)$ 極	実数	虚数
s_1	-22.186	0
s_2	-1.307	1.13868
s_3	-1.307	-1.1387

しても、同じ IPD 定数で良好な制御ができ、安定性に優れていることが特徴である。

(3) ボード線図

閉ループの場合のゲインと位相は

$$|W(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega_n^2 A}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega_n^2 B}{A^2 + B^2}\right)^2} \quad [\text{dB}]$$

$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) &= \angle \omega_n^2 - \angle \left[\{\omega_n^2 - \omega_n K_I (2V + \omega_n K_D) \omega^2\} + j \{\omega_n^2 K_I (1 + K_P) \omega - K_I \omega^3\} \right] \\ &= -\tan^{-1} \frac{\omega_n^2 K_I (1 + K_P) \omega - K_I \omega^3}{\omega_n^2 - \omega_n K_I (2V + \omega_n K_D) \omega^2} \\ &= -\tan^{-1} \frac{B}{A} \quad [\text{deg}] \end{aligned}$$

で算出でき、また、開ループの場合のゲインと位相は

$$|G_0(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega_n^2 a}{K_I (a^2 + b^2)}\right)^2 + \left(\frac{-\omega_n^2 b}{K_I (a^2 + b^2)}\right)^2} \quad [\text{dB}]$$

$$\begin{aligned} \angle G_0(j\omega) &= \angle \omega_n^2 - \angle \left[\{-\omega_n (2V + \omega_n K_D) \omega^2\} + j \{\omega_n^2 (1 + K_P) \omega - \omega^3\} \right] \\ &= -\tan^{-1} \frac{\omega_n^2 (1 + K_P) \omega - \omega^3}{-\omega_n (2V + \omega_n K_D) \omega^2} \\ &= -\tan^{-1} \frac{b}{a} \quad [\text{deg}] \end{aligned}$$

で計算できる。

制御対象の伝達関数パラメータ が正と負の場合の制御状態について数値シミュレーションを行ない、制御状態の安定性を調べる。

(a) $\zeta > 0$ の場合 ($0 < \zeta < 1$: 減衰振動、 $1 < \zeta$: 振動なし安定)

ベクトル軌跡のところで調べた IPD 定数では、開ループボード線図は図 6.23 (a) に示すようにパラメータ ζ を 0.1 ~ 2 まで変化させてもゲイン、位相ともほぼ一致している。また、閉ループボード線図も図 6.23 (b) に示すとおり 3 条件とも同様に一致する。

(b) $\zeta = 0$ の場合 ($\zeta = 0$: 持続振動、 $\zeta < 0$: 発散振動)

$\zeta = -0.1$ の場合の図 6.24 において、開ループゲインは低周波数域では -20dB、高周波数域では -60dB の直線になり、位相は -90° から -270° になる。一方、閉ループゲインは、低周波数域では 0 dB、高周波数域では -60dB であり、位相も高周波域になると -180° から開ループと一致する。図 6.25 のステップ応答から発散振動する制御対象でも I-PD 制御は安定性がすこぶる良好であるといえる。

(4) 閉ループ伝達関数の極

I-PD 制御の閉ループ伝達関数は AR モデルであるから極・零点の相殺は起きないが極の実数部の正負が安定を決めるので調べてみる。極は式 (6.9a) の分母=0 であるから、次式の根を 3 次方程式の根

$$s^3 + \omega_n (2V + \omega_n K_D) s^2 + \omega_n^2 (1 + K_P) s + \omega_n^2 / K_I = 0$$

の公式を用いて求める。表 6.2 は (a) $0 < \zeta < 1$ 、(b) $1 < \zeta$ および (c) $\zeta < 0$ の場合の代表を例にとり、かつ IPD 常数を最適にチューニングした場合の根 (s_1, s_2, s_3) である。計算の結果、すべての根の実数部は負であるから、I-PD 制御系は ζ の広い領域において安定である。