
表現論の基礎

～ Lie 代数と Lie 群 ～

内藤と大垣と国井と山口のセミナー

No. 1

はじめに

Lie 代数と Lie 群, その表現論について述べる予定. 一般的な流れとしてはまず多様体の復習をしながら Lie 群, Lie 群の Lie 代数を定義した後, Lie 群と Lie 代数の関係に進むと思うが, 本セミナーではまず Lie 代数の一般論について一通り述べた後, Lie 群について簡単に説明する予定である. あくまで本セミナーの主役は Lie 代数である. このセミナーの内容が表現論, 変換群論を勉強しようとしている方々および幾何学者を目指す方々の役に立てるならば幸いである.

なお, 本ノートでは証明を一切与えていないが, セミナー時にはしっかり証明を与える予定である.

参考文献

本セミナーでは学部レベルの線型代数 (線形代数学 I, II, 代数学 I), 代数系の基礎 (代数学 II, A, B) および多様体論の初歩的知識 (幾何学 B) を仮定する. 表現論に関する知識は仮定しない. 以下に参考文献を紹介しておく. その他の参考文献は適宜紹介する.

- [1] Bump, D., *Lie Groups*, G.T.M. 225, Springer (2004)
- [2] Fulton, W. and Harris, J., *Representation Theory : A First Course*, G.T.M. 129, Springer (1991)
- [3] Humphreys, J. E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, G.T.M. 9, Springer (1972)

- [4] Jacobson, N., *Lie Algebras*, John Wiley & Sons, Inc. (1962)
- [5] 小林 俊行・大島 利雄, リー群と表現論, 岩波書店 (2005)
- [6] 松島 与三, リー環論, 現代数学講座 15, 共立出版 (1956)
- [7] 村上 信吾, 連続群論の基礎, 朝倉書店 (2003)
- [8] Samelson, H., *Notes on Lie Algebras*, Universitext, Springer (1990)
- [9] 佐武 一郎, リー環の話, 日本評論社 (1987)
- [10] Serre, J.-P., *Lie Algebras and Lie Groups*, L.N.M. 1500, Springer (2003)
- [11] 東郷 重明, リー代数, 槇書店 (1983)

注意

以下に本セミナーの注意をまとめておく .

- \mathbb{k} は体を表すものとする . 特に断らない限り $\text{char } \mathbb{k}$ は任意とする .
- 有限次元線型空間を単に線型空間ということにする .
- “環” といえば単位元 $1 (\neq 0)$ をもつこととする . 積の可換性は仮定しない . また , “環準同型” といえば単位元を保つものとする .
- \mathbb{N} は非負整数全体を表し , \mathbb{Z}_+ は正整数全体を表す .
- E_n は n 次単位行列を表す . また , 0 は零行列を表す .
- \mathbb{k} -係数 n 次正方行列全体の集合を $M(n, \mathbb{k})$ で表す .
- \mathbb{k} -線型空間 V に対してその双対空間を V^* で表す : $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$.
- \mathbb{k} -線型空間 V, W に対して $V \times W$ 上の双線型写像全体の集合を $\text{Bil}(V, W, \mathbb{k})$ で表す . 特に $V = W$ のとき $\text{Bil}(V)$ と表す .
- $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{A}_n$ はそれぞれ n 次対称群 , n 次交代群を表す .
- R を環 , $S \subseteq R$ を部分集合とすると , S で生成されるイデアルを $\langle S \rangle$ で表す .

第 1 章

Lie 代数の基本概念

この章では Lie 代数およびその表現に関する基本的な概念について述べる．線型代数と群・環の簡単な知識があれば十分理解できるであろうと思われる．

1.1 Lie 代数の定義

Lie 代数を定義する前に代数学の簡単な復習をしよう．

定義 A \mathbb{k} -線型空間 A に双線型な (可換とは限らない) 積が定義されていて, その積と線型空間としての和に関して A が (可換とは限らない) 環になるとき A を \mathbb{k} -(結合) 代数, または \mathbb{k} -多元環 ((associative) algebra over \mathbb{k}) という．また, \mathbb{k} -多元環 A と A' の間の写像 $f: A \rightarrow A'$ が \mathbb{k} -多元環準同型 (\mathbb{k} -algebra homomorphism) であるとは, f が \mathbb{k} -線型写像かつ環準同型であるときをいう．

以下では, \mathbb{k} -多元環が積に関して可換であるとき \mathbb{k} -代数 (\mathbb{k} -algebra) と呼び, そうでないとき非可換 \mathbb{k} -代数 (noncommutative \mathbb{k} -algebra) と呼ぶことにする．

定義 B \mathbb{k} -代数 A がその部分線型空間 $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ の直和 $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_k$ に等しく, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$ となるとき, A を次数付き \mathbb{k} -代数 (graded \mathbb{k} -algebra) という． $x \in A_k$ を k 次斉次元 (homogeneous element of degree k) という．また, この k を x の斉次次数 (homogeneous degree of x) といい, $\deg x = k$ と表す．

定義 C \mathbb{k} -代数 A の部分線型空間の族 $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ で,

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k \supseteq \cdots$$

をみたすものを A のフィルトレーション (filtration of A) という．

1.1.1 Lie 代数とは

定義 1.1.1 \mathbb{k} -線型空間 L に以下をみたすような括弧積 (bracket) と呼ばれる双線型写像 $[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L$ が定義されるとき, L を \mathbb{k} 上の Lie 代数 (Lie algebra over \mathbb{k}) という:

(LA1) 任意の $x \in L$ に対して $[x, x] = 0$ であり,

(LA2) 括弧積 $[\cdot, \cdot]$ は Jacobi 恒等式 (Jacobi identity) をみたす. つまり, 任意の $x, y, z \in L$ に対して

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (1.1.1)$$

が成り立つ.

\mathbb{R} 上の Lie 代数を実 Lie 代数 (real Lie algebra), \mathbb{C} 上の Lie 代数を複素 Lie 代数 (complex Lie algebra) ともいう. 「 \mathbb{k} 上の Lie 代数」を簡単に「 \mathbb{k} -Lie 代数」ということにする.

補題 1.1.2 定義 1.1.1 の条件 (LA1) が成り立てば, 任意の $x, y \in L$ に対して $[y, x] = -[x, y]$ が成り立つ. $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ ならば逆も成り立つ.

例 1.1.3 \mathbb{R}^3 は括弧積 $[x, y] := x \times y$ (外積) によって実 Lie 代数の構造をもつ.

例 1.1.4 A を \mathbb{k} -代数とするととき, $x, y \in A$ に対して $[x, y] := xy - yx$ と定義することで A は Lie 代数となる. \mathbb{k} -代数 A を Lie 代数とみるとき A_L と表すことにする.

定義 1.1.5 L を n 次元 \mathbb{k} -Lie 代数, $\mathcal{X} := \{x_1, \dots, x_n\}$ をその基底とすると, 任意の $i, j \in I_n = \{1, \dots, n\}$ に対して $[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k x_k$ と書ける. この a_{ij}^k を \mathcal{X} に関する構造定数 (structure constants for \mathcal{X}) という.

命題 1.1.6 定義 1.1.5 と同じ記号の下, 以下が成り立つ.

- (1) $a_{ii}^k = 0, \quad (\forall i, \forall k \in I_n).$
- (2) $a_{ij}^k + a_{ji}^k = 0, \quad (\forall i, \forall j, \forall k \in I_n).$
- (3) $\sum_{m \in I_n} \left(a_{ij}^m a_{mk}^\ell + a_{jk}^m a_{mi}^\ell + a_{ki}^m a_{mj}^\ell \right) = 0, \quad (\forall i, \forall j, \forall k, \forall \ell \in I_n).$

定義 1.1.7 \mathbb{k} -Lie 代数 L が可換 (abelian) であるとは任意の $x, y \in L$ に対して $[x, y] = 0$ が成り立つときをいう .

定義 1.1.8 \mathbb{k} -Lie 代数 L の空でない部分集合 M で以下をみたすものを部分 Lie 代数 (Lie subalgebra) という :

- (i) M は L の \mathbb{k} -部分線型空間である ,
- (ii) 任意の $x, y \in M$ に対して $[x, y] \in M$ が成り立つ .

例 + 定義 1.1.9 L を \mathbb{k} -Lie 代数とする .

- (1) 線型部分空間 $V \subseteq L$ に対して

$$N_L(V) := \{x \in L \mid \text{任意の } v \in V \text{ に対して } [x, v] \in V\} \quad (1.1.2)$$

は L の部分 Lie 代数となる . この $N_L(V)$ を L における V の正規化部分代数 (normalizer of V at L) という .

- (2) $M = N_L(M)$ をみたす部分 Lie 代数 $M \subseteq L$ を自己正規化部分代数 (self-normalizer) という .

- (3) 部分集合 $X \subseteq L$ に対して

$$C_L(X) := \{x \in L \mid \text{任意の } y \in X \text{ に対して } [x, y] = 0\} \quad (1.1.3)$$

は L の部分 Lie 代数となる . この $C_L(X)$ を L における X の中心化部分代数 (centralizer of V at L) という .

定義 1.1.10 加法群 L に積 $[\cdot, \cdot]$ が定義され , さらに以下をみたすとき L を Lie 環 (Lie ring) という :

- (LR1) 和と積は分配的である . つまり , 任意の $x, y, z \in L$ に対して

$$[x + y, z] = [x, z] + [y, z], \quad [x, y + z] = [x, y] + [x, z] \quad (1.1.4)$$

が成り立ち ,

- (LR2) 任意の $x \in L$ に対して $[x, x] = 0$ であり ,
- (LR3) 積は Jacobi 恒等式をみたす .

定義から Lie 代数は明らかに Lie 環である .

1.1.2 線型 Lie 代数とその部分代数

n 次元 \mathbb{k} -線型空間 V に対して $\text{End}(V) = M(n, \mathbb{k})$ は自然に環構造をもつのでその積を利用して $[\ , \]$ を

$$[f, g] := fg - gf \quad (1.1.5)$$

と定義することで $\text{End}(V)$ は Lie 代数の構造をもつ。これを一般線型 Lie 代数 (general linear Lie algebra) という。 $\text{End}(V)$ を Lie 代数とみるときは $\mathfrak{gl}(V)$, $M(n, \mathbb{k})$ を Lie 代数とみるときは $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ と表す^{*1}。

定義 1.1.11 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ の部分 Lie 代数を線型 Lie 代数 (linear Lie algebra) という。

以下は行列の作る群を Lie 代数とみなした例である：

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k}) := \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \mid \text{Tr } A = 0\}, \quad (1.1.6)$$

$$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{k}) := \{A \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{k}) \mid {}^tAJ + JA = 0\}, \quad (1.1.7)$$

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{k}) := \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \mid {}^tA + A = 0\} \quad (1.1.8)$$

ただし

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -E_n \\ E_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

定義 1.1.12 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$ を特殊線型 Lie 代数 (special linear Lie algebra), $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{k})$ を斜交線型 Lie 代数 (symplectic linear Lie algebra), $\mathfrak{o}(n, \mathbb{k})$ を直交線型 Lie 代数 (orthogonal linear Lie algebra) という。

以下は特に名前はないが線型 Lie 代数の大事な例である：

$$\mathfrak{t}(n, \mathbb{k}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \mid a_{ij} = 0 \ (i > j)\}, \quad (1.1.9)$$

$$\mathfrak{n}(n, \mathbb{k}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \mid a_{ij} = 0 \ (i \geq j)\}, \quad (1.1.10)$$

$$\mathfrak{d}(n, \mathbb{k}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \mid a_{ij} = 0 \ (i \neq j)\}. \quad (1.1.11)$$

^{*1} 一般線型 Lie 代数をドイツ文字で $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ と表すのは一般線型 Lie 群 $GL(n, \mathbb{k})$ の Lie 代数だから。このほかの例も同様。Lie 群と Lie 代数の関係は別の機会に。

1.1.3 イdealと準同型写像

定義 1.1.13 Lie 代数 L の真部分集合 $I \subseteq L$ で以下をみたすものを L のイdeal (ideal of L) という :

- (i) I は L の部分線型空間で,
- (ii) 任意の $x \in I$ と任意の $a \in L$ に対して $[a, x] \in I$ が成り立つ.

例 + 定義 1.1.14 Lie 代数 L に対して

$$Z(L) := \{x \in L \mid \text{任意の } a \in L \text{ に対して } [a, x] = 0\} \quad (1.1.12)$$

は L のイdealである. このイdealを L の中心 (center of L) という.

定義 1.1.15 V, W を Lie 代数 L のイdealとするとき線型空間としての和 $V + W$ は再びイdealとなる. これをイdealの和という. また, イdeal V, W に対して

$$[V, W] := \left\{ \sum_{\text{有限和}} [v_i, w_i] \mid v_i \in V, w_i \in W \right\} \quad (1.1.13)$$

もイdealとなる. これをイdealの括弧積と呼ぶ.

例 + 定義 1.1.16 \mathbb{k} -Lie 代数 L に対して

$$[L, L] := \left\{ \sum_{\text{有限和}} [x_i, y_i] \mid x_i, y_i \in L \right\} \quad (1.1.14)$$

と定義すると $[L, L]$ は L のイdealになる. これを L の導来イdeal (derived ideal of L) という.

定義 1.1.17 \mathbb{k} -Lie 代数 L が単純 (simple) であるとは, L のイdealが 0 と L のみで, さらに $[L, L] \neq 0$ であるときをいう.

補題 1.1.18 \mathbb{k} -Lie 代数 L に関して以下が成り立つ.

- (1) L が可換であるための必要十分条件は $Z(L) = L$ であることである.
- (2) L が単純ならば $Z(L) = 0$ かつ $[L, L] = L$ である.

L を Lie 代数とし, $I \subseteq L$ をそのイデアルとする. I は L の部分線型空間なので線型空間としての商空間 L/I を考えることができる. この商空間に括弧積を以下のように定義する:

$$\text{任意の } x + I, y + I \in L/I \text{ に対して } [x + I, y + I] := [x, y] + I. \quad (1.1.15)$$

この括弧積は無矛盾に定義されていることが容易にわかる. この L/I を剰余 Lie 代数 (Lie residue algebra) という.

定義 1.1.19 \mathbb{k} -Lie 代数間の \mathbb{k} -線型写像 $f: L \rightarrow L'$ で, 以下をみたすものを Lie 代数準同型写像 (Lie algebra homomorphism) という:

$$\text{任意の } x, y \in L \text{ に対して } f([x, y]) = [f(x), f(y)] \text{ が成り立つ.}$$

命題 1.1.20 L を \mathbb{k} -Lie 代数, $I \subseteq L$ をイデアルとすると, L のイデアルで I を含むものと, L/I のイデアルの間に自然な一対一対応が存在する.

Lie 代数準同型 $f: L \rightarrow L'$ に対して

$$\text{Ker } f := \{x \in L \mid f(x) = 0\}, \quad (1.1.16)$$

$$\text{Im } f := \{f(x) \in L' \mid x \in L\} \quad (1.1.17)$$

をそれぞれ f の核 (kernel of f), f の像 (image of f) という. 核は L のイデアルであり, 像は L' の部分 Lie 代数であることは明らか.

定理 1.1.21 [Lie 代数準同型定理] Lie 代数準同型 $f: L \rightarrow L'$ に対して $L/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f$ が成り立つ.

系 1.1.22

- (1) $f: L \rightarrow L'$ を全射 Lie 代数準同型写像, $I' \subseteq L'$ をイデアルとするとき $f^{-1}(I') \subseteq L$ はイデアルで, $L/f^{-1}(I') \simeq L'/I'$.
- (2) L を Lie 代数, $I, J \subseteq L$ を $I \subseteq J$ なる L のイデアルとすると $L/J \simeq (L/I)/(J/I)$.
- (3) L が Lie 代数, $I \subseteq L$ が L のイデアル, $M \subseteq L$ が L の部分 Lie 代数ならば $M/(M \cap I) \simeq (M + I)/I$.

1.1.4 直積，直和，導分，半直積

定義 1.1.23 \mathbb{k} -Lie 代数の族 $\{L_i\}_{i \in I}$ の線型空間としての直積 $\prod_{i \in I} L_i$ ，直和 $\bigoplus_{i \in I} L_i$ は以下のように括弧積を定義することで Lie 代数とみなせる．これを Lie 代数の直積 (direct product)，直和 (direct sum) という：

$$[(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}] := ([x_i, y_i])_{i \in I}, \quad (1.1.18)$$

$$\left[\sum_{i \in I} x_i, \sum_{i \in I} y_i \right] := \sum_{i \in I} [x_i, y_i]. \quad (1.1.19)$$

\mathbb{k} -Lie 代数 L がそのイデアルの族 $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の線型空間としての直和 $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ と書けるとき， L はイデアル $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直和であるという．

命題 1.1.24 L を \mathbb{k} -Lie 代数， $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を L のイデアルの族とし，線型空間としては $L = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ と表せるとする．このとき，Lie 代数として $L \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ が成り立つ．

定義 1.1.25 L を \mathbb{k} -Lie 代数とする． \mathbb{k} -線型変換 $\delta : L \rightarrow L$ が L の \mathbb{k} -導分^{*2} (derivation of L over \mathbb{k}) であるとは，任意の $x, y \in L$ に対して

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)] \quad (1.1.20)$$

が成り立つときをいう．また， L の \mathbb{k} -導分全体を $\text{Der}_{\mathbb{k}} L$ で表す．

L を Lie 代数とし， $x \in L$ とするとき

$$\text{ad}_L x : L \longrightarrow L ; \quad y \longmapsto [x, y] \quad (1.1.21)$$

は \mathbb{k} -導分である．これを x に付随する導分 (derivation associated to x) という．

L の導分 δ に対して $\delta = \text{ad}_L x$ なる $x \in L$ が存在するとき δ を内部導分 (inner derivation) といい，そうでないとき外部導分 (outer derivation) という．内部導分全体の集合を $\text{ad } L$ と表すことにする：

$$\text{ad } L := \{ \text{ad}_L x \in \text{Der}_{\mathbb{k}} L \mid x \in L \}.$$

^{*2} 導分概念も一般に環上の加群で展開される． \mathbb{k} -微分とも訳す．

補題 1.1.26 L は \mathbb{k} -Lie 代数とする .

- (1) $\text{Der}_{\mathbb{k}} L \subseteq \mathfrak{gl}(L)$ は部分 Lie 代数である .
- (2) $\text{ad } L$ は $\text{Der}_{\mathbb{k}} L$ のイデアルである .

補題 1.1.27 L を \mathbb{k} -Lie 代数とする .

- (1) $x \in L$ に対して $\text{Ker}(\text{ad}_L x) = C_L(x)$ である .
- (2) $\text{ad} : L \longrightarrow \text{Der}_{\mathbb{k}} L$; $x \longmapsto \text{ad}_L x$ とするとき , $\text{Ker}(\text{ad}) = Z(L)$. よって準同型定理から $\text{ad } L \simeq L/Z(L)$.

L から L への同型写像を L の自己同型写像 (automorphism of L) といい , L の自己同型写像全体の集合を $\text{Aut } L$ と表す . $\text{Aut } L$ が群になることは明らかである .

さて , $\text{char } \mathbb{k} = 0$ とし , $\delta \in \text{Der}_{\mathbb{k}} L$ はベキ零 , つまり $(\delta)^k = 0$ となる $k \in \mathbb{Z}_+$ が存在したとしよう . このとき

$$\exp(\delta) := \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} (\delta)^i$$

なる導分が定まる . 実は $\exp(\delta)$ は L の自己同型である . $\exp(\text{ad}_L x)$ (ただし $\text{ad}_L x$ はベキ零) と書ける自己同型写像を内部自己同型写像 (inner automorphism) といい , 内部自己同型写像全体の集合を $\text{Int } L$ と表す .

命題 1.1.28 $\text{Int } L$ は $\text{Aut } L$ の正規部分群である .

最後に半直積について説明しておこう . L, L' を \mathbb{k} -Lie 代数とし , $f : L \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{k}} L'$ を準同型写像とする . L, L' の線型空間としての直積 $L \times L'$ に括弧積を以下のように定める :

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] := ([x_1, x_2], f(x_1)y_2 - f(x_2)y_1 + [y_1, y_2]). \quad (1.1.22)$$

定義 1.1.29 $L \times L'$ に上で定義した括弧積により Lie 代数とみたものを L と L' の半直積 (semi-product of L with L') といい , $L \ltimes L'$ と表す . 特に , 準同型 $f : L \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{k}} L'$ を明記する場合は $L \ltimes_f L'$ と表す .

1.1.5 テンサー積

この節の内容は一般に環上の加群について成立する．詳しくは

[12] Lang, S., *Algebra*, Addison-Wesley (1993)

を参照のこと．

定理 + 定義 1.1.30 \mathbb{k} -線型空間 V, V' に対して以下の普遍性をみたす \mathbb{k} -線型空間 T と双線型写像 $f: V \times V' \rightarrow T$ が同型を除いて一意に存在する：

任意の \mathbb{k} -線型空間 W と双線型写像 $g: V \times V' \rightarrow W$ に対して $g = h \circ f$ をみたす双線型写像 $h: T \rightarrow W$ が一意に存在する．

$$\begin{array}{ccc} V \times V' & \xrightarrow{f} & T \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & W & \end{array}$$

この T を V と V' の \mathbb{k} -テンサー積^{*3} (\mathbb{k} -tensor product of V with V') といい、 $V \otimes_{\mathbb{k}} V'$ と表す．また、 $f: V \times V' \rightarrow V \otimes_{\mathbb{k}} V'$ をバランス写像 (balance mapping) という．

V の n 重テンサー積を $V^{\otimes n}$ と表す：
$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ 個}} =: V^{\otimes n}.$$

命題 1.1.31 V_1, V_2 を \mathbb{k} -線型空間とし、 V_1 の基底を $\{x_1, \dots, x_n\}$ 、 V_2 の基底を $\{y_1, \dots, y_m\}$ とするとき $V_1 \otimes_{\mathbb{k}} V_2$ は $\{x_i \otimes y_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ を基底にもつ．

命題 1.1.32 V, V_i, W_i はすべて \mathbb{k} -線型空間とする．

- (1) $V_1 \otimes_{\mathbb{k}} V_2 \simeq V_2 \otimes_{\mathbb{k}} V_1$.
- (2) $\mathbb{k} \otimes_{\mathbb{k}} V \simeq V$.
- (3) $(V_1 \otimes_{\mathbb{k}} V_2) \otimes_{\mathbb{k}} V_3 \simeq V_1 \otimes_{\mathbb{k}} (V_2 \otimes_{\mathbb{k}} V_3)$.
- (4) $V \otimes_{\mathbb{k}} \left(\bigoplus_{i \in I} W_i \right) \simeq \bigoplus_{i \in I} (V \otimes_{\mathbb{k}} W_i)$.

^{*3} 「テンソル」の発音が多数派だと思うが、ここでは英語の発音に近い「テンサー」を採用する．

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{End}(V) &= \text{Hom}(V, V) \simeq V \otimes_{\mathbb{k}} V^* . \\ (2) \quad \text{Bil}(V) &\simeq V^{*\otimes 2} . \end{aligned}$$
$$\varphi : V_1 \otimes_{\mathbb{K}} W_1 \rightarrow V_2 \otimes_{\mathbb{K}} W_2 \quad ; \quad x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y) \quad (1.1.23)$$

例 1.1.35 $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{K})$, $B = (b_{kl}) \in M(m, \mathbb{K})$ に対して

[illegible]

命題 + 定義 1.1.36 \mathbb{k}' を有限次元 \mathbb{k} -線型空間とみることで \mathbb{k} -線型空間 V との \mathbb{k} -テンサー積 $\mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} V$ は \mathbb{k}' -線型空間の構造をもつ．これをスカラーの拡大^{*5} (extension of scalars) といい, $V^{\mathbb{k}'} := \mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} V$ と表す．同様に, \mathbb{k} -Lie 代数 L との \mathbb{k} -テンサー積 $\mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} L$ は \mathbb{k}' -Lie 代数の構造をもつ．これをスカラーの拡大 (extension of scalars) といい, $L^{\mathbb{k}'} := \mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} L$ と表す．

例 1.1.37 \mathbb{k}'/\mathbb{k} を有限次体拡大とするとき，以下はスカラー拡大である．

- $$\begin{aligned} (1) \quad & \mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[t] \simeq \mathbb{k}'[t]. \\ (2) \quad & \mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} M(n, \mathbb{k}) \simeq M(n, \mathbb{k}'). \end{aligned}$$

*5 基礎体の拡大, 係数体の拡大ともいう.

1.2 Lie 代数の普遍包絡代数

1.2.1 テンサー代数

Lie 代数の普遍包絡代数について述べる前にテンサー代数について述べることにする .
前述の Lang [12] および

[13] 横沼 健雄, テンソル空間と外積代数, 岩波講座 基礎数学, 岩波書店 (1977)
が参考になると思われる .

定義 1.2.1 \mathbb{K} -線型空間 V に対して

$$T^p(V) := V^{\otimes p}, \quad (1.2.1)$$

$$T_q(V) := (V^*)^{\otimes q} \quad (1.2.2)$$

をそれぞれ V 上の p 階反変テンサー空間 (contravariant tensor space of rank p on V) ,
 V 上の q 階共変テンサー空間 (covariant tensor space of rank q on V) という .

定義 1.2.2 \mathbb{K} -線型空間 V に対して

$$T_q^p(V) = T^p(V) \otimes T_q(V) \quad (1.2.3)$$

を V 上の (p, q) -テンサー空間 ((p, q) -tensor space on V) といい , $r := p + q$ を $T_q^p(V)$
の階数 (rank of $T_q^p(V)$) という .

$\sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対して $f_\sigma : T^r(V) \rightarrow T^r(V)$ を $f_\sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) := x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(r)}$
で定義する .

補題 1.2.3 $\mathcal{S}_r := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} f_\sigma$, $\mathcal{A}_r := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \text{sgn}(\sigma) f_\sigma$ と定義する .

- (1) 任意の $\tau \in \mathfrak{S}_r$ に対して $f_\tau \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r f_\tau = \mathcal{S}_r$, $f_\tau \mathcal{A}_r = \mathcal{A}_r f_\tau = \text{sgn}(\tau) \mathcal{A}_r$ が成り立つ .
- (2) $\mathcal{S}_r^2 = r! \mathcal{S}_r$, $\mathcal{A}_r^2 = r! \mathcal{A}_r$ が成り立つ . $r > 1$ ならば $\mathcal{A}_r \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \mathcal{A}_r = 0$ も成り立つ .

$\tilde{\mathcal{S}}_r := \frac{1}{r!} \mathcal{S}_r$, $\tilde{\mathcal{A}}_r := \frac{1}{r!} \mathcal{A}_r$ をそれぞれ $T^r(V)$ 上の対称化作用素, $T^r(V)$ 上の交代化作用素という.

命題 1.2.4 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ のとき $x \in T^r(V)$ に対して次が成り立つ:

- (1) 「任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対して $f_\sigma(x) = x$ 」 $\iff \tilde{\mathcal{S}}_r(x) = x$,
- (2) 「任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対して $f_\sigma(x) = \text{sgn}(\sigma)x$ 」 $\iff \tilde{\mathcal{A}}_r(x) = x$.

定義 1.2.5 $\text{Sym}^r(V) := \mathcal{S}_r(T^r(V))$ の元を対称テンサー (symmetric tensor), $\bigwedge^r(V) := \mathcal{A}_r(T^r(V))$ の元を交代テンサー (altenative tensor) という.

有限次元 \mathbb{k} -線型空間 V に対して $T(V) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T^n(V)$ とおく. ただし $T^0(V) = \mathbb{k}$ とする. $T(V)$ は以下で定める積によって (非可換) \mathbb{k} -代数となる: $t = \sum_s t_s$, $t' = \sum_{s'} t'_{s'} \in T(V)$ に対して

$$tt' := \sum_k \sum_{s+s'=k} t_s \otimes t'_{s'}. \quad (1.2.4)$$

定義 1.2.6 上で定義された \mathbb{k} -代数 $T(V)$ を V 上のテンサー代数 (tensor algebra on V) という.

定理 1.2.7 [テンサー代数の普遍性] \mathbb{k} -線型空間 V に対して $T(V)$ と $\iota: V = T^1(V) \hookrightarrow T(V)$ は以下の普遍性をみたし, 普遍性をみたすものの中では同型を除いて一意である:

任意の (非可換) \mathbb{k} -代数 A と \mathbb{k} -線型写像 $F: V \rightarrow A$ に対して $F = \tilde{F} \circ \iota$ をみたす \mathbb{k} -線型写像 $\tilde{F}: T(V) \rightarrow A$ が一意に存在する.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota} & T(V) \\ & \searrow F & \swarrow \tilde{F} \\ & A & \end{array}$$

定義 1.2.8 $\text{Sym } V := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Sym}^n V$ を V 上の対称代数 (symmetric algebra on V) という. ただし, $t = \sum_s t_s$, $t' = \sum_{s'} t'_{s'} \in \text{Sym } V$ に対してその積を以下で定義する:

$$tt' := \sum_k \sum_{s+s'=k} \mathcal{S}_k(t_s \otimes t'_{s'}). \quad (1.2.5)$$

$I(V) := \langle x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in V \rangle$ とするとき, $I(V)$ は $T(V)$ のイデアルで, $\text{Sym}(V) = T(V)/I(V)$ である.

定義 1.2.9 $\bigwedge(V) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge^n(V)$ を V 上の外積代数 (exterior algebra on V)^{*6} という. ただし, $t = \sum_s t_s, t' = \sum_{s'} t'_{s'} \in \bigwedge(V)$ に対して外積と呼ばれる積を以下で定義する:

$$t \wedge t' := \sum_k \sum_{s+s'=k} \mathcal{A}_k(t_s \otimes t'_{s'}). \quad (1.2.6)$$

$J(V) := \langle x \otimes x \mid x \in V \rangle$ とするとき, $J(V)$ は $T(V)$ のイデアルで, $\bigwedge(V) = T(V)/J(V)$ である.

対称代数, 外積代数以外のテンソル代数の代表的な例として Clifford 代数が挙げられる. 本セミナーで今後使うかどうかはまだわからないが, 一応例として挙げておこう.

定義 1.2.10 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ とし, Q を V 上の非退化二次形式とする. $I_Q(V)$ を

$$I_Q(V) := \langle x \otimes x + Q(x) \mid x \in V \rangle$$

とすると, これは $T(V)$ のイデアルになる. このとき $C(V, Q) := T(V)/I_Q(V)$ を V 上の Clifford 代数 (Clifford algebra on V) という.

Clifford 代数はスピナー (スピノル) の概念と関係がある. しかし, 本セミナーではスピノ幾何には触れない. Clifford 代数については

[14] Artin, E., *Geometric Algebra*, Interscience (1957)

[15] Atiyah, M. F., Bott, R. and Shapiro A., Clifford modules, *Topology*, 3 (1964), 3–38

が詳しい (らしい). 日本語の本で比較的読みやすいと思われるのは

[16] 田坂 隆士, 2 次形式, 岩波基礎数学選書, 岩波書店 (1991)

であろうか.

^{*6} Grassmann 代数 (Grassmannian algebra) ともいう.

1.2.2 普遍包絡代数

定理 + 定義 1.2.11 L を \mathbb{k} -Lie 代数とするととき, \mathbb{k} -結合代数 A と Lie 代数準同型 $f : L \rightarrow A$ で, $f([x, y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x)$ をみたすものの組 (A, f) で以下の普遍性をみたすものが同型を除いて一意に存在する :

任意の \mathbb{k} -代数 B と Lie 代数準同型 $g : L \rightarrow B$ に対して $g = h \circ f$ をみたす \mathbb{k} -代数準同型 $h : A \rightarrow B$ が一意に存在する .

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & B & \end{array}$$

この (A, f) を L の普遍包絡代数 (universal enveloping algebra of L)*⁷ といい, $(U(L), \sigma)$ で表す .

例 1.2.12 可換 Lie 代数 L の普遍包絡代数 $U(L)$ は $\text{Sym}(L)$ に等しい .

さて, 本節の目標である Poincaré–Birkhoff–Witt の定理 (通称 PBW の定理) を証明するための準備をしよう .

L は \mathbb{k} -Lie 代数とする . $m \in \mathbb{N}$ に対して $T_m := \bigoplus_{i=0}^m T^i(L)$, $U_m := \pi(T_m)$, $U_{-1} := 0$ と定義する . このとき定義から $U_m \subseteq U_{m+1}$, $U_m U_n \subseteq U_{m+n}$ である . $G^m := U_m / U_{m-1}$ とおき, $G(L) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} G^m$ とおくと線型写像 $G(L) \times G(L) \rightarrow G(L)$ が自然に定まる . また, $G(L)$ は次数付き \mathbb{k} -代数であることもわかる .

$$T^m \xrightarrow{\pi} \pi(T^m) = U_m \longrightarrow U_m / U_{m-1} = G^m$$

の合成を $\varphi_m : T^m \rightarrow G^m$ とし, $\varphi : T(L) \rightarrow G(L)$ が導かれる .

補題 1.2.13 上の $\varphi : T(L) \rightarrow G(L)$ は \mathbb{k} -代数準同型である . さらに, $I(L) \subseteq \text{Ker } \varphi$ である .

*⁷ 最近は単に包絡代数と呼ぶらしい . 展開代数ともいう . Lie 代数を Lie 環と呼ぶ流儀では包絡環, 展開環と呼ぶ .

$\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を L の順序付き基底とする． $\Sigma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subset \Lambda$ に対して m を Σ の長さと呼ぶことにし，

$$\begin{aligned} z_\Sigma &:= z_{\lambda_1} \cdots z_{\lambda_m} \in \text{Sym}^m(L), \\ x_\Sigma &:= x_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes x_{\lambda_m} \in T^m(L) \end{aligned}$$

とする．また，任意の $\mu \in \Sigma$ に対して $\lambda \leq \mu$ のとき $\lambda \leq \Sigma$ と表すことにする．

定義 1.2.14 $\Sigma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subset \Lambda$ が増加的 (increasing) であるとは， $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m$ となることをいう．

以下では $m \in \mathbb{N}$ に対して $S_m := \bigoplus_{i=0}^m \text{Sym}^i(L)$ とする．

補題 1.2.15 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して以下をみたす線型写像 $f_m : L \otimes S_m \rightarrow \text{Sym}(L)$ が一意に存在する：

- (1) $\lambda \leq \Sigma$, $z_\Sigma \in S_m$ のとき $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma$,
- (2) $k \leq m$, $z_\Sigma \in S_k$ のとき $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) - z_\lambda z_\Sigma \in S_k$,
- (3) $z_T \in S_{m-1}$ のとき

$$f_m(x_\lambda \otimes f(x_\mu \otimes z_T)) = f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T)) + f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_T).$$

補題 1.2.16 以下をみたす Lie 代数準同型 $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(\text{Sym}(L))$ が存在する：

- (1) 任意の $x, y \in L$ に対して $\rho([x, y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)$,
- (2) $\lambda \leq \Sigma$ のとき $\rho(x_\lambda)(z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma$,
- (3) Σ の長さが m のとき $\rho(x_\lambda)(z_\Sigma) - z_\lambda z_\Sigma \in S_m$.

補題 1.2.17 $t \in T_m \cap \text{Ker } \pi$ に対して t の m 次斉次成分を t_m とするとき， $t_m \in I$ である．

以上，3 つの補題から下の定理を得る．

定理 1.2.18 [Poincaré–Birkhoff–Witt の定理] 上述の記号の下で以下が成り立つ．

- (1) $\omega : \text{Sym}(L) \rightarrow G(L)$ は \mathbb{k} -代数同型である．

(2) $\{x_n \in L\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を L の順序付き基底とすると

$$\{\pi(x_{i(1)} \otimes \cdots \otimes x_{i(m)}) \mid m \in \mathbb{N}, i(1) \leq \cdots \leq i(m)\} \cup \{1\} \quad (1.2.7)$$

は $U(L)$ の基底をなす。

1.2.3 包絡代数の諸性質

まず、導分との関係について調べよう。

補題 1.2.19 A を \mathbb{k} -代数とする。任意の $\delta \in \text{Der}_{\mathbb{k}} A$ は自然に $\delta \in \text{Der}_{\mathbb{k}} A_L$ とみなせる。

命題 1.2.20 L を \mathbb{k} -Lie 代数とする。任意の $\delta \in \text{Der}_{\mathbb{k}} L$ に対して $\tilde{\delta} \in \text{Der}_{\mathbb{k}} U(L)$ であって、 $\tilde{\delta}|_L = \delta$ をみたすものが一意に存在する。

部分代数と包絡代数との関係について簡単にふれることにする。

命題 1.2.21 \mathbb{k} -Lie 代数 L とその部分代数 $M \subseteq L$ に対して $U(M)$ は M によって生成される $U(L)$ の部分代数と自然に同型である。

1.3 Lie 代数の表現

この節では Lie 代数の表現の基礎概念について説明するが，多くの内容は “Lie 代数” という言葉を “有限群”，“対称群”，“Lie 群” 等に置き換えても通じる．

1.3.1 表現空間

本節では \mathbb{k} を $\text{char } \mathbb{k} = 0$ の代数閉体 ($\mathbb{k} = \mathbb{C}$ と思ってよい) として話を進める．

定義 1.3.1 \mathbb{k} -Lie 代数 L の表現^{*8} (representation) とは \mathbb{k} -線型空間 V と Lie 代数準同型写像 $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ の組 (V, ρ) のことである．単に $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を表現ともいう．特に V が有限次元であるとき L の表現 $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を L の有限次表現 (representation of L of finite degree) といい， $\deg \rho := \dim V$ を ρ の次数 (degree of ρ) という．

例 + 定義 1.3.2 Lie 代数 L に対して

$$1 : L \longrightarrow \mathbb{k} \quad (1.3.1)$$

は明らかに L の 1 次表現であるが，これを自明な表現 (trivial representation) という．

例 + 定義 1.3.3 Lie 代数 L に対して写像

$$\text{ad} : L \longrightarrow \text{Der}_{\mathbb{k}} L \subseteq \mathfrak{gl}(L) ; \quad X \longmapsto \text{ad}_L X \quad (1.3.2)$$

を L の随伴表現 (adjoint representation of L) という．

定義 1.3.4 L の表現の族 $\{(V_i, \rho_i)\}_{i \in I}$ に対して和 $\left(\bigoplus_{i \in I} V_i, \bigoplus_{i \in I} \rho_i\right)$ と積 $\left(\bigotimes_{i \in I} V_i, \bigotimes_{i \in I} \rho_i\right)$ をそれぞれ以下で定義する：

$$\left(\bigoplus_{i \in I} \rho_i\right)(x) \left(\sum_{i \in I} v_i\right) := \sum_{i \in I} \rho_i(x)(v_i) \quad (x \in L, v_i \in V_i), \quad (1.3.3)$$

$$\left(\bigotimes_{i \in I} \rho_i\right)(x) \left(\bigotimes_{i \in I} v_i\right) := \bigotimes_{i \in I} \rho_i(x)(v_i) \quad (x \in L, v_i \in V_i). \quad (1.3.4)$$

^{*8} 線型表現 (linear representation)，表現空間 (representation space) ともいう．

定義 1.3.5 (V, ρ) を L の表現とすると、部分空間 $W \subseteq V$ で任意の $x \in L$ に対して $\rho(x)(W) \subseteq W$ をみたすものを ρ -不変部分空間 (ρ -invariant subspace) といい、 $(W, \rho|_W)$ を (V, ρ) の部分表現 (subrepresentation of (V, ρ)) という。

定義 1.3.6 (V, ρ) を L の表現、 $W \subseteq V$ を ρ -不変部分空間とすると、 $\tilde{\rho}: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V/W)$ を任意の $x \in L$ と任意の $v+W \in V/W$ に対して $\tilde{\rho}(x)(v+W) := \rho(x)(v)+W$ と定義することで $(V/W, \tilde{\rho})$ は L の表現となる。これを (V, ρ) の商表現 (quotient representation of (V, ρ)) という。

命題 1.3.7 (V, ρ) を L の表現、 $W \subseteq V$ を ρ -不変部分空間とすると、 W を含む ρ -不変部分空間と V/W の $\tilde{\rho}$ -不変部分空間との間に自然な一対一対応が存在する。

定義 1.3.8 (V, ρ) を L の有限次表現とする。このとき (V^*, ρ^*) を

$$(\rho^*(x)(f))(v) := -f(\rho(x)(v)) \quad (x \in L, f \in V^*, v \in V) \quad (1.3.5)$$

と定義するとこれは L の表現になる。これを (V, ρ) の双対表現 (dual representation of (V, ρ))、または反傾表現 (contragradient representation) という。

例 + 定義 1.3.9 Lie 代数 L の随伴表現 (L, ad) の双対表現 (L^*, ad^*) を L の余随伴表現 (coadjoint representation of L) という。

定義 1.3.10 L の非自明有限次表現 $\rho: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が単射であるとき、表現 (V, ρ) は忠実 (faithful) であるという。

1.3.2 Schur の補題

定義 1.3.11 $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$ を L の有限次表現とする． \mathbb{k} -線型写像 $f : V_1 \rightarrow V_2$ で，任意の $x \in L$ に対して $\rho_2(x) \circ f = f \circ \rho_1(x)$ をみたすものを絡み作用素 (intertwining operator, intertwiner) という．

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho_1(x)} & V_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ V_2 & \xrightarrow{\rho_2(x)} & V_2 \end{array}$$

また， L の二つの表現 $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$ が同値 (equivalent) であるとは，絡み作用素 $f : V_1 \rightarrow V_2$ が \mathbb{k} -同型写像であるときをいい， $(V_1, \rho_1) \sim (V_2, \rho_2)$ と表す．

絡み作用素とは表現の準同型写像のことである． L の表現 $(V, \rho_V), (W, \rho_W)$ に対してその間の絡み作用素全体の集合を $\text{Hom}(V, W)$ または $\text{Hom}(\rho_V, \rho_W)$ で表す．

定義 1.3.12 (V, ρ) ($V \neq 0$) を L の有限次表現とする．

- (1) (V, ρ) の ρ -不変部分空間が 0 と V のみのとき表現 (V, ρ) は既約 (irreducible) であるといい，そうでないとき可約 (reducible) であるという．
- (2) (V, ρ) が既約表現の和と同値なとき，表現 (V, ρ) は完全可約 (completely reducible) であるという．

命題 1.3.13 L の表現 (V, ρ) が完全可約であるための必要十分条件は，任意の ρ -不変部分空間 $W \subseteq V$ に対して $V = W \oplus W'$ をみたす ρ -不変部分空間 $W' \subseteq V$ が存在すること．

定理 1.3.14 [Schur の補題] L は \mathbb{k} -Lie 代数とする．

- (1) $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$ をともに L の既約表現とする． $f \in \text{Hom}(V_1, V_2) \setminus \{0\}$ が絡み作用素ならば f は線型同型である．
- (2) (V, ρ) を L の既約表現とする． $f \in \text{End}(V)$ が絡み作用素ならば f はスカラー倍写像である．

1.3.3 表現と加群

しばしば表現は写像ではなく加群の作用で記述されることもある．以下では Lie 代数の上の加群について簡単にまとめておく．

定義 1.3.15 V を \mathbb{k} -線型空間とする． \mathbb{k} -Lie 代数 L に対して写像

$$\mu : L \times V \longrightarrow V ; (x, v) \longmapsto x.v \quad (1.3.6)$$

が以下をみたすとき， V を L 上の加群 (module over L) または L -加群 (L -module) という：

- (i) $(ax + by).v = a(x.v) + b(y.v), \quad (\forall x, \forall y \in L, \forall a, \forall b \in \mathbb{k}, \forall v \in V),$
- (ii) $x.(kv + \ell w) = k(x.v) + \ell(x.w), \quad (\forall x \in L, \forall k, \forall \ell \in \mathbb{k}, \forall v, \forall w \in V),$
- (iii) $[x, y].v = x.(y.v) - y.(x.v), \quad (\forall x, \forall y \in L, \forall v \in V).$

定義 1.3.16 L -加群間の線型写像 $f : V \rightarrow W$ で，任意の $x \in L$ と任意の $\forall v \in V$ に対して $f(x.v) = x.f(v)$ をみたすものを L -加群準同型写像，または L -線型写像という．

\mathbb{k} -Lie 代数 L の有限次表現 (V, ρ) に対して $\alpha : L \times V \rightarrow V$ を

$$\alpha : L \times V \longrightarrow V ; (x, v) \longmapsto \rho(x)(v) \quad (1.3.7)$$

と定義すると V は L -加群となる．逆に V を有限次元 L -加群とし， L の V への作用を $\alpha : L \times V \rightarrow V$ とするとき， $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を任意の $x \in L$ に対して

$$\text{任意の } v \in V \text{ に対して } \rho(x)(v) := \alpha(x, v) \text{ なる準同型写像} \quad (1.3.8)$$

と定義すると ρ は L の有限次表現となる．この対応によって L の表現と L -加群を同一視する．

(V, ρ) を L の有限次表現とし， V を L -加群とみなす．部分表現 (W, ρ_W) は L -加群としては L -不変 (L -invariant) な部分加群，すなわち W は V の部分線型空間で， $L.W \subseteq W$ をみたすものである． $W \subseteq V$ を部分 L -加群とするとき，商表現 $(V/W, \tilde{\rho})$

は剰余 L -加群 V/W と同一視される．また，双対表現 (V^*, ρ^*) は双対加群 V^* と同一視される．

L -加群に対しては群について成り立つ大抵のことがほぼそのまま成立する（たとえば Schur の補題や Jordan-Hölder の定理など）．

1.3.4 Killing 形式

\mathbb{k} -線型空間 V 上の双線型写像 $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ が対称 (symmetric) であるとは，任意の $x, y \in V$ に対して $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ が成り立つときをいう．

定義 1.3.17 以下で定義する \mathbb{k} -Lie 代数 L 上の対称双線型写像 $k_L : L \times L \rightarrow \mathbb{k}$ を L の Killing 形式 (Killing form of L) という：

$$k_L : L \times L \longrightarrow \mathbb{k} ; \quad (x, y) \longmapsto \text{Tr}(\text{ad}(x) \text{ad}(y)). \quad (1.3.9)$$

補題 1.3.18 L を \mathbb{k} -Lie 代数， $I \subseteq L$ をイデアルとする． L の Killing 形式を k_L ， I の Killing 形式を k_I とするとき $k_I = k_L|_{I \times I}$ である．

定義 1.3.19 L を \mathbb{k} -Lie 代数， $\beta : L \times L \rightarrow \mathbb{k}$ を対称双線型写像とする．

- (1) $R_\beta := \{x \in L \mid \beta(x, L) = 0\}$ を β -根基 (β -radical) という．
- (2) $R_\beta = 0$ のとき β は非退化 (nondegenerated) であるという．

補題 1.3.20 L の Killing 形式 $k = k_L$ の根基 R_k は L のイデアルである．

L を \mathbb{k} -Lie 代数， $M \subseteq L$ を部分代数， $\beta : L \times L \rightarrow \mathbb{k}$ を対称双線型写像とするとき，

$$M_\beta^\perp := \{x \in L \mid \beta(x, M) = 0\} \quad (1.3.10)$$

を β -直交補空間 (β -orthogonal complement) という． M が L のイデアルであれば M_β^\perp も L のイデアルとなることは明らかであろう．

1.4 ベキ零性と可解性

この節では Lie 代数の最も基本的なクラスであるベキ零 Lie 代数と可解 Lie 代数について述べる．Engel の定理，Lie の定理，Cartan の可解性判定法はとても基本的な定理である．

1.4.1 ベキ零 Lie 代数

Lie 代数 L に対してそのイデアル L_n を以下のように定義する：

$$L_n := \begin{cases} L & (n = 0), \\ [L, L_{n-1}] & (n \geq 1). \end{cases} \quad (1.4.1)$$

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $L_n \supseteq L_{n+1}$ なのでイデアルの降下

$$L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq \cdots$$

を得る．この降下を降下中心列 (descending central series) という．

定義 1.4.1 Lie 代数 L の降下中心列 $L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq \cdots$ に対して $L_n = 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在するとき， L はベキ零 (nilpotent) であるという．

命題 1.4.2 L は Lie 代数とする．

- (1) L がベキ零ならば L の任意の部分 Lie 代数もベキ零である．
- (2) $f : L \rightarrow L'$ を Lie 代数準同型とすると L がベキ零ならば $\text{Im } f$ もベキ零である．
- (3) $L/Z(L)$ がベキ零ならば L はベキ零である．
- (4) $L \neq 0$ で， L がベキ零ならば $Z(L) \neq 0$ である．

補題 1.4.3 $x \in \mathfrak{gl}(V)$ がベキ零元ならば $\text{ad } x$ もベキ零である．

定理 1.4.4 $V \neq 0$ を有限次元 \mathbb{k} -線型空間とし， $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ を部分 Lie 代数とする． L の任意の元がベキ零元ならば $Lv = 0$ となる $v \in V \setminus \{0\}$ が存在する．

定理 1.4.5 [Engel の定理] L は Lie 代数とする . 任意の $x \in L$ に対して $\text{ad } x$ がベキ零ならば L はベキ零 Lie 代数である .

定義 1.4.6 n 次元 \mathbb{k} -線型空間 V の部分線型空間の族 $\{V_i \subseteq V \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ が V 内の旗 (flag in V) であるとは , 以下をみたすときをいう :

- (i) $\dim V_i = i$,
- (ii) $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$ である .

V の旗全体の集合を $\text{Flag}(V)$ と表す . また , $f \in \text{End}(V)$ に対して旗 $\{V_i\}$ が f -不変 (f -invariant) であるとは , 各 i に対して $f(V_i) \subseteq V_i$ となるときをいう .

系 1.4.7 $V \neq 0$ を有限次元 \mathbb{k} -線型空間とし , $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ を部分 Lie 代数とする . L の任意の元がベキ零元ならば V の旗 $\{V_i\}$ で , 以下をみたすものが存在する :

- (1) 各 V_i は L -不変 ,
- (2) 各 i に対して $x.V_i \subseteq V_{i-1}$.

補題 1.4.8 L をベキ零 Lie 代数 , $I \subseteq L$ をイデアルとするととき $I \neq 0$ ならば $I \cap Z(L) \neq 0$ である .

1.4.2 可解 Lie 代数

命題 + 定義 1.4.9 L は Lie 代数とする . 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$L^{(n)} := \begin{cases} L & (n = 0), \\ [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}] & (n \geq 1) \end{cases} \quad (1.4.2)$$

と定義する . この $L^{(n)}$ を L の n 次導来イデアル (n -derived ideal of L) という .

定義 1.4.10 Lie 代数 L に対して $L^{(n)} = 0$ となるような $n \in \mathbb{N}$ が存在するとき , L は可解 (solvable) であるという .

命題 1.4.11 L は Lie 代数とする .

- (1) L が可解ならば L の任意の部分 Lie 代数も可解である .

- (2) $f: L \rightarrow L'$ を Lie 代数準同型とすると L が可解ならば $\text{Im } f$ も可解である .
- (3) $I \subseteq L$ を可解なイデアルとし , L/I は可解であるとするとき L は可解である .
- (4) $I, J \subseteq L$ がそれぞれ可解なイデアルならば $I + J$ も可解なイデアルである .

定理 1.4.12 V は有限次元 \mathbb{k} -線型空間とし , $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ は可解部分代数とするととき以下をみたす線型写像 $f: L \rightarrow \mathbb{k}$ と $v \in V \setminus \{0\}$ が存在する :

$$\text{任意の } x \in L \text{ と任意の } w \in V \text{ に対して } x.w = f(x)w.$$

定理 1.4.13 [Lie の定理] V は n 次元 \mathbb{k} -線型空間とし , $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ は可解部分代数とするととき , L -不変な V 内の旗 $\{V_i\}_{i=0}^n$ が存在する .

1.4.3 Cartan の可解性判定法

まず , 線型代数の復習から始めよう .

定義 1.4.14 $f: V \rightarrow V$ を線型変換とする .

- (1) f が半単純 (semi-simple) であるとは , f の最小多項式の根がすべて異なることをいう .
- (2) f がベキ零 (nilpotent) であるとは , $f^n = 0$ となる $n \in \mathbb{Z}_+$ が存在するときをいう .

補題 1.4.15

- (1) $f, g \in \text{End } V$ が半単純ならば $f \pm g$ もまた半単純である .
- (2) $f, g \in \text{End } V$ がベキ零ならば $f \pm g$ もまたベキ零である .

定理 + 定義 1.4.16 線型変換 $f: V \rightarrow V$ に対して以下をすべて満たす $f_s, f_n \in \text{End } V$ が一意に存在する :

- (1) f_s は半単純で , f_n はベキ零 ,
- (2) $f = f_s + f_n$,
- (3) $f_s f_n = f_n f_s$.

$f = f_s + f_n$ という分解を加法的 Jordan–Chevalley 分解 (additive Jordan–Chevalley decomposition) という．以下では簡単のために JC 分解と呼ぶことにする．

系 1.4.17 V を有限次元 \mathbb{k} –線型空間とし, $f \in \text{End } V$ とする．また, $K[t]$ を多項式環とする．

- (1) $f_s = P(f)$, $f_n = Q(f)$ をみたす多項式 $P(t)$, $Q(t) \in \langle t \rangle \subseteq K[t]$ が存在する．
- (2) W_1, W_2 を $W_1 \subseteq W_2 \subseteq V$ なる部分線型空間とし, $f(W_1) \subseteq W_2$ であるとき, $f_s(W_1) \subseteq W_2$, $f_n(W_1) \subseteq W_2$ が成り立つ．

命題 1.4.18 V を \mathbb{k} –線型空間とし, $f \in \text{End}(V)$ の加法的 JC 分解を $f = f_s + f_n$ とするとき, $\text{ad } f = \text{ad}(f_s) + \text{ad}(f_n)$ は $\text{ad } f$ の加法的 JC 分解である．

命題 1.4.19 A を有限次元 \mathbb{k} –代数とするととき, 任意の $f \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(A)$ の半単純部分 f_s およびベキ零部分 f_n はともに $\text{Der}_{\mathbb{k}}(A)$ の元である．

この節の目的である Cartan の可解性判定法について述べよう．

補題 1.4.20 V を有限次元 \mathbb{k} –線型空間, $W_1, W_2 \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ を部分線型空間とし, $M := \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, W_2] \subseteq W_1\}$ とする． $x \in M$ が $y \in M$ に対して $\text{Tr}(xy) = 0$ をみたすならば x はベキ零である．

補題 1.4.21 V を有限次元 \mathbb{k} –線型空間とするととき $x, y, z \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して $\text{Tr}([x, y]z) = \text{Tr}(x[y, z])$ ．

定理 1.4.22 [Cartan の可解性判定法] V を有限次元 \mathbb{k} –線型空間, $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ を部分 Lie 代数とする．任意の $x \in [L, L]$ と任意の $y \in L$ に対して $\text{Tr}(xy) = 0$ ならば L は可解である．

系 1.4.23 L を \mathbb{k} –Lie 代数とする．任意の $x \in [L, L]$ と任意の $y \in L$ に対して $\text{Tr}(\text{ad } x \text{ ad } y) = 0$ ならば L は可解である．

1.4.4 Engel 部分代数, Cartan 部分代数と Borel 部分代数

補題 1.4.24 $a, b \in \mathbb{k}$ に対して $[L_a(\text{ad } x), L_b(\text{ad } x)] \subseteq L_{a+b}(\text{ad } x)$.

定義 1.4.25 $x \in L$ とするとき, $L_0(\text{ad } x)$ を Engel 部分代数 (Engel subalgebra) という. 以下では ESA と略す.

補題 1.4.26 L を \mathbb{k} -Lie 代数, $M \subseteq L$ を部分代数とし, $z \in M$ を $L_0(\text{ad } z)$ が $\{L_0(\text{ad } x)\}_{x \in M}$ において極小であるとする. このとき $M \subseteq L_0(\text{ad } z)$ ならば任意の $x \in M$ に対して $L_0(\text{ad } z) \subseteq L_0(\text{ad } x)$ である.

補題 1.4.27 L を \mathbb{k} -Lie 代数, $M \subseteq L$ を部分代数とし, M は L の ESA を含むとする. このとき $N_L(M) = M$ である.

定義 1.4.28 $K \subseteq L$ が $N_L(K) = K$ をみたすべき零部分 Lie 代数であるとき, K を L の Cartan 部分代数 (Cartan subalgebra of L) という. 以下では CSA と略す.

定理 1.4.29 L を \mathbb{k} -Lie 代数, $H \subseteq L$ を部分代数とするとき次の二つは互いに同値:

- (1) H は L の CSA .
- (2) H は L の極小 ESA .

命題 1.4.30 $f: L \rightarrow L'$ を Lie 代数準同型とする.

- (1) $H \subseteq L$ が CSA ならば $f(H)$ は L' の CSA である.
- (2) $H' \subseteq L'$ を CSA とするとき, $f^{-1}(H')$ の任意の CSA は L の CSA である.

定義 1.4.31 \mathbb{k} -Lie 代数 L の極大可解部分代数を L の Borel 部分代数 (Borel subalgebra of L) という. 以下では BSA と略す.

1.4.5 Ado-岩澤の定理

定理 1.4.32 [Ado の定理] \mathbb{k} を標数 0 の体とするとき , 有限次元 \mathbb{k} -Lie 代数は忠実な有限次元表現をもつ .

定理 1.4.33 [岩澤の定理] \mathbb{k} を標数 $p > 0$ の体とするとき , 有限次元 \mathbb{k} -Lie 代数は忠実な有限次元表現をもつ .

Ado-岩澤の定理から \mathbb{k} の標数に依らずに \mathbb{k} -Lie 代数 L は忠実な有限次元表現 $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ をもつことがわかる . すなわち , 任意の Lie 代数は適当な次元の線型 Lie 代数に同型であることがわかる .

1.5 半単純 Lie 代数

1.5.1 半単純性

定義 1.5.1 L を \mathbb{k} -Lie 代数とする .

- (1) L の極大可解イデアルを L の根基 (radical of L) といい , $\text{rad } L$ で表す .
- (2) $\text{rad } L = 0$ であるとき , L は半単純 (semi-simple) であるという .

命題 1.5.2 Lie 代数 L が半単純であるための必要十分条件は L の Killing 形式が非退化であることである .

定理 1.5.3 [半単純 Lie 代数の構造定理] 半単純 Lie 代数 L に対して以下をみたすイデアル L_1, \dots, L_t が存在する :

- (i) 各 L_i は (Lie 代数として) 単純 ,
- (ii) $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_t$,
- (iii) 任意の単純イデアル $I \subseteq L$ に対して $I = L_i$ なる L_i が存在 .

さらに , L の Killing 形式を k , L_i の Killing 形式を k_i とするとき $k_i = k|_{L_i \times L_i}$ が成り立つ .

系 1.5.4 L を半単純 Lie 代数とする .

- (1) $[L, L] = L$.
- (2) 任意の非零イデアル $I \subseteq L$ は半単純 .
- (3) 任意の非零 Lie 代数準同型の L の像は半単純 .
- (4) 任意のイデアル $I \subseteq L$ は L の単純イデアルの和である .

定理 1.5.5 Lie 代数 L が半単純ならば $\text{ad } L = \text{Der}_{\mathbb{k}} L$ である .

1.5.2 半単純 Lie 代数と表現

定義 1.5.6 半単純 Lie 代数 L の有限次元表現 $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$c_\rho(\beta)$ を ρ の Casimir 元 (Casimir element of ρ) という .

補題 1.5.7 L を半単純 \mathbb{k} -Lie 代数 , V を非零有限次元 \mathbb{k} -線型空間とし , $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を L の表現とするととき , $\rho(L) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$ である .

定理 1.5.8 [Weyl の定理] L を半単純 \mathbb{k} -Lie 代数 , V を非零有限次元 \mathbb{k} -線型空間とし , $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を L の表現とするととき , ρ は完全可約である .

定義 1.5.9 \mathbb{k} -Lie 代数 L が完約 (reductive) であるとは , $\text{rad } L = Z(L)$ なるときをいう .

命題 1.5.10 L を非零 \mathbb{k} -Lie 代数とする .

- (1) L が完約ならば , $L = [L, L] \oplus Z(L)$ であり , $[L, L]$ は 0 か半単純である .
- (2) V を有限次元 \mathbb{k} -線型空間とする . $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ とし , V に既約に作用するならば L は完約で , $\dim Z(L) \leq 1$ である . さらに $L \subseteq \mathfrak{sl}(V)$ ならば L は半単純である .

定理 1.5.11 \mathbb{k} -Lie 代数 L が完約ならば , L の随伴表現は完全可約である .