

圏論

内藤と大垣と国井と山口のセミナー

No.002

はじめに

本セミナーでは圏論を扱う．かなり色々な対象を代数的に考えるので便利な反面分かり難いところも多いだろうと思われるが，その分多方面の人に聞いてもらいたいのので，あまり多くの予備知識は仮定しないつもりである．予備知識は各自の専門以外では学部レベルの講義でそんなのもあったな，程度でも大丈夫な様にしたいとは思いますがそれにはどこまで副えるかは分からない．あまり早く進めても自分も理解できないのでペースは遅めになると思われる．そんなこんなで終わるのはいつになるか分かったものではないが，気長に付き合ってもらえればと思う．

参考文献

- [1] C.A.Weibel, An introduction to homological algebra, Cambridge(1994)
- [2] M.Kashihara,P.Schapira, CATEGORIES AND SHEAVES, Springer(2006)
- [3] S. マックレーン著, 三好博之, 高木理 訳, 圏論の基礎, Springer(2005)

第0章 準備

§1 圏

定義 0.1.1.

圏(category) \mathcal{C} とは次の (i), (ii), (iii) から成り, (a), (b) を満たすものである.

- (i) $\text{Ob}(\mathcal{C})$ という“ 集合¹ ”,
- (ii) 任意の $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対する集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$,
- (iii) 任意の $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対する合成写像
 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) : (f, g) \mapsto g \circ f$.

- (a) 任意の $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C), h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ に対し,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

が成り立つ,

- (b) 任意の $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対し, 次を満たすような $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ が (一意に) 存在する
; 任意の $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ に対し,

$$f \circ \text{id}_X = f, \text{id}_X \circ g = g$$

である.

定義 0.1.2.

$X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を X の対象(object) と言う. $X \in \mathcal{C}$ と書いたりもする.

$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ を \mathcal{C} に於ける X から Y への射(morphism) と言い, $f : X \rightarrow Y$ と書く. id_X を X の恒等射(identity morphism) と言う.

¹厳密には集合ではないことも多いのだが気持的にはそうである.

例 0.1.3.

圏	対象	射
(1) 集合の圏Sets	集合	写像
(2) Abel 群の圏Ab	Abel 群	群準同型
(3) 群の圏Groups	群	群準同型
(4) 環の圏Rings	環	環準同型
(5) 左 R -加群の圏 $R\text{-mod}$	左 R -加群	R -準同型
(5') 右 R -加群の圏 $\text{mod-}R$	右 R -加群	R -準同型
(6) 位相空間の圏Top	位相空間	連続写像

例 0.1.4.

唯一つの対象からなる圏はモノイドである．実際，射の合成を演算，恒等射を単位元とすればよい．また，群は元をシフト写像とみなす事で，対象が一つの圏とみなせる．(元 x を左から x をかけるという写像とみなす)．

定義 0.1.5.

全ての射が恒等射である様な圏を離散圏(discrete category) と言う．

例 0.1.6.

集合は離散圏とみなせる．実際元を対象とし，その間の恒等写像のみを射とすればよい．

定義 0.1.7.

$\text{Ob}(\mathcal{C})$ が集合である時， \mathcal{C} を小カテゴリー(small category) と言う．

例 0.1.8.

例 3 の例は全て小カテゴリーではなく，例 6 は小カテゴリーである．また半順序集合(partially ordered set) は小カテゴリーである．ここで，半順序集合とは反射律，推移律，非対称律を満たす関係 \leq を持つ集合である．実際 $p \leq q$ でない時は $\text{Hom}(p, q) = \emptyset$ とし， $p \leq q$ である時は $f : p \rightarrow q$ を考える時，合成は推移律，単位則は反射律から得られる．

定義 0.1.9.

$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が \mathcal{C} に於ける同型射(isomorphism) であるとは，

$$g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y$$

となる様な $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ が (一意に) 存在することである．この時， $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ と書き，この g を f^{-1} と書く．また，この時 X と Y は同型(isomorphic) であると言い， $X \simeq Y$ と書く．

例 0.1.10.

同型射の例

圏	同型射
Sets	全単射
Top	同相写像
代数構造のもの	同型写像
C^∞ -多様体と C^∞ -写像の圏	C^∞ -同相写像
Riemann 面と正則写像の圏	双正則 (等角) 写像

定義 0.1.11.

f と g が共に $\text{Hom}_C(X, Y)$ の元である時, f と g は平行(parallel) であると言い, $f, g: X \rightrightarrows Y$ と書く. 任意の $e_1, e_2: A \rightrightarrows B$ に対し, $f: B \rightarrow C$ が左から消去可能(left cancelable) つまり, $f \circ e_1 = f \circ e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$ である時, f は C でモニック(monic) であるという. 後に示すが多くの圏ではこれは単射なので, この時 B を C の部分対象(subobject) と言ったりもする. 任意の $g_1, g_2: C \rightrightarrows D$ に対し, $f: B \rightarrow C$ が右から消去可能(right cancelable) つまり, $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$ である時, f は C でエピ(epi) であるという.

例 0.1.12.

Sets に於ける例 (記号は上に準じる)

(1) 単射はモニックである.

証明

f の単射性から $e_1 \neq e_2 \Rightarrow f \circ e_1 \neq f \circ e_2$ を導けばよい. $e_1 \neq e_2$ より $e_1(x) \neq e_2(x)$ となる様な A の元 x が存在することが分かる. f の単射性より $f(e_1(x)) \neq f(e_2(x))$ なので $(f \circ e_1)(x) \neq (f \circ e_2)(x)$ である. これは $(f \circ e_1) \neq (f \circ e_2)$ という事に他ならない. 故に主張が言えた. \square

(2) 全射はエピである.

証明

f が全射の時 $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$ を言えよ. f の全射性より任意の $y \in C$ に対し, $f(x) = y$ となる様な B の元 x が存在する. この時, $g_1(y) = g_1 \circ f(x) = g_2 \circ f(x) = g_2(y)$ である. y は任意だったので主張が従う. \square

定義 0.1.13.

$I \in C$ が C の始対象(initial object) であるとは, 任意の $C \in C$ に対して, 射 $f: I \rightarrow C$ が唯一つしか存在しない事を言う. $T \in C$ が C の終対

象(terminal object) であるとは, 任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して, 射 $f: C \rightarrow T$ が唯一つしか存在しない事を言う. 全ての始対象は同型であり, 全ての終対象もまたそうである. 始対象かつ終集合である様な対象を零対象(zero object) と言う.

例 0.1.14.

Sets に於いて, \emptyset は始対象であり, 1 元集合 pt は終対象である. Ab に於いて, 0 は零対象である.

注 0.1.15.

\mathcal{C} が零対象を持つ時, 任意の $\text{Hom}(B, C)$ に対し, $B \rightarrow 0 \rightarrow C$ が考えられる. 記号の乱用ではあるがこれを 0 と書く.

定義 0.1.16.

$f: B \rightarrow C$ の核(kernel) とは, $f \circ i = 0$ なる $i: A \rightarrow B$ であって, 次の普遍性(universal property) を満たすものを言う.

普遍性: 任意の $e: A' \rightarrow B$ に対して, $e \circ i = 0$ を満たす様な $e': A' \rightarrow A$ が一意に存在する.

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{e'} & A & \xrightarrow{0} & \\ e \downarrow & \circlearrowleft & i \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow 0 \\ & & B & \xrightarrow{f} & C \\ & & e & & f \end{array}$$

命題 0.1.17.

- (1) 核はモニックである.
- (2) 全ての核は同型である.

証明

(1) $j, j': A' \rightrightarrows A$ とした時, $i \circ j = i \circ j' \Rightarrow j = j'$ を言えばよい. $f \circ (i \circ j) = f \circ (i \circ j') = 0$ なので, $(i \circ j) = i \circ k, (i \circ j') = i \circ k'$ となる様な $k, k': A' \rightrightarrows A$ が一意に存在する. $i \circ j = i \circ j' = i \circ k = i \circ k'$ であるが, $k = j, k' = j'$ と取れるので, これらの一意性から $j = j'$ を得る. 故に主張が言えた. □

(2) 普遍性より明らか. □

注 0.1.18.

上の命題より核は B の部分対象と見ることができる.

定義 0.1.19.

$f: B \rightarrow C$ の余核(cokernel) とは, $p \circ f = 0$ なる $p: C \rightarrow D$ であって,

次の普遍性を満たすものを言う．

普遍性：任意の $g : C \rightarrow D'$ に対して， $g \circ f = 0$ を満たす様な $g' : D \rightarrow D'$ が一意に存在する．

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & \\ 0 \downarrow & \circlearrowleft & p \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow g \\ & \xrightarrow{0} & D & \xrightarrow{g'} & D' \end{array}$$

命題 0.1.20.

(1) 余核はエピである．

(2) 全ての余核は同型である．

証明

(1) $q, q' : D \rightrightarrows D'$ とした時， $q \circ p = q' \circ p \Rightarrow q = q'$ を言えばよい．

$(q \circ p) \circ f = (q' \circ p) \circ f = 0$ なので， $(q \circ p) = r \circ p, (q' \circ p) = r' \circ p$ となる様な $r, r' : D \rightrightarrows D'$ が一意に存在する． $q \circ p = q' \circ p = r \circ p = r' \circ p$ であるが， $q = r, q' = r'$ と取れるので，これらの一意性から $q = q'$ を得る．故に主張が言えた． □

(2) 普遍性より明らか． □