

Teichmüller空間論

内藤と大垣と国井と山口のセミナー

No.3

はじめに

今日のタイヒミュラー空間論の研究は、複素関数論は勿論、リーマン面論、代数曲線論、クライン群論、リー群論、保型形式論、多変数関数論、複素多様体論、微分方程式論、代数幾何学、微分幾何学、低次元トポロジー、複素力学系、エルゴード理論などの多岐の分野に広がっており、最近では、素粒子物理学における弦理論 (string theory) においても重要な役割をはたしているらしい。それ故、タイヒミュラー空間論の展開には、多くの予備知識が求められる。だが、恥ずかしながら筆者の力の及ばぬ次第で、今現在ではタイヒミュラーの 'タ' の字も把握できていない状況である。これからこのセミナーで発表させて頂くにあたって、皆さんと共に勉強させて頂き、皆さんのこれからの研究に微力ながらも力添えができれば幸いである。

参考文献

- [1] 今吉洋一 谷口雅彦 『タイヒミュラー空間論』, 日本評論社 (1989)
- [2] 高橋礼司 『複素解析』, 東京大学出版会 (1990)
- [3] 須川敏幸 『「平成七年度幾何学的複素解析の総合的研究」による研究集会資料』, 京都大学大学院 理学研究科 (1995)
- [4] Frederick P. Gardiner & Nikola Lakic, 『Quasiconformal Teichmüller Theory』, American Mathematical Society (2000)

第1章 擬等角写像

§1 等角から擬等角へ

タイヒミュラー空間論を学ぶ上で、擬等角写像の概念は避けては通れない。この節では、擬等角写像のぼんやりとしたイメージを掴んでもらいたい。

定義 1.1.1. 領域 D で定義された複素数値関数 $w = f(z)$ が D で正則であるとは、 D の各点で（複素）微分可能な時を言う。

定義 1.1.2. 複素数値関数 $w = f(z)$ が点 z_0 で等角であるとは、 f が z_0 で交わる任意の微分可能な2曲線の向きとなす角を保つときを言う。すなわち、任意の $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$: 微分可能な曲線 ($\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0$) に対して、

$$\arg \gamma_2'(t_0) - \arg \gamma_1'(t_0) = \arg (f \circ \gamma_2)'(t_0) - \arg (f \circ \gamma_1)'(t_0).$$

命題 1.1.3. 領域 D で正則な複素数値関数 $w = f(z)$ は、 $f'(z_0) \neq 0$ なる点 z_0 で等角である。

Remark.

逆に、領域 D で連続微分可能な複素数値関数 f が、各点で等角で、0でないヤコビアンを持つならば、 $f(z)$ または $\overline{f(z)}$ が正則。

定義 1.1.4. 領域 D で定義された複素数値関数 f が D の点 z_0 でべき級数展開可能であるとは、 z_0 を中心とし、 D に含まれるような半径が $r > 0$ の開円板 $|z - z_0| < r$ と、収束半径が少なくとも r に等しいべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が存在して、以下を満たすときを言う。

$|z - z_0| < r$ のとき、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

定義 1.1.5. 領域 D で定義された複素数値関数 f が, D の各点でべき級数展開可能ならば, f は " D 上解析的である " または " D 上の解析関数である " と言う .

Remark.

上のべき級数は一意的に定まり, その係数は z_0 を中心とする Taylor 展開の係数に等しい . また, f の一階導関数 $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$.

命題 1.1.6. 正則関数 \iff 解析関数 .

これは大変著しい性質で, よく使われる概念なので是非憶えておいて頂きたい .

Remark.

このように, D 上正則な複素数値関数 f は D の任意の点 z_0 でべき級数展開され (たしか) その収束半径は少なくとも z_0 と ∂D との距離に等しい .

定義 1.1.7. (擬等角写像のぼんやりとした (感覚的) 定義)

擬等角写像とは, なにやら向きを保ち, かつ微小な形を捻じ曲げる (円楕円) ような同相写像で, ある条件を満たすものである .

勿論, 擬等角写像にはいくつかのきちんとした同値な定義がある (解析的定義や幾何的定義) が, ここではひとまずきちんとした定義はせずに, それは後回しにする .

次の節では, その " 同相で向きを保ち, かつ微小な形を捻じ曲げる " ような線型写像を考察する .