

モース理論

内藤と大垣と国井と山口のセミナー

No.004

はじめに

本セミナーではモース理論について解説する。モース理論とはどういうものかということを詳しく丁寧に説明していくつもりではあるが、途中で何に向かっているのかわからなくなる可能性があるので、最初にモース理論についての紹介をする。仮定する知識は学部3年までの知識にするつもりだが、モース理論を解説していく上で欠くことのできない定義、定理などは復習として講義の中に含めるつもりです。

参考文献

- [1] J. ミルナー (著), 志賀浩二 (訳), モース理論, 吉岡書店 (1968)
- [2] 松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波書店 (1997)
- [3] 松本幸夫, 多様体の基礎, 東京大学出版会 (1988)

1 準備

(1) ホモトピー同値

1.1 定義

X と Y を位相空間とする．連続写像 $f, g : X \rightarrow Y$ に対して

$$\begin{cases} F(x, 0) = f(x) \\ F(x, 1) = g(x) \end{cases}$$

を満たす連続写像 $F : X \times I \rightarrow Y$ が存在するとき, f と g はホモトピックであるといい, $f \simeq g$ で表す．また F を f と g の間のホモトピーという．

1.2 定義

X と Y を位相空間とする． X と Y の間に

$$gf \simeq id_X, \quad fg \simeq id_Y$$

を満たす連続写像 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ が存在するとき, X と Y はホモトピー同値である, または同じホモトピー型をもつという．このとき $X \simeq Y$ で表す．

(2) 変位レトラクト

1.3 定義

X を位相空間, A を X を部分集合とする． A が X の変位レトラクトであるとは連続写像 $r_t : X \rightarrow X$ が存在して次を満たすときをいう．

$$r_0 = id, \quad r_1 = A, \quad r_t|_A = id$$

1.4 命題

X を位相空間, A を X を部分集合とする． A が X の変位レトラクトであるならば, A と X はホモトピー同値である．

(3) CW 複体

$$D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

1.5 定義

X を位相空間とし、 e^n を X の部分集合とする。 e^n に対し連続写像 $\varphi: D^n \rightarrow X$ で同相写像 $\varphi|_{\text{int}D^n}: \text{int}D^n \rightarrow e^n$ を誘導するものが存在するとき、 e^n を X の n 次元胞体といい φ を e^n の特性写像という。また、 0 次元胞体とは X の点のことであるとする。

1.6 定義

X をハウスドルフ空間とする。 X の胞体の集合 $\{e_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ が次の条件を満たすとき、 X は胞複体である (X の胞体分割が与えられた) といい、 $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ で表す。

(1) $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$

(2) $\lambda \neq \mu$ ならば $e_\lambda \cap e_\mu = \emptyset$

(3) 各胞体 e^n の特性写像 $\varphi: D^n \rightarrow X$ は $\varphi(\partial D^n) \subset X^{n-1} = \bigcup_{k < n-1} e^k$ になっている。

また、胞体の個数が有限である胞複体を有限 CW 複体という。

1.7 定義

$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ とする Λ の部分集合 Λ' に対して、 $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} e_\lambda$ となるとき、 A を X の部分複体という。

1.8 定義

胞複体 $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ が次の条件を満たすとき、 X を CW 複体という。

(1) X の各胞体 e に対し、 e を含む X の有限部分複体が存在する。

(2) X の部分集合 F に対して、

F が X の閉集合 $\Leftrightarrow X$ の各胞体 e に対し $F \cap \bar{e}$ が \bar{e} の閉集合。

例

(0) $X = D^1$ とすると、 $X = e^0 \cup e^1$

(1) $X = D^2$ とすると、 $X = e^0 \cup e^1 \cup e^2$

(2) $X = D^3$ とすると、 $X = e^0 \cup e^2$

2 モース理論の紹介

ここでは、一つ例をあげて今後どのようなことをするつもりであるかを紹介する。

M, f, M^a を次で定義し、 p, q, r, s を図を満たすようにとる。

$M : \mathbf{R}^3$ 内の平面 V に一点で接するトーラス

$f : M \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = d(x, V) : d$ は x と V との距離。

$M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$

このとき、

- (1) $a < f(q) \implies M^a \neq \emptyset$.
- (2) $f(p) < a < f(q) \implies M^a \approx e^2$.
- (3) $f(q) < a < f(r) \implies M^a \approx \text{アニュラス}$.
- (4) $f(r) < a < f(s) \implies M^a \approx \text{円周を境界にもつ種数 1 のコンパクト多様体}$.
- (5) $f(s) < a \implies M^a = M$.

が成り立っているが、各段階から次の段階に移るときの変化の様子は次のようになっている。

(1) \rightarrow (2) \implies 0 次元胞体を張り合わせる操作。

(2) \rightarrow (3) \implies 1 次元胞体を張り合わせる操作。

(3) \rightarrow (4) \implies 1 次元胞体を張り合わせる操作。

(4) \rightarrow (5) \implies 2次元胞体を張り合わせる操作 .

つまり, M は有限 CW 複体にホモトピー同値 $(M \simeq e^0 \cup e^1 \cup e^1 \cup e^2)$.

以上のことを任意の多様体において調べていく .

3 多様体上のモース理論

モース関数

M を m 次元の閉じた多様体, $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ をその上の滑らかな関数とする.

3.1 定義 (f の臨界点)

M の点 p_0 が $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ の臨界点であるとは, p_0 のまわりの局所座標系 (x_1, \dots, x_m) について

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(p_0) = 0$$

が成り立つことである.

3.2 定義 (Hesse 行列)

p_0 が $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ の臨界点であるとき, $m \times m$ 行列 $H_f(p_0) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ を臨界点 p_0 における関数 f の Hesse 行列という.

3.3 定義 (非退化な臨界点)

$\det H_f(p_0) \neq 0$ のとき p_0 を非退化な臨界点という. $\det H_f(p_0) = 0$ のとき p_0 を退化した臨界点という.

3.4 補題

臨界点 p_0 のまわりに 2 つの局所座標系 $(x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)$ をとり, それらによって計算した $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ の Hesse 行列をそれぞれ $H_f(p_0), H'_f(p_0)$ とすれば

$$H'_f(p_0) = {}^t J(p_0) H_f(p_0) J(p_0)$$

が成り立つ. ただし, $J(p_0)$ は (y_1, \dots, y_m) から (x_1, \dots, x_m) への座標変換にともなう Jacobi 行列を p_0 で計算したものとする.

3.5 系

$f: M \rightarrow \mathbf{R}$ の臨界点 p_0 が非退化か退化しているかは p_0 のまわりの局所座標の取り方によらない.

3.6 定義 (モース関数)

関数 $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ がモース関数であるとは、 f の臨界点がすべて非退化な臨界点であることである。

3.7 補題

f を $f(0) = 0$ を満たす、 \mathbf{R}^n における 0 の凸近傍 V で定義された C^∞ 関数とする。そのとき

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ。ここで、 g_i は $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ を満たす、 V で定義された適当な C^∞ 関数である。

3.8 補題

M を可微分多様体とし、関数 $f: V \rightarrow \mathbf{R}$ を点 $p_0 \in M$ の近傍で定義された

$$f(p_0) = 0$$

を満たす可微分関数とする。

点 p_0 のまわりの座標近傍 $(U, \varphi; x_1, \dots, x_n)$ を、 $U \subset V$ でありかつ

$$x_1(p_0) = \dots = x_n(p_0) = 0$$

を満たすようにとり、十分小さな $\epsilon > 0$ をとって点 p_0 の近傍 W を

$$W' = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid |x_i| < \epsilon, i = 1, \dots, n\} \subset \varphi(U), W = \varphi^{-1}(W')$$

となるように選ぶ。このとき関数 $f = f|_W: W \rightarrow \mathbf{R}$ は可微分関数 $g_i: W \rightarrow \mathbf{R}$ を用いて、

- $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$
- $g_i(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$

と表される。

3.9 定理 (モースの補題)

点 p_0 が $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ の非退化な臨界点であるとき、 p_0 のまわりの局所座標系 (X_1, \dots, X_m) を選んで、関数 f の形が次の標準形にすることができる。

$$f = -X_1^2 - \dots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_m^2 + f(p_0)$$

また、 $X_1(p_0) = \dots = X_m(p_0) = 0$ となる。

3.10 定義

λ を非退化な臨界点 p_0 の指数と呼ぶ .

3.11 命題

非退化な臨界点は孤立している .

3.12 命題

$f : M \rightarrow \mathbf{R}$ を *Morse* 関数とする . f の臨界点の個数は有限個である .

4 Morse 理論の基礎定理までの準備

ベクトル場と積分曲線

4.1 定義

M を可微分多様体とし、 p_0 を M の点とする。 M 上の可微分関数 $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ 全体のつくる多元環 $C^\infty(M)$ から \mathbf{R} への写像 $L : C^\infty(M) \rightarrow \mathbf{R}$ が

$$L(f + g) = L(f) + L(g)$$

$$L(af) = aL(f)$$

$$L(f \cdot g) = f(p_0)L(g) + L(f)g(p_0)$$

を満たすとき、 L を点 p_0 における接ベクトルという。

点 p_0 における接ベクトルの集合：

$$T_{p_0}(M) = \{L \mid L \text{ は点 } p_0 \text{ における接ベクトル} \}$$

は和 $L_1 + L_2$ 、スカラー倍 aL

$$(L_1 + L_2)(f) = L_1(f) + L_2(f)$$

$$(aL)(f) = aL(f) \quad a \in \mathbf{R}$$

に関して \mathbf{R} 上のベクトル空間となる。このベクトル空間 $T_{p_0}(M)$ を点 p_0 における接ベクトル空間という。

4.2 定義

M を可微分多様体とし、 O を M の開集合とする。 X が O のベクトル場であるとは、 X は、 O の各点 p に対し p における M の接ベクトル $X_p \in T_p(M)$ を対応させる写像

$$X : O \rightarrow \bigcup_{p \in O} T_p(M)$$

であって、かつ次の可微分性の条件を満たすものである。

U なる点 p の周りの座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_n)$ に対し、

$$X(p) = \sum_{i=1}^n \xi_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

として表して得られる関数 $\xi_i : U \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$ が可微分である。

4.3 命題

M を可微分多様体とする． X を M のベクトル場とすると、可微分関数 $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ に対し、関数 $Xf : M \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$(Xf)(p) = X_p(f)$$

で定義することにより、写像 $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ を得るが、この X は

$$X(f + g) = X(f) + X(g)$$

$$X(af) = aX(f)$$

$$X(f \cdot g) = f(p_0)X(g) + X(f)g(p_0)$$

を満たしている．逆に上記の条件を満たす写像 $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ は、 $X_p(f) = (Xf)(p)$ と定義することにより M 上のベクトル場を定める．

4.4 補題

M を可微分多様体とし、 X を M 上のベクトル場とする．このとき任意の可微分関数 $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ に対して

$$(fX)_p = f(p)X_p$$

と定義すると、 fX も M 上のベクトル場となる．

4.5 例

可微分関数 $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ に対し

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

は \mathbf{R} 上のベクトル場である．この意味は、

$$(\text{grad } f)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \quad p \in U$$

のことである．これを f の勾配という．

4.6 定義

M を可微分多様体とし、 X を M 上のベクトル場とする．可微分曲線 $c : (\alpha, \beta) \rightarrow M$ が X の積分曲線であるとは

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)}, \quad t \in (\alpha, \beta)$$

がなりたつことである．

4.7 命題

M を可微分多様体とし、 X を M 上のベクトル場とする． \tilde{c}, c をそれぞれ 0 を含む開区間 \tilde{J}, J で定義された X の積分曲線で、かつ

$$\tilde{c}(0) = c(0)$$

とすると、 \tilde{c}, c はその共通区間で一致する．

1 助変数群

M を可微分多様体とする．可微分写像 $\phi: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ が次の 2 つの条件

- (1) $\phi(0, p) = p \quad p \in M$
- (2) $\phi(s, \phi(t, p)) = \phi(s+t, p) \quad s, t \in \mathbf{R}, p \in M$

を満たすとき、 ϕ を 1 助変数群という．

1 助変数群 $\phi: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ に対し、 $\phi(t, p)$ を $\phi_t(p)$ と書くことにすると、各 $t \in \mathbf{R}$ に対し、写像

$$\phi_t: M \rightarrow M$$

が定義できるが、(1),(2) の条件は

- (1) $\phi_0 = 1$
- (2) $\phi_s \phi_t = \phi_{s+t} \quad s, t \in \mathbf{R}$

のことである．特に、 ϕ_t は可微分同相写像になっていて ϕ_t の逆写像は ϕ_{-t} である．

4.8 定義

点 p_0 を固定するとき、写像

$$c: \mathbf{R} \rightarrow M, \quad c(t) = \phi_t(p_0)$$

は $t = 0$ で点 p_0 を通る可微分曲線になる．この曲線を 1 助変数群 ϕ による点 p_0 の軌道曲線という．

4.9 定義

M を可微分多様体とし、 $\phi: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ を 1 助変数群とする．このとき M 上のベクトル場 X を

$$X_p(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi_t(p)) - f(p)}{t} = \left. \frac{df(\phi_t(p))}{dt} \right|_{t=0} \quad f \in C^\infty(M)$$

で定義する．このベクトル場 X は 1 助変数群 ϕ を生成する、または X は 1 助変数群 ϕ に付随するベクトル場であるという．

4.10 命題

M を可微分多様体とし、 $\phi: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ を 1 助変数群、 X を ϕ に付随する M 上のベクトル場とする．このとき、点 $p_0 \in M$ の軌道曲線

$$c: \mathbf{R} \rightarrow M, \quad c(t) = \phi_t(p_0)$$

は $t = 0$ で点 p_0 を通る可微分曲線であるが、さらに X の積分曲線:

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)} \quad t \in \mathbf{R}$$

になっている．

4.11 命題

可微分多様体 M 上の 2 つの 1 助変数群 $\tilde{\phi}, \phi$ が同じベクトル場 X から生成されるならば、 $\tilde{\phi}$ と ϕ は一致する．

4.12 定理

M をコンパクト可微分多様体とすると、 M 上のベクトル場 X は 1 助変数群 $\phi: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ を生成する．