

特異ホモロジー論

内藤と大垣と国井と山口のセミナー

No.6

はじめに

特異ホモロジー群は，かつては空間の分割という概念でしかホモロジー群を考えていなかった時代からすれば，大変画期的なものであるが，その反面実際に計算するのが，不可能ともいえる．両者にはそれぞれ利点と欠点がある．その両者の利点と欠点を感じてもらい，その2つがどのように絡み合っていくのかという事を，特異ホモロジーの視点から見ていくことにする．そして場合に応じてそれぞれの利点を使いわけることができるということを本講座の主な目標とする．時間が許せばコホモロジー群，さらにはポアンカレの双対定理などにも手を伸ばしていきたい．初回から参加する上で必要な予備知識は，線形代数の標準的な知識と，群論の初歩，および位相空間の大学2年で扱う内容とする．

参考文献

[1]A.Hatcher , Algebraic Topology , Springer(2002)
increse

第1章 ホモロジー代数入門

1.1 チェイン複体

定義 1.1.1.

群の列 $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ に準同型の列 $(g_n : G_n \rightarrow G_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ が与えられているときに, $G = (G_n, g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ と書き, 群と準同型の系列, 単に群の系列といい, 次のように書く;

$$\cdots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{g_{n+1}} G_n \xrightarrow{g_n} G_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

整数 i, j ($i \leq j$) に対し, $G_n = \{e\}$ ($n \leq i, j \leq n$) であれば,

$$\{e\} \longrightarrow G_j \xrightarrow{g_j} G_{j-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_{i+1} \xrightarrow{g_{i+1}} G_i \longrightarrow \{e\}$$

と書く.

定義 1.1.2.

アーベル群の系列 $C = (C_n, f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ が,

$$f_{n-1}f_n = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

をみたすとき C をチェイン複体という.

注. $\text{Im} f_{n+1}$ は $\text{Ker} f_n$ の部分群 (正規部分群) である.

例. 単体的複体 K に対して, チェイン群の系列 $C(K) = (C_n(K), \partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ はチェイン複体である.

定義 1.1.3.

$C = (C_n, f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ をチェイン複体とする.

$$H_n(C) = \text{Ker } f_n / \text{Im } f_{n+1}$$

を C の n 次元ホモロジー群という .

定義 1.1.4.

チェイン複体 $A = (A_n, \alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}, B = (B_n, \beta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ に対して , 準同型の列 $f = \{f_n : A_n \rightarrow B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が , 任意の n について ,

$$f_{n-1}\alpha_n = \beta_n f_n$$

をみたすとき , f を A から B へのチェイン準同型という .

注 . $f_n(\text{Ker } \alpha_n) \subset \text{Ker } \beta_n, f_n(\text{Im } \alpha_n) \subset \text{Im } \beta_n$ が成り立つ .

注 . f_n から準同型 $f_{n*} : H_n(A) \rightarrow H_n(B), f_{n*}([z]) = [f_n(z)]$ が誘導される . このとき , id_{n*} は同型 , $(f'_n f_n)_* = f'_{n*} f_{n*}$ である .

定義 1.1.5.

チェイン複体 $A = (A_n, \alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}, B = (B_n, \beta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ と A から B へのチェイン準同型 $f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}}, g = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ に対し , 任意の n について ,

$$D_{n-1}f_n + g_{n+1}D_n = f_n - g_n$$

をみたすような準同型 $D_n : A_n \rightarrow B_{n+1}$ が存在するとき , f と g はチェインホモトピックであるという .

命題 1.1.6.

f と g がチェインホモトピックであるならば , 任意の n について , $f_{n*} = g_{n*}$ が成り立つ .

1.2 ホモロジー完全系列

定義 1.2.1.

アーベル群の系列 $A = (A_n, \alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ について ,

$$\text{Ker } \alpha_n = \text{Im } \alpha_{n+1}$$

が成り立つとき , この系列を完全系列という .

例．系列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ が完全であるための必要十分条件は α が単射， β が全射，かつ $\text{Ker}\beta = \text{Im}\alpha$ が成り立つときである．

例． i を包含写像， q を商写像とすると，

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{q} B/A \longrightarrow 0$$

は完全系列である．

主張 1.2.2.

アーベル群の完全系列はチェイン複体である．

命題 1.2.3.

$C = (C_n, \partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ， $C' = (C'_n, \partial'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ， $C'' = (C''_n, \partial''_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ をチェイン複体とする．

任意の n に対して，系列

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{i_n} C'_n \xrightarrow{j_n} C''_n \longrightarrow 0$$

が完全であるとき，準同型 $\Delta_n : H_n(C'') \rightarrow H_{n-1}(C)$ が，

$$\Delta_n([z'']) = [i_{n-1}^{-1} \partial'_n j_n^{-1}(z'')]$$

で定まる．

注．次の定理に登場する文字は上の命題に従うものとする．

定理 1.2.4.

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(C'') \xrightarrow{\Delta_{n+1}} H_n(C) \xrightarrow{i_{n*}} H_n(C') \xrightarrow{j_{n*}} H_n(C'') \longrightarrow \cdots$$

は完全である．

第2章 特異ホモロジー論

2.1 位相空間の特異ホモロジー群

X は位相空間とする .

定義 2.1.1.

集合

$$\{(x_0, x_1, \dots, x_k) \in R^{k+1} \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, k)\}$$

を標準 k 単体といい, Δ^k と書く . Δ^k から X への連続写像 $f^k: \Delta^k \rightarrow X$ を X の特異 k 単体という .

定義 2.1.2.

X の特異 k 単体の形式的な整数係数の一次結合 $s = \sum_i a_i f_i^k$ を X の特異 k 次元チェインという . 2 つの特異 k 次元チェイン $s_1 = \sum_i a_i f_i^k$, $s_2 = \sum_i b_i f_i^k$ の和を $s_1 + s_2 = \sum_i (a_i + b_i) f_i^k$ で定義すると, X の特異 k 次元チェイン全体の集合 $S_k(X)$ は $\{f_i^k\}$ を生成元の集合とする自由アーベル群になる . この $S_k(X)$ を X の特異 k 次元チェイン群という . $S_k(X) = 0 \quad (k < 0)$ は約束する .

定義 2.1.3.

$j = 0, 1, \dots, k$ に対し, 線形写像 $R^k \rightarrow R^{k+1}$ の制限 $\varepsilon_k^j: \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ を,

$$\varepsilon_k^j(e_i) = e_i' \quad (i \leq j) \quad , \quad \varepsilon_k^j(e_i) = e_{i+1}' \quad (j < i)$$

で定まるものとする . ただし, e_i, e_i' はそれぞれ R^k, R^{k+1} の i 成分単位ベクトルとする . $\partial_k: S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$ をまず, X の各特異 k 単体に

対して, $\partial_k(f^k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j f_j^{k-1} \circ \varepsilon_k^j$ で定義し, 特異 k 次元チェイン $s = \sum_i a_i f_i^k$ に対しては, $\partial_k(s) = \sum_i a_i \partial_k(f_i^k)$ で定義すると, これは準同型になる. この ∂_k を k 次元バウンダリー作用素という.

命題 2.1.4.

系列 $S(X) = (S_n(X), \partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ はチェイン複体である.

定義 2.1.5.

$H_n(S(X))$ のことを X の特異 n 次元ホモロジー群といい, 以後 $H_n(X)$ と書く.

命題 2.1.6.

$X = \{x\}$ (1 点のみからなる集合) のとき,

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}, \quad H_k(X) = 0 \quad (k \neq 0)$$

が成り立つ.

X, Y を位相空間とし, $g: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. X の各特異 k 単体 $f^k: \Delta^k \rightarrow X$ に対し, 合成写像 $g \circ f^k: \Delta^k \rightarrow Y$ は Y の特異 k 単体になる. $g_k(f^k) = g \circ f^k$ により, g_k を定義するとこれは $S_k(X)$ から $S_k(Y)$ への写像になる. さらに, $g_k(f_1^k + f_2^k) = g_k(f_1^k) + g_k(f_2^k)$ で定義するとこれは準同型になる. このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 2.1.7.

$g_k: S_k(X) \rightarrow S_k(Y)$ はチェイン準同型である.

注. チェイン準同型 $g_k: S_k(X) \rightarrow S_k(Y)$ は準同型 $g_{k*}: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ をひきおこす. g_k, g_{k*} のことをそれぞれ連続写像 g のひきおこすチェイン準同型, ホモロジー準同型という.

命題 2.1.8.

(1) 恒等写像 $1_X: X \rightarrow X$ は, 恒等写像 $(1_X)_n = 1_{S_n}, (1_X)_{n*} = 1_{H_n(X)}$ をひきおこす.

(2) 連続写像 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ の合成写像 $g \circ f$ に対して,

$$(g \circ f)_n = g_n \circ f_n, (g \circ f)_{n*} = g_{n*} \circ f_{n*}$$

が成り立つ.

(3)(特異ホモロジー群の位相不変性) 同相写像 $h: X \rightarrow Y$ に対し,

$$h_{n*}: H_n(X) \cong H_n(Y)$$

である.

定義 2.1.9.

X と部分空間 A に対して,

$$S(X, A) = S(X)/S(A) = (S_n(X)/S_n(A))_{n \in \mathbb{Z}}$$

のことを, 対 (X, A) のチェイン複体という.

注. $S(X), S(A)$ はそれぞれチェイン複体になる. さらに, 各 n に対して, $S_n(A)$ は $S_n(X)$ の部分群になる.

命題 2.1.10.

X と部分集合 A に対して, 完全系列

$$0 \longrightarrow S_n(A) \xrightarrow{i_n} S_n(X) \xrightarrow{j_n} S_n(X, A) \longrightarrow 0$$

が各 n に対して得られ, さらに, 完全系列

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\Delta_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{i_{n*}} H_n(X) \xrightarrow{j_{n*}} H_n(X, A) \longrightarrow \cdots$$

を得る (この完全系列を対 (X, A) の間の完全系列という).