

# 代数幾何入門以前

内藤と大垣と国井と山口のセミナー

No.007 外伝

## はじめに

代数幾何の基礎中の基礎について大雑把に語る。

## 1 代数的集合と Zariski 位相

$k$  を体とする。

**定義 1.1.**  $n$  次元アフィン空間とは  $k$  の  $n$  個の直積集合  $k^n$  のことをいい、 $\mathbb{A}^n(k)$ 、あるいは、 $k$  が明らかな場合、 $\mathbb{A}^n$  とも書く。 $\mathbb{A}^1$  をアフィン直線、 $\mathbb{A}^2$  をアフィン平面という。

**定義 1.2.**  $k[X_1, \dots, X_n]$  の部分集合  $S$  に対し

$$\mathbf{V}(S) := \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid \text{任意の } S \text{ の元 } F \text{ に対して、} F(a_1, \dots, a_n) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$$

を  $\mathbb{A}^n$  のアフィン代数的集合という。

**命題 1.3.**  $R := k[X_1, \dots, X_n]$  とする。

(1)  $R$  の任意の部分集合  $S$  に対して

$$\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(\langle S \rangle)$$

(2)  $R$  の部分集合  $I, J$  に対し

$$I \subset J \text{ ならば } \mathbf{V}(J) \subset \mathbf{V}(I)$$

(3)  $R$  のイデアルの族  $\{I_\alpha\}$  に対し、 $\mathbf{V}(\bigcup_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha \mathbf{V}(I_\alpha)$

(4)  $R$  の部分集合  $I, J$  に対して

$$\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) = \mathbf{V}(\langle I \rangle \cap \langle J \rangle)$$

(5)  $\mathbf{V}(\{0\}) = \mathbb{A}^n(k)$ ,  $\mathbf{V}(\{1\}) = \mathbf{V}(R) = \emptyset$

定義 1.4. 命題 1.3 の (3)(4)(5) により  $\mathbb{A}^n$  の代数的集合は  $\mathbb{A}^n$  の中で閉集合の公理を満たす。これにより定義される位相を Zariski 位相という。

定義 1.5. 位相空間  $X$  の部分集合  $Y$  が可約であるとは、 $X$  に真に含まれる閉集合  $Y_1, Y_2$  により  $Y$  が  $Y = Y_1 \cup Y_2$  と表せることをいう。可約でない集合を既約という。特に、 $X$  が既約なとき  $X$  を既約な位相空間という。ただし、空集合は既約でないとする。

命題 1.6.  $X$  を既約な位相空間とする。

- (1) 任意の空でない開集合は  $X$  で稠密である。
- (2)  $X$  は連結である。

定義 1.7.  $\mathbb{A}^n$  の既約な閉集合を  $\mathbb{A}^n$  のアフィン閉部分多様体、または単にアフィン多様体という。アフィン多様体の ( $\mathbb{A}^n$  からの相対位相による) 開部分集合を準アフィン多様体という。

定義 1.8.  $\mathbb{A}^n$  の部分集合  $W$  に対し

$$\mathbf{I}(W) := \{F \in k[X_1, \dots, X_n] \mid W \text{ の任意の点 } (a_1, \dots, a_n) \text{ に対し } F(a_1, \dots, a_n) = 0\}$$

を  $W$  のイデアルという。これは  $k[X_1, \dots, X_n]$  のイデアルである。

命題 1.9. イデアルについて以下が成り立つ。

- (1)  $\mathbb{A}^n$  の部分集合  $V, W$  に対して  
 $V \subset W$  ならば  $\mathbf{I}(W) \subset \mathbf{I}(V)$
- (2)  $\mathbf{I}(V \cup W) = \mathbf{I}(V) \cap \mathbf{I}(W)$   
 $\mathbf{I}(V \cap W) \supset \mathbf{I}(V) + \mathbf{I}(W)$
- (3)  $\mathbf{I}(\emptyset) = k[X_1, \dots, X_n]$
- (4)  $k$  が無限体ならば  $\mathbf{I}(\mathbb{A}^n) = (0)$
- (5)  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$  に対し  
 $\mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\}) = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$

命題 1.10.  $S$  を  $k[X_1, \dots, X_n]$  の部分集合、 $W$  を  $\mathbb{A}^n$  の部分集合とする。

- (1)  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(S)) \supset S$   
 $\mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(S))) = \mathbf{V}(S)$
- (2)  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(W)) \supset W$   
 $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathbf{I}(W))) = \mathbf{I}(W)$

系 1.11.  $\mathbb{A}^n$  の代数的集合  $V, W$  に対して  $V = W$  と  $\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(W)$  は同値である。

定義 1.12. 可換環  $R$  のイデアル  $I$  に対し

$$\sqrt{I} := \{r \in R \mid \text{ある整数 } n \geq 1 \text{ で } r^n \in I\}$$

を  $I$  の根基と言う。定義より  $I \subset \sqrt{I}$  である。 $I = \sqrt{I}$  なる  $I$  を根基イデアルという。

命題 1.13.  $\mathbb{A}^n$  の代数的集合  $V$  に対し、 $\mathbf{I}(V) = \sqrt{\mathbf{I}(V)}$

命題 1.14. 素イデアルは根基イデアルである。

命題 1.15.  $\mathbb{A}^n$  の空でない代数的集合  $V$  が既約であることと  $\mathbf{I}(V)$  が素イデアルであることは同値である。

定理 1.16. (Hilbert の零点定理)

$k$  を代数閉体とする。 $k[X_1, \dots, X_n]$  のイデアル  $I$  に対し、 $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$  が成り立つ。

系 1.17.  $k$  を代数閉体とする。 $k[X_1, \dots, X_n]$  の根基イデアル全体と  $\mathbb{A}^n$  の代数的集合全体は 1 対 1 に対応し、 $I \mapsto \mathbf{V}(I)$  と  $V \mapsto \mathbf{I}(V)$  が互いに逆写像である。