

Chern-Weil 理論

内藤と大垣と国井と山口のセミナー

No.8

はじめに

今のところ Chern-Weil 理論を目標としている．可微分多様体の分類に特性類というものが役立つ．特性類はある多様体を調べたいときに，その多様体上のファイバーバンドルの曲がり具合を表すものである．その特性類を接続や曲率といった考えを用い de Rham コホモロジーの言葉で記述する方法を与えるのが Chern-Weil 理論である．概念，定理などその意義を自他共に理解することが理想である．

参考文献

- [1] 松島与三著 「多様体入門」 (掌華房, 1965 年)
- [2] 森田茂之著 「微分形式の幾何学 1,2」 (岩波書店, 1996)
- [3] Johan L.Dupont 「Curvature and Characteristic Classes」 (L.N.M. 640, Springer, 1978)

1 de Rham コホモロジー

1.1 外積代数

定義 1.1.1 V を体 K 上のベクトル空間とし, $V^{\otimes k}$ を V の k 階のテンソル積とする. k 次対称群 \mathfrak{S}_k の元 σ に対し, 線形写像 $\sigma: V^{\otimes k} \rightarrow V^{\otimes k}$ を次で定義する.

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) := v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

このとき

$$A_k := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn} \sigma \cdot \sigma$$

で定義される写像を交代化作用素という.

定義 1.1.2 ベクトル空間 V の k 階外積 $\bigwedge^k V$ を次で定義する.

$$\bigwedge^k V := V^{\otimes k} / \ker A_k$$

ただし $\bigwedge^0 V = K$ とする.

定義 1.1.3 双線形写像

$$\begin{aligned} \wedge: \bigwedge^k V \times \bigwedge^l V &\rightarrow \bigwedge^{(k+l)} V \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto [\alpha \otimes \beta] \end{aligned}$$

を外積という. 外積は結合則をみたすことがわかる.

命題 1.1.4 $[\alpha] \in \bigwedge^k V, [\beta] \in \bigwedge^l V$ のとき

$$[\alpha] \wedge [\beta] = (-1)^{kl} [\beta] \wedge [\alpha]$$

がなりたつ.

命題 1.1.5 $\dim V = n$ のとき

$$\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k}$$

となる.

定義 1.1.6 $\bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k V$ は 外積 \wedge に関し K -代数となる. これをとくに外積代数という.

1.2 微分形式

定義 1.2.1 M を n 次元多様体とし, $\bigwedge^k T^*M := \bigcup_{p \in M} \bigwedge^k T_p^*M$ とする. このとき写像 $\omega : M \rightarrow \bigwedge^k T^*M$ が $\omega_p \in \bigwedge^k T_p^*M$ をみたすとき ω を k -形式という.

定義 1.2.2 k -形式 ω は次をみたすとき k 次微分形式という.

M の各点 p に対し, p の周りの局所座標系を $(U; x^1, \dots, x^n)$ とする. このとき T^*M の基 $\{dx^i\}_{1 \leq i \leq n}$ で ω を表したときその係数関数が微分可能. 即ち

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{(i_1, \dots, i_k)}(p) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

と表されたとき $(\omega_{(i_1, \dots, i_k)})$ が微分可能ということである.

定義 1.2.3 k 次微分形式全体を $A^k(M)$ とかく. さらに $A^*(M) := \bigoplus_{k=0}^n A^k(M)$ とすると $A^*(M)$ は自然に \mathbf{R} -代数となる.

注意 $\omega \in A^k(M)$ は次のように $C^\infty(M)$ -交代多重線形写像とみなせる.

$$\begin{aligned} \omega : \overbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}^k &\rightarrow C^\infty(M) \\ (\omega(X_1, \dots, X_k))_p &:= \omega_p(X_{1p}, \dots, X_{kp}) \end{aligned}$$

定義 1.2.4 外微分 $d : A^k(M) \rightarrow A^{k+1}(M)$ を次で定義する.

$k > 0$ のとき

$$\begin{aligned} (dw)(X_1, \dots, X_{k+1}) &:= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

$k = 0$ のときは

$$(df)(X) = Xf$$

とする.

命題 1.2.5 k 次微分形式 ω が次のように局所表示されたとする .

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{(i_1, \dots, i_k)} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

このとき次が成り立つ .

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{(i_1, \dots, i_k)} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

命題 1.2.6 ω を k 次微分形式 , η を l 次微分形式とすると

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

が成り立つ .

命題 1.2.7 外微分作用素 d は次をみたす .

$$d^2 = 0 .$$

定義 1.2.8 多様体 M から N への微分可能写像を ϕ とする . このとき

$$\begin{aligned} \phi^* : A^k(N) &\rightarrow A^k(M) \\ (\phi^*\omega)(X_1, \dots, X_k) &:= \omega(\phi_*X_1, \dots, \phi_*X_k) \quad (X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)) \end{aligned}$$

を引き戻し写像という .

命題 1.2.9 引き戻し写像 ϕ^* は $A^*(M)$ の準同型である . 即ち次の性質を持つ .

- (1) $\phi^*(\omega_1 + \omega_2) = \phi^*\omega_1 + \phi^*\omega_2$
- (2) $\phi^*(f\omega) = f\phi^*\omega \quad f \in C^\infty(N)$
- (3) $\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*\omega \wedge \phi^*\eta$

さらに

$$\phi^* \cdot d = d \cdot \phi^*$$

が成り立つ .

1.3 de Rham コホモロジー

定義 1.3.1 次の系列 $(A^k(M), d)$ を考える.

$$\dots \rightarrow A^{k-1}(M) \xrightarrow{d} A^k(M) \xrightarrow{d} A^{k+1}(M) \rightarrow \dots$$

閉じた k -形式全体を $Z^k(M)$, 完全な k -形式全体を $B^k(M)$ とかく. 即ち

$$Z^k(M) = \ker\{d : A^k(M) \rightarrow A^{k+1}(M)\}$$

$$B^k(M) = \operatorname{Im}\{d : A^{k-1}(M) \rightarrow A^k(M)\}$$

である.

定義 1.3.2 k 次元 de Rham コホモロジー群を

$$H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$$

で定義する.

定義 1.3.3 多様体 M の特異 k 単体全体を基底とする \mathbb{R} 上のベクトル空間を $S_k(M)$ とかく.

定義 1.3.4 σ を多様体 M の特異 k 単体, ω を k 次微分形式とする. このとき ω の σ 上の積分を次で定義する.

$$\int_{\sigma} \omega := \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega$$

特異 k チェイン $c = \sum_i a_i \sigma_i$ に対しては

$$\int_c \omega := \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega$$

とする.

定理 1.3.5 (stokes) $\omega \in A^{k-1}(M)$, $c \in S_k(M)$ のとき

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

が成り立つ.

定義 1.3.6 双一次形式 $\langle, \rangle : S_k(M) \times A^k(M) \rightarrow \mathbf{R}$ を次で定義する .

$$\langle c, \omega \rangle := \int_c \omega$$

注意 このとき Stokes の定理は次のように述べられる .

$$(c, d\omega) = (\partial c, \omega).$$

定義 1.3.7 $S_k(M) \times A^k(M)$ 上の双一次形式 \langle, \rangle は $H_k(M) \times H^k(M)$ 上の双一次形式を次のように誘導する .

$$\langle [c], [\omega] \rangle := \langle c, \omega \rangle .$$

定理 1.3.8 (de Rham) 多様体 M がコンパクトのとき $H_k(M)$ と $H^k(M)$ は有限次元である . さらに双一次形式 $\langle, \rangle : H_k(M) \times H^k(M) \rightarrow \mathbf{R}$ は非退化である .

系 1.3.9 $H^k(M)$ と $H_k(M)$ は双対性を持つ .