

工学者のための偏微分方程式入門

目次

1. 偏微分方程式の型
 - 1.1 2階偏微分方程式の型
 - 1.2 特性曲線
 - 1.3 境界層方程式の型
2. 楕円型偏微分方程式
 - 2.1 1次元の場合
 - 2.2 2次元の場合
 - 2.3 2次元 Laplace 方程式の解法
 - 2.4 Poisson 方程式
3. 放物型偏微分方程式
 - 3.1 1次元の場合
 - 3.2 時間的漸近状態
 - 3.3 1次元熱方程式の解法
4. 双曲型偏微分方程式
 - 4.1 1次元の場合
 - 4.2 1次元波動方程式の解
 - 4.3 特性曲線
5. 非線形偏微分方程式
 - 5.1 Lorenz の方程式
 - 5.2 KdV 方程式

1. 偏微分方程式の型

1.1 2 階偏微分方程式の型

2 階偏微分方程式

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial xy} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = D$$

を考える。ここに、 A, B, C, D は、 $x, y, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_x, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_y$ の関数である。この方程式は

2 階の項 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ および $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial xy}$ に関して線型であるため、準線型 quasi-linear と呼

ばれる。

後述の説明により、 A, B, C, D の関係により、三つの型に分けられる。

(1) 楕円型 Elliptic type

$$B^2 - AC < 0 \quad \text{のとき}$$

(2) 放物型 Parabolic type

$$B^2 - AC = 0 \quad \text{のとき}$$

(3) 双曲型 Hyperbolic type

$$B^2 - AC > 0 \quad \text{のとき}$$

1.2 特性曲線

いま、解平面 integral surface、

$$\varphi = \varphi(x, y)$$

における、 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ と $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ の連続性について考える。これらの微分は

$$d\varphi_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} dy = \varphi_{xx} dx + \varphi_{xy} dy$$

$$d\varphi_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} dy = \varphi_{yx} dx + \varphi_{yy} dy$$

となる。

$\varphi_{xx}, \varphi_{xy}$ および φ_{yy} はこの 2 式と上記の微分方程式の解となる。これを行列表記にすると、

$$M\vec{x} = \vec{b}$$

ここに、

$$M = \begin{pmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \varphi_{xx} \\ \varphi_{xy} \\ \varphi_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} D \\ d\varphi_x \\ d\varphi_y \end{pmatrix}$$

である。

上記の連立方程式の解が定まらない(物理的に言うと、 φ_{xx} , φ_{xy} , φ_{yy} が不連続になる)

のは、係数の行列式がゼロになるときである。

$$\det M = 0$$

すなわち、

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char}^2 - 2B\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} + C = 0$$

のときである。これを解いて、

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

が特性曲線を与える。

したがって、双曲型 ($B^2 - AC > 0$) では、特性曲線が 2 本存在し、放物型

($B^2 - AC = 0$) では 1 本、そして、楕円型 ($B^2 - AC < 0$) では特性曲線が存在しない(「虚」 imaginary の曲線となる?) ことになる。

2. 楕円型偏微分方程式

(i) 1次元の場合

Laplace 方程式の 1 次元の場合を考えよう。(もし、そのようにいえるとしての話だが。) 方程式は、

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

であるので、容易に積分できて、

$$u = ax + b$$

定数 a および b は境界条件からきまる。

要するに、1 次元の Laplace 方程式(もしそのように言えるとすれば)の解は直線であり、その係数は境界条件で決まる。

このことは 2 次元でも拡張される。すなわち、「2 次元の Laplace 方程式の解は平面であり、その係数は境界条件で決まる」と予想される。ただし、一般的には境界条件は、ある程度自由であるので、2 次元の Laplace 方程式の解は、「境界条件に制約される平面に近い曲面」になる。この「平面に近い曲面」の数学的な作り方(力学といっても良い。あるいは、面の張り方とも言えよう。)が「周囲の値の平均値を取る」ということである。具体的に見てみよう。

(ii) 2次元の場合

2 次元 Laplace 方程式は以下のようにあらわされる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ここで、微分を差分で置き換えると、以下の式が得られる。

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

簡単のために、

$$\Delta x = \Delta y,$$

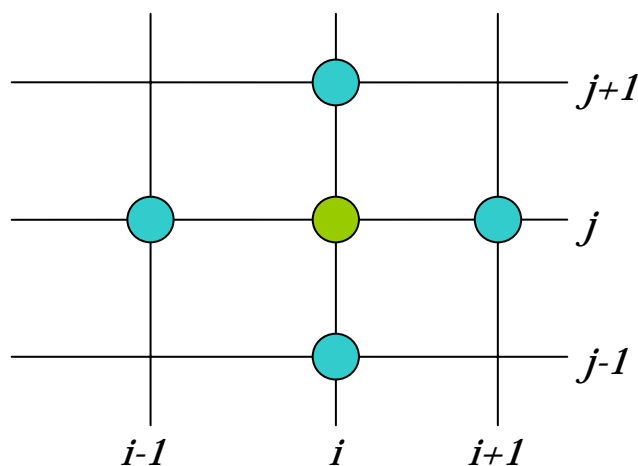
とおくと、

$$u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} = 0$$

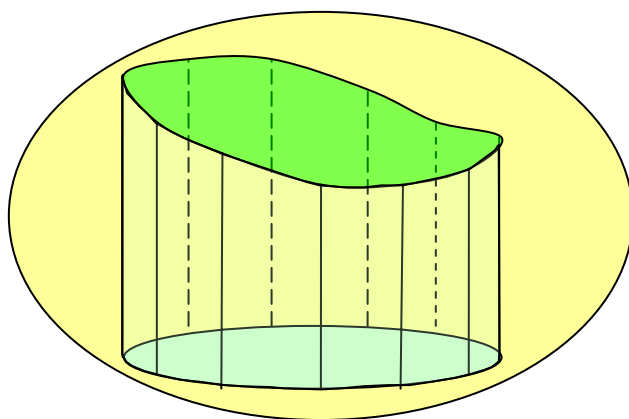
すなわち、

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{4}$$

が得られる。



これは、点 (i, j) における値 $u_{i,j}$ がその周囲の値の平均値であることを示す。言い換えると、Laplace 方程式は、面 $u = u(x, y)$ を周囲の平均値を取るように滑らかにする方程式であることを示している。



2.3 2次元 Laplace 方程式の解法

2.3.1 直接法 Direct Method (Richardson)

直接法では

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{4}$$

を直接に解く。すなわち、この式の右辺を既知とし、未知の左辺を求める。

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} \left(u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k \right)$$

ここに上付き添え字 superfix は逐次近似 iteration のステップを示す。

この方法では、初期値 $u_{i,j}^0$ を与えて $u_{i,j}^1$, $u_{i,j}^2$, $u_{i,j}^3$ 等を順次、収束するまで求めていく。Richardson の方法（直接法）という。

2.3.2 Liebman の方法

直接法は収束が遅い。そこで、Liebman は、下記のスキームを考えた。すなわち、計算の順序として、 i および j の増加する方向に計算するのが普通だから、点 (i, j) を計算するときには、点 $(i-1, j)$ および $(i, j-1)$ における最新値が分かっているのでそれを利用する。そこで、

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} \left(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k \right)$$

が得られる。

2.3.3 Successive Over Relaxation scheme

Liebman の式の右辺に $u_{i,j}^k - u_{i,j}^k = 0$ を加えると、

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{1}{4} \left(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k - 4u_{i,j}^k \right)$$

が得られる。右辺の括弧の中は、いわば、 $u_{i,j}^k$ が周囲の値からどれだけ少ないかを示している。この少なさを補正するのが右辺全体の意味であるが、補正量を多めに加えてやろうというのが Successive Over Relaxation (SOR) の考え方である。すなわち、

$$1 \leq \omega \leq 2$$

なる ω を導入して、式

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\omega}{4} (u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k - 4u_{i,j}^k)$$

により逐次近似を加速するのがこの方法である。ここに、 i および j は増加する方向に計

算するから、右辺の $u_{i-1,j}^{k+1}$ および $u_{i,j-1}^{k+1}$ は既知の値である。

2.3.4 Alternate Direction Implicit scheme

Liebman の式は、Laplace 方程式の解法は、熱方程式の解法の類似性を示している。すなわち、熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

で表される系が定常状態、すなわち、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

になったとすると、これは、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

であり、熱方程式の定常状態は Laplace 方程式に支配されることを示している。このことは、熱方程式の差分表示

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

において、定常状態が得られるまで計算していけば、それは Laplace 方程式の解になっていることを示している。

Alternate Direction Implicit (ADI) 法では、逐次近似を、x-sweep の手順と y-sweep の手順に分ける。すなわち、x-sweep においては、 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ に関する項は古い値を使用し、 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ に関する項は未知数として求めるものとする。式で示すと、

$$\frac{u_{i,j}^{k+1/2} - u_{i,j}^k}{(1/2)\Delta t} = \alpha \left(\frac{u_{i-1,j}^{k+1/2} - 2u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i+1,j}^{k+1/2}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{(\Delta y)^2} \right)$$

ここに、 α を上記の Successive Over Relaxation の考えから残している。

一方、y-sweep は、 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ に関する項に古い値を使い、

$$\frac{u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k+1/2}}{(1/2)\Delta t} = \alpha \left(\frac{u_{i-1,j}^{k+1/2} - 2u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i+1,j}^{k+1/2}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1}}{(\Delta y)^2} \right)$$

となる。ここで、 $\Delta x = \Delta y$ とし、

$$\rho = \frac{2(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t}$$

とおくと、下記が得られる。いずれも、左辺の u が未知数である。

$$u_{i-1,j}^{k+1/2} - (2 + \rho)u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i+1,j}^{k+1/2} = -\{u_{i,j-1}^k - (2 - \rho)u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k\}$$

$$u_{i,j-1}^{k+1} - (2 + \rho)u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1} = -\{u_{i-1,j}^{k+1/2} - (2 - \rho)u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i+1,j}^{k+1/2}\}$$

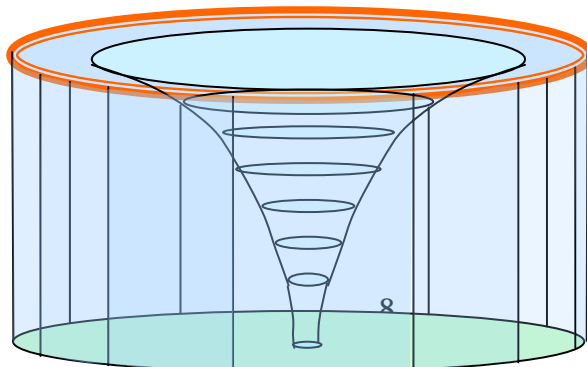
第一式は連立方程式になっており、左辺の各項が未知数であり、それらを x が増加する方向に順次解いていく。その後、同じようにして、第二式の左辺を y が増加する方向に順次解いていく。

2.4 Poisson 方程式

Poisson 方程式は、Laplace 方程式の右辺に湧き出しの項が加わったものである。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x - x_0, y - y_0)$$

この解曲面 Integral surface は下の図のようになり、湧き出し部分が特異点となっている。



3. 放物型偏微分方程式

放物形の方程式の例として、熱方程式または拡散方程式として知られている。例によって、1次元の熱方程式から考えよう。

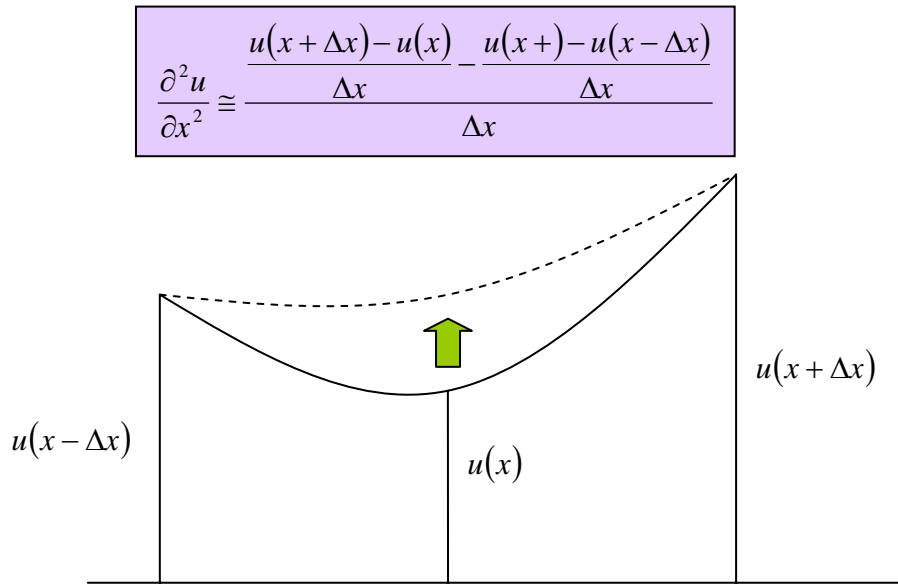
3.1 1次元の場合

1次元の熱方程式は以下の式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

この方程式の性質を、従属関数 u の独立関数 x に対する凹凸から考える。

- (1) 右辺を考える。 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} \geq 0$ のとき、
- (2) $u(x)$ が $x = x_0$ で x に関して下に凸。
- (3) すると、左辺も $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=x_0} \geq 0$
- (4) この式は、 t の増加とともに、 u が増加することを示している。
- (5) 「下に出っ張っているものは上にあげろ。」ということ。
- (6) すなわち、 $u(x)$ は $u(x-x)$ と $u(x+x)$ を結ぶ直線に近づく。
- (7) 同じ論理で、「上に出っ張っているものは下に下げろ。」もいえる。
- (8) 言い換えると、凹凸の程度が減少し、直線に近づける。
- (9) 「いたるところで直線にせよ」ということは、言い換えると、「全体を直線にせよ」。
- (10) 結局、平坦な直線に近づいて行く。
- (11) これは、「拡散」という物理現象と合っている。



3.2 時間的漸近状態

方程式の性質を時間的な最終状態から考える。

最終的に定常状態になるとすると、そこでは、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

すなわち、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

この解は、 a, b を定数として、

$$u = ax + b$$

すなわち、直線。

定数 $a \neq 0$ なら、 $x \rightarrow \pm\infty$ で $u \rightarrow \pm\infty$ となってしまうので、これはありえない。

したがって、 $a = 0$ 。すなわち、

$$u = b \quad (t \rightarrow \infty)$$

が最終的な定常状態を表す解。定数 b は、物理量の保存条件からきまる。

3.3 1次元熱方程式の解法

3.3.1 解法（その1）

1次元の熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を差分法で解く方法について考える。

この式を、forward-time centered-space の差分式で表すと、

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = k \left(\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2} \right)$$

ここで、

$$a = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

とおくと、

$$u_i^{k+1} - u_i^k = a(u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k)$$

既知の項を右辺に移項すると、

$$u_i^{k+1} = (1 - 2a)u_i^k + a(u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k)$$

これは、簡易な陽的スキームである。

このスキームの安定条件は、

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2k}$$

である。

3.3.2 解法（その2）

上記のスキームの右辺がステップ k で得られた既知の値を使うのに対し、右辺をステップ $k+1$ の未知の値にする方法が、1 次精度の陰解法である。式で書くと、

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = k \left(\frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \right)$$

上記の a を使って書き換えると、

$$-au_{i-1}^{k+1} + (1 + 2a)u_i^{k+1} - au_{i+1}^{k+1} = u_i^k$$

この左辺の項を未知数として、連立方程式を解く。

これは無条件に安定なスキームである。

3.3.3 解法（その3）

上記の二つのスキームが右辺すなわち空間に関する微分を、時間ステップ k または $k+1$ で表示したのに対し、Crank-Nicholson Scheme は、この平均値を取るものである。すなわ

ち、

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \frac{k}{2} \left(\frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2} \right)$$

簡単にすると、

$$-au_{i-1}^{k+1} + (1+2a)u_i^{k+1} - au_{i+1}^{k+1} = au_{i-1}^k + (1-2a)u_i^k + au_{i+1}^k$$

ここでも、左辺の各項を未知数として、連立方程式を解く。

このスキームも無条件に安定である。

4. 双曲型偏微分方程式

波動方程式の一般形は下記の形である。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

4.1 1次元の場合

1次元の波動方程式の性質を考えよう。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

いま、 $t = t_0$ において、波形が

$$u(x) = \sin x$$

という形状をしていると考える。すると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x$$

だから、この時点においては、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \sin x$$

となる。これはよく知られた単振り子の方程式

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

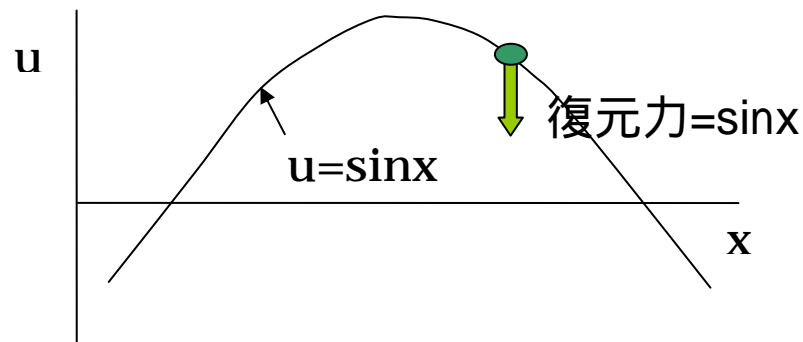
と同じである。

これは以下のように解釈できる。

すなわち、 $x = x_0$ における、 $u(x) = \sin x$ 上の点 $u(x_0)$ を P_0 とすると、 P_0 には復元力

$c^2 \sin x_0$ が働く。つまり、点 P_0 は $x = x_0$ において上下に単振動する。

これは、すなわち「波動」の概念である。（「波の上の点は円運動する」ということ。）



4.2 1次元波動方程式の解

1次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

の解は

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

で与えられる。

特に、初期条件が与えられているときには、d'Alembert の公式がある。

すなわち、

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x)$$

の下で、解は

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

で与えられる。この解は、Forward moving wave

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x - ct)$$

と、Backward moving wave

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x + ct)$$

の線形結合となっている。

4.3 特性曲線

2次元の超音速流れが以下の方程式で表されるとしよう。(定常、渦なし、等エントロピー流れ)

$$(c^2 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (c^2 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} = 0$$

ここに、

$$u = \varphi_x$$

$$v = \varphi_y$$

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)$$

一方、2階の偏微分方程式の一般形は

$$A\varphi_{xx} + 2B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} = D$$

であったので、比較して、 $u = \varphi_x$ 、 $v = \varphi_y$ を考えて、

$$A = c^2 - u^2$$

$$B = -uv$$

$$C = c^2 - v^2$$

$$D = 0$$

を得る。

偏微分方程式の一般論から、以下の特性曲線に関する方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} &= \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \\ &= \frac{-\frac{uv}{c^2} \pm \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{c^2} - 1}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \end{aligned}$$

ここに、超音速流れを考えているので、

$$u^2 + v^2 > c^2$$

である。

いま、流れがx軸の方向に速度 V で流れているとすると、(M をマッハ数とする)

$$u = V$$

$$v = 0$$

$$M = \frac{V}{c}$$

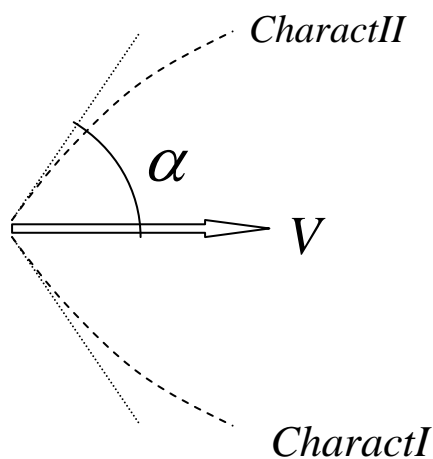
となるから、特性方程式は、

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} &= \frac{\pm \sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \\ &= \mp \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \\ &= \mp \tan \alpha\end{aligned}$$

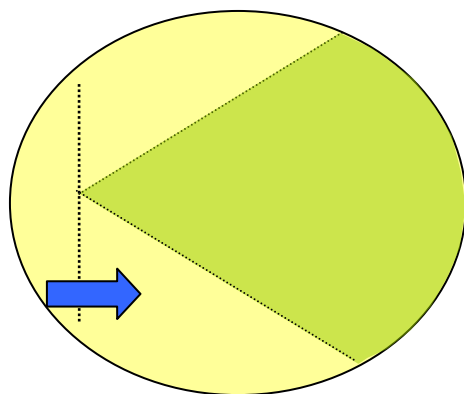
となる。ここに α は マッハ角 Mach angle である。

$$M = \frac{1}{\sin \alpha}$$

すなわち、特性曲線は、速度ベクトルと角度 α をなるマッハ角をなしている。



双曲型の方程式の特徴的なものは特性曲線である。超音速流れを念頭に考えると、これは、上流のある点の擾乱がその特性曲線で囲まれる範囲に限られ、その外には影響が及ばないことを示している。



5. 非線形偏微分方程式

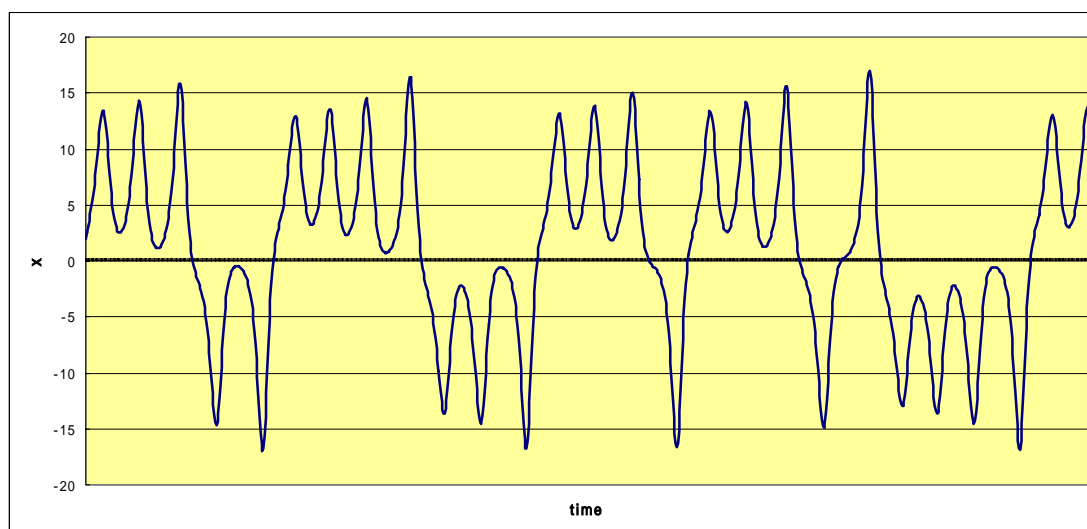
5.1 Lorenz の方程式

Edward Lorenz は大気の研究をしていて、対流現象に対して、Navier-Stokes 方程式を変形して Lorenz 方程式を導き、その性質を研究した。

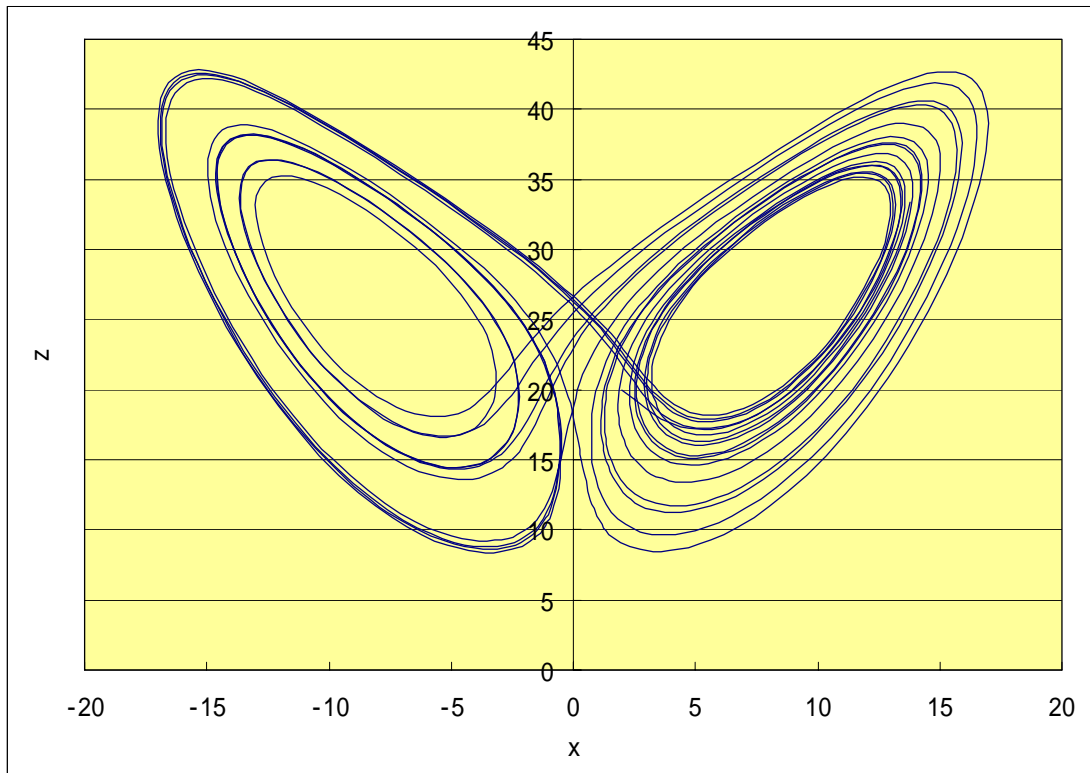
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

ここに、 σ は Prandtl 数（動粘性係数と拡散係数の比）、 r は Rayleigh 数のクリティカル Rayleigh 数（伝導が支配的な現象と対流が支配的な現象の境を示す）に対する比、 b は対象の幾何学的条件である。

初期条件 $x=2, y=5, z=20$ と定数 $\sigma=10, r=28, b=8/3$ を与えた時の x に関する解は以下のようになる。



これを x - z 平面で示すと、以下のようになる。



5.2 Korteweg - de Vries (KdV) 方程式

KdV 方程式はソリトンを表す方程式の例として良く研究されている。これは、浅水波の時間的发展を表すもので、次のように書かれる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^4} = 0$$

この方程式の厳密解（孤立波）が見つっており、

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \kappa(x - ct + \delta)$$

ここに、

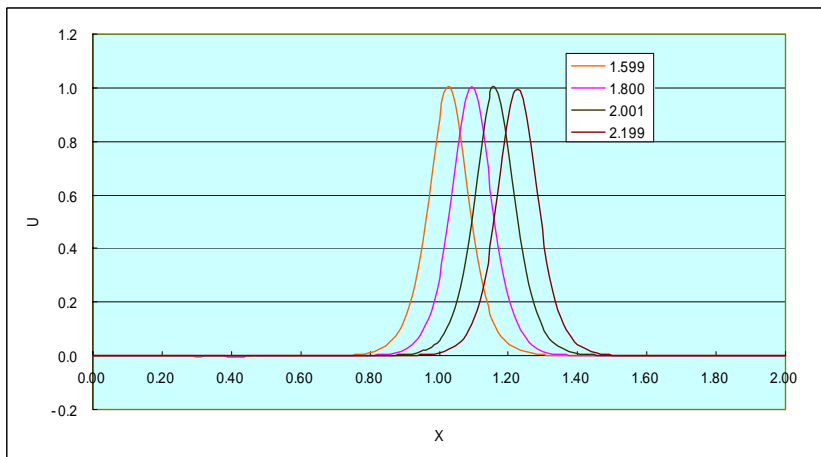
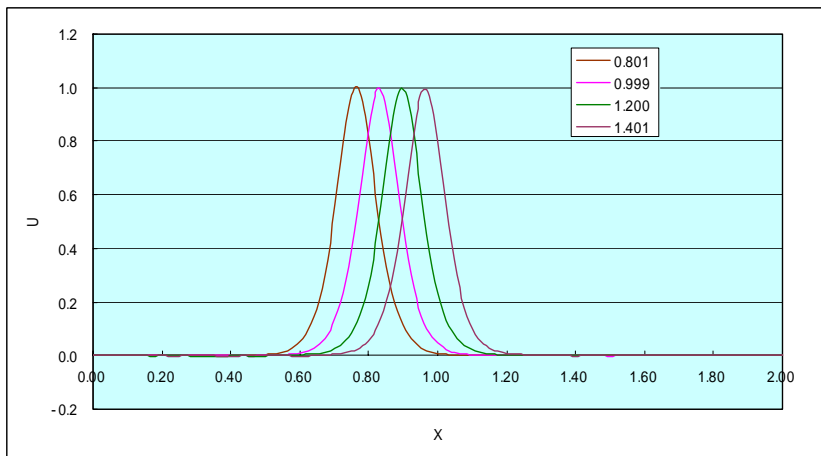
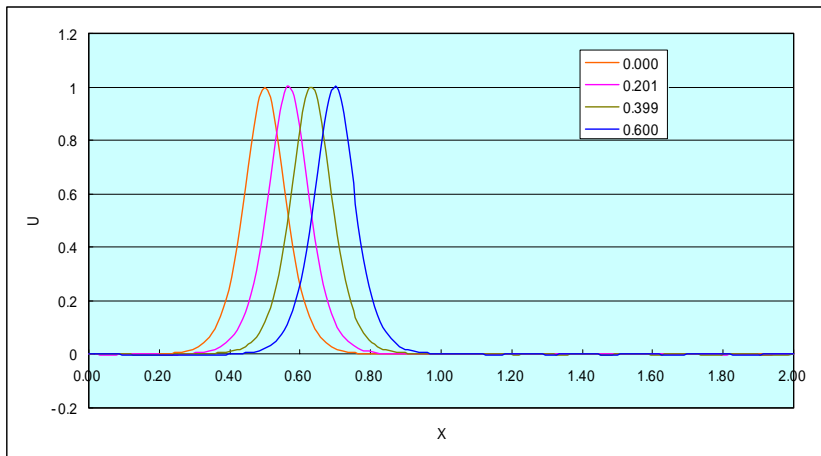
$$c = 4\kappa^2$$

である。

KdV 方程式の解はどんな形になるか考えよう。

(i) 孤立波の進行

孤立波は形を崩さないで進行する。下に数値計算結果を示す。



(ii) 初期値が余弦関数のとき

区間 $0 \leq x \leq 2$ の周期区間を考えて、初期値が

$$u(x,0) = \cos \pi x$$

の場合の解は以下ようになる。

