

Horace Lamb, Hydrodynamics を読む

—第 8 章 Tidal Waves—

H. N.

2012 年 9 月 6 日

CONTENTS

CHAPTER I	THE EQUATIONS OF MOTION
CHAPTER II	INTEGRATION OF THE EQUATIONS IN SPECIAL CASES
CHAPTER III	IRROTATIONAL MOTION
CHAPTER IV	MOTION OF A LIQUID IN TWO DIMENSIONS
CHAPTER V	IRROTATIONAL MOTION OF A LIQUID: PROBLEMS IN THREE DIMENSIONS
CHAPTER VI	ON THE MOTION OF SOLIDS THROUGH A LIQUID: DYNAMICAL THEORY
CHAPTER VII	VORTEX MOTION
CHAPTER VIII	TIDAL WAVES

168.	General theory of small oscillations; normal modes; forced oscillations
169-174.	Free waves in uniform canal; effect of initial conditions; measuring of the approximations; energy
175.	Artifice of steady motion
176.	Superposition of wave-systems; reflection
177-179.	Effect of disturbing forces; free and forced oscillations in a finite canal
180-184.	Canal theory of the tides. Disturbing potentials. Tides in an equatorial canal, and in a canal parallel to the equator; semi-diurnal and diurnal tides. Canal coincident with a meridian; change of mean level; fortnightly tide. Equatorial canal of finite length; lag of the tide
185, 186.	Waves in a canal of variable section. Examples of free and forced oscillations; exaggeration of tides in shallow seas and estuaries
187, 188.	Waves of finite amplitude; change of type in a progressive wave. Tides of the second order
189, 190.	Wave motion in two horizontal dimensions; general equations. Oscillations of a rectangular basin
191, 199.	Oscillations of a circular basin; Bessel's functions; contour lines. Elliptic basin; approximation to slowest mode
193.	Case of variable depth. Circular basin
194-197.	Propagation of disturbances from a centre; Bessel's function of the second kind. Waves due to a local periodic pressure. General formula for diverging waves. Examples of a transient local disturbance
198-201.	Oscillations of a spherical sheet of water; free and forced waves. Effect of the mutual gravitation of the water. Reference to the case of a sea bounded by meridians and parallels
202, 203.	Equations of motion of a dynamical system referred to rotating axes
204-205a.	Small oscillations of a rotating system; stability 'ordinary' and 'secular.' Effect of a small degree of rotation on types and frequencies of normal modes
205b.	Approximate calculation of frequencies
206.	Forced oscillations
207, 208.	Hydrodynamical examples; tidal oscillations of a rotating plane sheet of water; waves in a straight canal
209-211.	Rotating circular basin of uniform depth; free and forced oscillations
212.	Circular basin of variable depth
212a.	Examples of approximate procedure
213, 214.	Tidal oscillations on a rotating globe. Laplace's kinetic theory
215-217.	Symmetrical oscillations. Tides of long period
218-221.	Diurnal and semi-diurnal tides. Discussion of Laplace's solution
222, 223.	Hough's investigations; extracts and results

223a. References to further researches

224. Modifications of the kinetic theory due to the actual configuration of the ocean; question of phase

225, 226. Stability of the ocean. Remarks on the general theory of kinetic stability

APPENDIX: On Tide-generating Forces

CHAPTER IX	SURFACE WAVES
CHAPTER X	WAVES OF EXPANSION
CHAPTER XI	VISCOSITY
CHAPTER XII	ROTATING MASSES OF LIQUID

有限振幅の波

187. 2次元問題。表面の条件

波の盛りあがり η が平均水深 h に比べて小さくないときは、波は形を変えなくて伝播することはない。この問題は最初に Airy によって、逐次近似の方法で研究された。彼によると、波の各部は違った速度で移動する。

この問題にかんするより完全な取扱は、Riemann による音響学の問題への取扱と似た方法による。

われわれが取り扱おうとしている問題では、縦方向の加速度を無視することが唯一の近似である。すると、168 節で述べたように、水平方向の速度は運河のどの断面でも一定であることになる。運動方程式は、前とおなじで



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1)$$

である。

連続の式は、矩形断面の運河のばあいにはすぐわかるように、

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ (h + \eta) u \} = - \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2)$$

である。ここに、 h は水深である。この式は、

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = -(h + \eta) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

この方程式に $f'(\eta)$ を掛け、(1) 式に加える。(ここに、 $f(\eta)$ は求める関数である。) すると、 $(\partial f / \partial t = 0)$ をつかう。) 次のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \{ f(\eta) + u \} = -(h + \eta) f'(\eta) \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

右辺を整理すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \{ f(\eta) + u \} = -(h + \eta) f'(\eta) \frac{\partial}{\partial x} \{ f(\eta) + u \} \quad (4)$$

を得る。ここに、

$$(h + \eta) \{ f'(\eta) \}^2 = g$$

である。

方程式(4)は

$$f(\eta) = 2c_0 \left\{ \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^{1/2} - 1 \right\} \quad (5)$$

により満たされる。ここに、

$$c_0 = \sqrt{gh}$$

である。つぎに、

$$P = f(\eta) + u, \quad Q = f(\eta) - u \quad (6)$$

とおくと,

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (u + v) \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

および

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (u - v) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

ただし,

$$v = (h + \eta) f'(\eta) = c_0 \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^{1/2} \quad (9)$$

である。

(7)式は, P は, 正の方向に一定の速度

$$c_0 \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^{1/2} + u \quad (10)$$

で移動している点から見ると, 定数になっている。同様に, Q は, 負の方向に一定の速度

$$c_0 \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^{1/2} - u \quad (11)$$

で移動する点から見ると定数になっている。すなわち, P は(10)式で表される速度で正の方向に移動し, Q は(11)式で表される速度で負の方向に移動していることになる。P と Q の値は η と u の値で決まる。逆も言える。

188. 逐次近似の方法

方程式(1)および(3)は逐次近似の方法で解を求めることができる。ここでは, $x=0$ において海洋と接している運河を考える。すなわち, 海洋側の水面高さの境界条件が

$$\eta = a \cos \sigma t \quad (20)$$

であたえられる。

第1次近似の方程式は,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial u}{\partial x} \quad (21)$$

で与えられ, この解は,

$$\eta = a \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad u = \frac{ga}{c} \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (22)$$

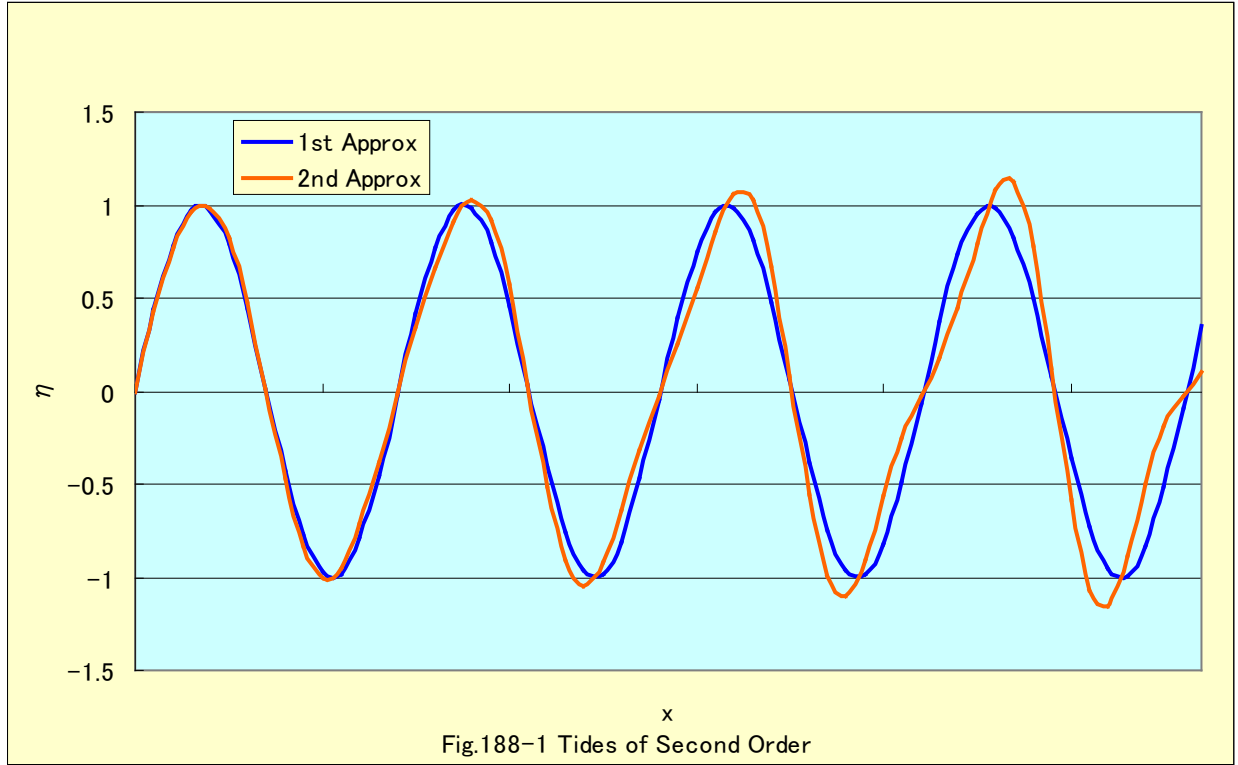
となる。第2近似は, これらの値を(1)および(3)式に代入して,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g^2 \sigma a^2}{2c^3} \sin 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g \sigma a^2}{c^2} \sin 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) \end{cases} \quad (23)$$

を得る。これを積分すると, (20)式と整合する解がえられる。

$$\begin{cases} \eta = a \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) - \frac{3}{4} \frac{g \sigma a^2}{c^3} x \sin 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) \\ u = \frac{ga}{c} \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) - \frac{1}{8} \frac{g^2 a^2}{c^3} \cos 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) - \frac{3}{4} \frac{g^2 \sigma a^2}{c^4} x \sin 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) \end{cases} \quad (24)$$

下の図は、 η に関する第1次近似(22)式と第1次近似(24)式の典型的なグラフである。



上記の逐次近似法は、 $\frac{g \sigma a^2}{c^3} x$ が小さいときにのみ成り立つ。すなわち、 $c^2 = gh, \lambda = 2\pi/\sigma$ をこれに代入した表現で、 $2\pi \left(\frac{a}{h} \right) \left(\frac{x}{\lambda} \right)$ が小さいことを意味する。したがって、たとえ a/h が初期にちいさくても、 x がおおきくなるにつれ、この項が大きくなるので近似の仮定がなりたたなくなるのである。