

Horace Lamb, Hydrodynamics を読む

—第 9 章 表面波—

H. N.

2012 年 9 月 4 日

CONTENTS

CHAPTER I	THE EQUATIONS OF MOTION
CHAPTER II	INTEGRATION OF THE EQUATIONS IN SPECIAL CASES
CHAPTER III	IRROTATIONAL MOTION
CHAPTER IV	MOTION OF A LIQUID IN TWO DIMENSIONS
CHAPTER V	IRROTATIONAL MOTION OF A LIQUID: PROBLEMS IN THREE DIMENSIONS
CHAPTER VI	ON THE MOTION OF SOLIDS THROUGH A LIQUID: DYNAMICAL THEORY
CHAPTER VII	VORTEX MOTION
CHAPTER VIII	TIDAL WAVES
CHAPTER IX	SURFACE WAVES

227. The two dimensional problem; surface conditions
228. Standing waves, lines of motion
- 229, 230. Progressive waves; orbits of particles. Wave-velocity; numerical tables. Energy of a simple-harmonic wave-train
231. Oscillations of superposed fluids
232. Instability of the boundary of two currents
- 233, 234. Artifice of steady motion
235. Waves in a heterogeneous liquid
- 236, 237. Group-velocity. Transmission of energy
- 238-240. The Cauchy-Poisson wave-problem; waves due to an initial local elevation, or to a local impulse.
241. Kelvin's. approximate formula for the effect of a local disturbance in a linear medium. Graphical constructions
- 242-246. Surface-disturbance of a stream. Case of finite depth. Effect of inequalities in its bed.
247. Waves due to a submerged cylinder
- 248, 249. General theory of waves due to a travelling disturbance. Wave-resistance
250. Waves of finite height; waves of permanent type. Limiting form
251. Gerstner's rotational waves
- 252, 253. Solitary waves. Oscillatory waves of Korteweg and De Vries
254. Helmholtz' dynamical condition for waves of permanent type
- 255, 256. Wave-propagation in two horizontal dimensions. Effect of a local disturbance. Effect of a travelling pressure-disturbance; wave-patterns
- 256a, 256b. Travelling disturbances of other types. Ship-waves. Wave-resistance. Effect of finite depth on the wave-pattern
- 257-259. Standing waves in limited masses of water. Transverse oscillation in canals of triangular, and semi-circular section
- 260, 261. Longitudinal oscillations; canal of triangular section; edge-waves
- 262-264. Oscillations of a liquid globe, lines of motion. Ocean of uniform depth on a spherical nucleus
265. Capillarity. Surface-condition
266. Capillary waves. Group-velocity
- 267, 268. Waves under gravity and capillarity. Minimum wave-velocity. Waves on the boundary of two currents
269. Waves due to a local disturbance. Effect of a travelling disturbance; waves and ripples
- 270-272. Surface-disturbance of a stream; formal investigation. Fish-line problem. Wave-patterns

273, 274 Vibrations of a cylindrical column of liquid. Instability of a jet
275. Oscillations of a liquid globe, and of a bubble

CHAPTER X	WAVES OF EXPANSION
CHAPTER XI	VISCOSITY
CHAPTER XII	ROTATING MASSES OF LIQUID

第9章 表面波

227. 2次元問題。表面の条件

縦方向の加速度が無視できない状況での流体の波の法則を考える。前章で考察した対象に含まれない重要事項は、比較的深度があるばあいの波の運動である。このばあいには、表面から下に向うにつれて擾乱が小さくなるのが特徴である。しかし、水平方向の動きは深さ方向によらない、との特徴は前章とつながっている。

さて、水の面が水平方向にのびているばあいを考える。また、2次元を仮定する。すなわち、 x を水平、 y を垂直方向を示す座標とする。



最初静止状態にある水が運動を起こすと仮定する。すると、当然の事ながら、渦なし流れが仮定でき、速度ポテンシャル ϕ^1 が次の方程式を満たすことになる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

境界条件は、固定条件で与えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (2)$$

自由表面に置ける条件（ $p = \text{const.}$ ）は、右図のように座標系をとって考える。すなわち、運動が微小と仮定し、20節の(4)式において $\Omega = gy$ とおき、速度 q にかんする2乗を無視すると、

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - gy + F(t) \quad (3)$$

となる。したがって、 η を時刻 t における表面の高さとする、そこでの圧力は一様と考えられるから、

$$\eta = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{y=\eta} \quad (4)$$

となる。ただし、ここに関数 $F(t)$ と定数は、 $\partial \phi / \partial t$ の中に含んだ。これは、 $y = \eta$ における境界条件だが、考えている誤差の範囲で、 $y = 0$ における条件に代えられるので、

$$\eta = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{y=0} \quad (5)$$

がえられる。

また、表面形状は水平線に極めて近いと仮定できるので、表面の角度は $\partial \eta / \partial x \ll 1$ であり、流体速度の法線方向の要素は、表面の垂直方向の速度で近似できるので、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (6)$$

となる。

(5)および(6)式より η を消去すると、 $y = 0$ における条件がえられる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (y = 0) \quad (7)$$

¹ H. Lamb は速度ポテンシャルを $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ 等で定義している。(マイナス符号がついている。)

この式は、 $Dp/Dt = 0$ をあらわしている。

調和振動を考えると、時間の項を $e^{i(\sigma+\varepsilon)}$ とすると、(7)式は、

$$\sigma^2 \phi = g \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (y=0) \quad (8)$$

となる。

228. Standing Wave と流線

水深 h が一定である運河の水の自由振動による波を考える。 x 方向に制限はないとする。

水平方向に制限がないことから、 ϕ が x に関する調和関数とすることができる。一般のばあいには Fourier の定理から、この関数の重ね合わせを考えればよい。

すると、

$$\phi = P \cos kx \cdot e^{i(\sigma+\varepsilon)} \quad (1)$$

と仮定できる。ここに、 P は y のみの関数である。したがって、227 節の方程式(1)は

$$\frac{d^2 P}{dy^2} - k^2 P = 0 \quad (2)$$

となる。ここに

$$P = Ae^{ky} + Be^{-ky} \quad (3)$$

である。水底において垂直方向に動きがないとの条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (y=-h)$$

から

$$Ae^{-kh} = Be^{kh}$$

であり、この式を $\frac{1}{2}C$ とおくと、

$$\phi = C \cosh k(y+h) \cos kx \cdot e^{i(\sigma+\varepsilon)} \quad (4)$$

がえられる。さらに、 σ の値は、227 節の式(8)より、

$$\sigma^2 \phi = gC \cdot k \sinh k(y+h) \cos kx \cdot e^{i(\sigma+\varepsilon)}$$

整理して

$$\sigma^2 = \frac{gC \cdot k \sinh k(y+h) \cos kx \cdot e^{i(\sigma+\varepsilon)}}{C \cosh k(y+h) \cos kx \cdot e^{i(\sigma+\varepsilon)}}$$

すなわち

$$\sigma^2 = gk \tanh k(y+h) \quad (5)$$

がえられる。

227 節の式(5)に代入すると、波の形が次の式で与えられる。

$$\eta = \frac{i\sigma C}{g} \cosh kh \cos kx \cdot e^{i(\sigma+\varepsilon)} \quad (6)$$

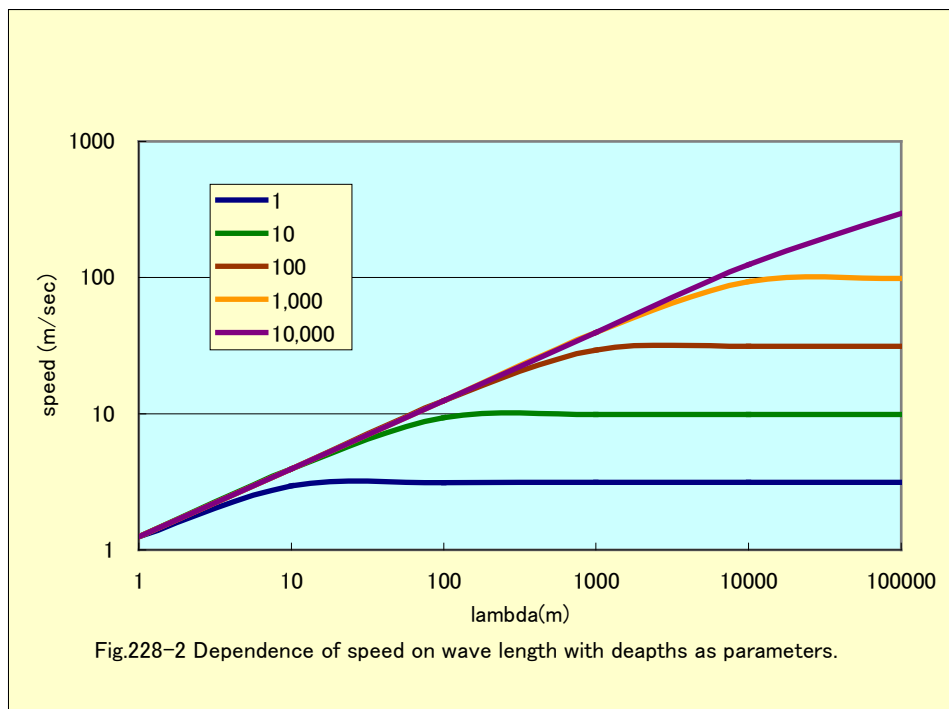
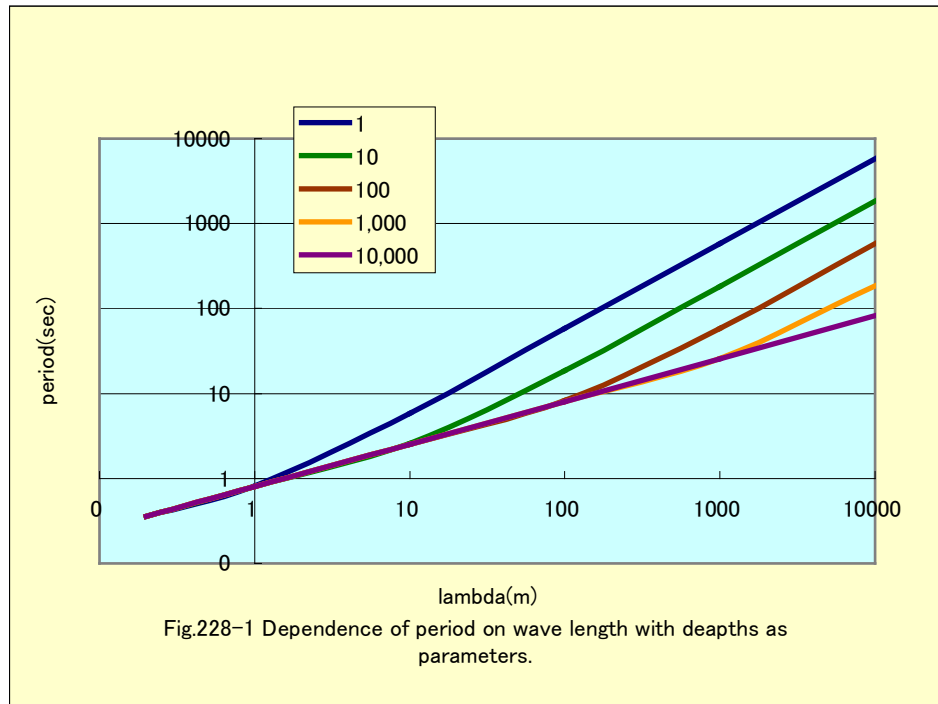
ここで

$$a = -\frac{\sigma C}{g} \cosh kh$$

とおき、実部をとると、

$$\eta = a \cos kx \cdot \sin(\sigma t + \varepsilon) \quad (7)$$

この式は'standing wave'を与え、波長 $\lambda = 2\pi/k$ で垂直方向の振幅は a である。周期 $2\pi/\sigma$ と波長の関係は(5)式で与えられる。周期および速度の数値例を次の図に示す。



速度ポテンシャルの式は

$$\phi = -\frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \cos kx \cdot \cos(\sigma t + \varepsilon) \quad (8)$$

であり、62 節で述べたように、流れ関数は次の式で与えられる。

$$\psi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\sinh k(y+h)}{\cosh kh} \sin kx \cdot \cos(\sigma t + \varepsilon) \quad (9)$$

ここで、ベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} を平均位置 (x, y) からの粒子の位置とすると、

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (10)$$

であり、位置 (x, y) と $(x + \mathbf{x}, y + \mathbf{y})$ における速度成分を同一と近似する。(10)式に(8)式を代入し、時間について積分すると、次式がえられる。

$$\begin{cases} \mathbf{x} = -a \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh} \sin kx \cdot \sin(\sigma t + \varepsilon) \\ \mathbf{y} = a \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh} \cos kx \cdot \sin(\sigma t + \varepsilon) \end{cases} \quad (11)$$

この式は次のように解釈される。

- (a) 粒子は、直線運動 *rectilinear* で、かつ、単振動 *simple-harmonic* をする。
- (b) 運動の方向は、山と谷で $(kx = m\pi)$ 鉛直方向、節の下で $(kx = (m + 1/2)\pi)$ 水平方向。
- (c) 運動は表面から下に向って、縦方向運動の振幅は $a \cos kx$ よりゼロに変化し、水平方向の振幅が $\cosh kh : 1$ の比率で減少する。

水深に対して波長が非常に短いばあい、すなわち、 $kh \gg 1$ のときには、 $\tanh kh = 1$ と近似でき、

$$\sigma^2 = gk \quad (13)$$

となるので、式(11)は次のように簡単になる。

$$\begin{cases} \mathbf{x} = -ae^{ky} \sin kx \cdot \sin(\sigma t + \varepsilon) \\ \mathbf{y} = ae^{ky} \cos kx \cdot \sin(\sigma t + \varepsilon) \end{cases} \quad (12)$$

このばあいには、運動は表面から下方にむかい急速に小さくなる。たとえば、波長の長さに相当する水深における振幅は、比 $e^{-2\pi} = 1/535$ となる。流線の図は下記のようなになる。

229. 進行波

前節は停立波 *standing wave* のばあいをあつかった。平衡状態まわりの振動の *normal mode* に関係するからである。

これからは、'standing wave'の二つの系を重ね合わせた進行波'progressive wave'について検討する。このときには、ひとつの系の波の山と谷が、もうひとつの系の波の山と谷と水平方向の位置が一致し、振幅が同一で、位相が 1/4 波長ずれている必要がある。

まず、波の面を

$$\eta = \eta_1 \pm \eta_2$$

とし、

$$\eta_1 = a \sin kx \cos \sigma t, \quad \eta_2 = a \cos kx \sin \sigma t \quad (2)$$

とおくと、

$$\eta = a \sin(kx \pm \sigma t) \quad (3)$$

がえられる。これは、 x 軸の負の方向と、正の方向へすすむ波をしめしており、その位相速度 c が

$$c = \frac{\sigma}{k} = \left(\frac{g}{k} \tanh kh \right)^{1/2} \quad (4)$$

で与えられる。ただし、 σ は 228 節の(5)式を代入した。波長 λ については、

$$c = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \right)^{1/2} \quad (5)$$

となる。

(i) $kh \gg 1$ のとき

波長が水深の 2 倍より小さいときには、 $\tanh kh = 1$ の近似が成り立つので、

$$c = \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (6)$$

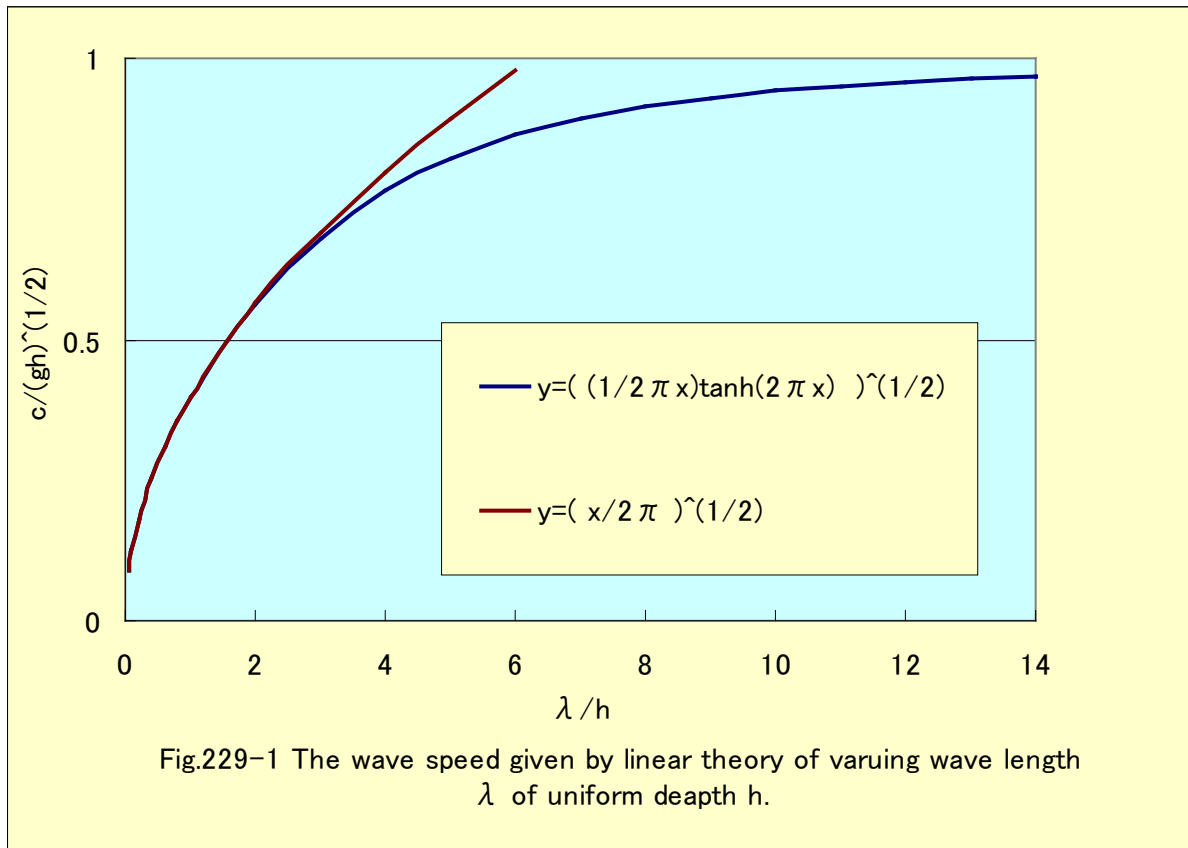
(ii) $kh \ll 1$ のとき

水深にくらべて、波長が十分に大きいときには、 $\tanh kh = kh$ の近似が成り立つので、

$$c = (gh)^{1/2} \quad (7)$$

が成り立つ。

これまでの議論は正弦波についてしていたが、Fourier's Theorem を考えれば、一般のばあいについても成り立つのがわかる。(5)式および(6)式のグラフを次に示す。



次に、単純な正弦波が正の方向に移動しているばあいを考える。すなわち、(1)および(3)式において下側の符号を取ることにする。228 節の式(7)

$$\eta = a \cos kx \cdot \sin(\sigma t + \varepsilon)$$

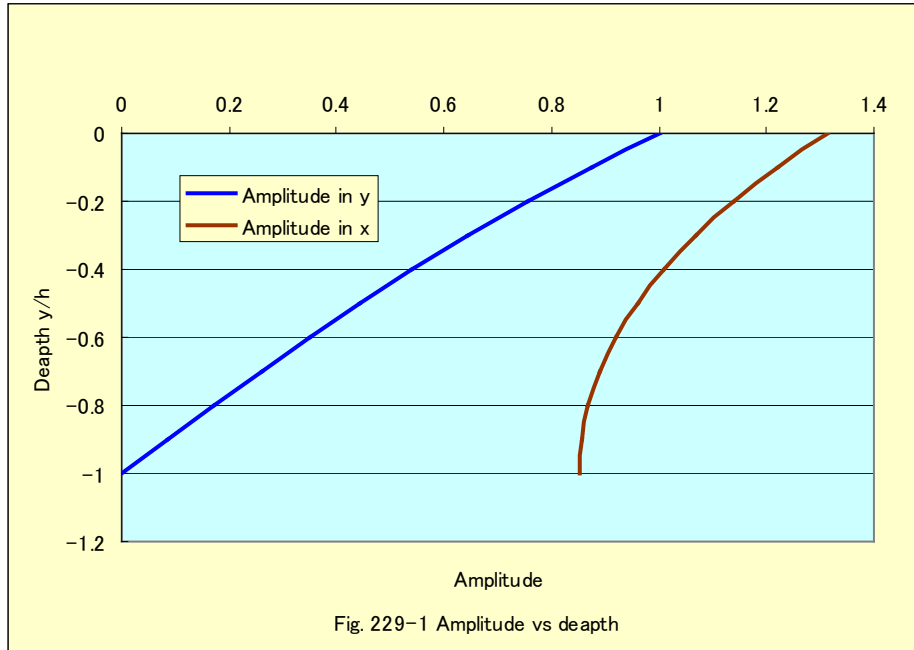
において、いささかの操作をする。すると、粒子の変位に関して次の式がえられる。

$$\begin{cases} x = x_1 - x_2 = a \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t) \cos(kx - \sigma t), \\ y = y_1 - y_2 = a \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t). \end{cases} \quad (8)$$

すなわち、粒子は $2\pi/\sigma = \lambda/c$ を周期と刷る楕円を描くことがわかる。楕円の半長軸は、水平方向と垂直方向で、それぞれ、

$$a \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh}, \quad a \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh}$$

である。振幅は下の図に示すように、ともに水面から水深方向に向って減少する。とくに、垂直方向の振幅は、当然ながら、底 ($y = -h$) でゼロとなっている。



また、焦点間の距離は、水深にかかわりなく、一定 $a \cosh(kh)$ である。波はその山において進行方向に動き、谷においては逆方向の動いている。

水深が波長の半分以上のばあいには、 e^{-kh} は小さな数になるから、(8)式は

$$\begin{cases} x = ae^{ky} \cos(kx - \sigma t), \\ y = ae^{ky} \sin(kx - \sigma t). \end{cases} \quad (9)$$

となり、粒子が円運動するのがわかる。そのときの角振動数は一定で、 $\sigma = (2\pi g/\lambda)^{1/2}$ である。円運動の半径は水深方向にむかって、 ae^{ky} であらわされ、急速に減少する。

なお、進行波 progressive waves は停立波 standing waves を仲介しなくてもえられることを示そう。228 節の(1)式の代わりに、

$$\phi = P e^{i(\sigma - kx)} \quad (10)$$

とおく。P が満たすべき条件は変わらない。すると、実部の形として、

$$\eta = a \sin(kx - \sigma), \quad (11)$$

$$\phi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma) \quad (12)$$

となる。これらの式から、以前と同様な結果がえられる。

230. 波のエネルギー

調和振動する standing wave のエネルギーを求めよう。単位長さの幅の流れを考える。すると、この幅の中の波長あたりのポテンシャル・エネルギーは

$$\frac{1}{2} g \rho_0^{\lambda} \eta^2 dx$$

これに 228 節の(7)式を代入すると

$$\frac{1}{4} g \rho a^2 \lambda \cdot \sin^2(\sigma + \varepsilon) \quad (1)$$

をえる。運動エネルギーは 61 節の式(1)より、

$$\frac{1}{2} \rho \int_0^{\lambda} \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=0} dx$$

となる。228 節(8)式を代入すると、

$$\frac{1}{4} g \rho a^2 \lambda \cdot \cos^2(\sigma + \varepsilon) \quad (2)$$

をえる。すると、全エネルギーは(1)式と(2)式の和で、一定である。

$$E_{total} = \frac{1}{4} g \rho a^2 \lambda$$

この事実を、水面の単位面積あたりの全エネルギーは $1/4 \cdot g \rho a^2$ である、と表現する。

進行波のばあいについての平行した議論は 174 節でおこなった。一般的なばあいにおいて、ポテンシャル・エネルギーと運動エネルギーは等しく、その和としての全エネルギーは、単位面積あたり、 $1/2 g \rho a^2$ である。

231. 成層流

二つの流体が接している場合を考える。インターフェースの平均高さを基準とすると、

$$\phi = C e^{ky} \cos kx \cdot e^{i\sigma}, \quad \phi' = C' e^{-ky} \cos kx \cdot e^{i\sigma} \quad (1)$$

とおける。ここに、ダッシュをつけたのは上側の流体である。これらのポテンシャルは Laplace's equation をみたし、かつ、それぞれ、 $y = -\infty$ と $y = +\infty$ でゼロにならなければならない。したがって、表面の形状を

$$\eta = a \cos kx \cdot e^{i\sigma} \quad (2)$$

とおくと、227 節(6)式より、

$$-kC = KC' = i\sigma a \quad (3)$$

となり、インターフェースでの条件が

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial\phi}{\partial t} - gy, \quad \frac{p'}{\rho'} = \frac{\partial\phi'}{\partial t} - gy \quad (4)$$

すなわち、

$$\rho(i\sigma C - ga) = \rho'(i\sigma C' - ga) \quad (5)$$

がえられる。そこで、(3)式から C および C' を代入すると、

$$\sigma^2 = gk \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} \quad (6)$$

がえられる。したがって、波長 $2\pi/k$ の波の速度は、

$$c^2 = \frac{g}{k} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} \quad (7)$$

となる。

この式をみると、上側の流体の存在が波の進行速度を下げる効果を持っているのがわかる。その程度は、 $s = \rho'/\rho$ とすると、 $\left\{ \frac{1-s}{1+s} \right\}^{1/2}$ である。

また、インターフェースで物理量の不連続が生じることに注意する必要がある。法線方向の速度 $-\partial\phi/\partial y$ は、当然、連続的だが、接線方向の速度 $-\partial\phi/\partial x$ は不連続面の上下で符号を変える。すなわち、vortex-sheet がえられる。密度のちがう二つの流体のインターフェースの振動は必ずしも irrotational ではないことの顕著な例である。実際には、この不連続は、粘性の効果によってなくなっていく。

もし、 $\rho < \rho'$ なら、 σ は虚数であり、不安定な現象となる。

238. Cauchy-Poisson の問題

水深の深いとき、局所的な擾乱を受けたばあいに発生する波の理論は、Cauchy と Poisson の古典的な理論に遡ることができる。

流体の初期条件は、40 節および 41 節で述べたように、境界の形とそこでの垂直方向の速度 $\partial\phi/\partial n$ または速度ポテンシャル ϕ を与えることにより決まる。したがって、初期値問題は二つのカテゴリに分けることができる。

(a) 表面の initial elevation を指定するもの。(速度は指定しない。)

(b) surface-impulse ($\rho\phi_0$) の初期分布を指定するもの。(表面形状は水平とする。)

原点を擾乱のないばあいとし、上方に y 軸をとる。初期において擾乱がないばあいの典型的な解は、

$$\eta = \cos \sigma t \cos kx, \quad (1)$$

$$\phi = g \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cos kx \quad (2)$$

$$\sigma^2 = gk \quad (3)$$

で与えられる。

そこで、Fourier's double-integral 定理をつかって一般化する。すなわち、一般の関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^\infty f(\alpha) \cos k(x - \alpha) d\alpha \quad (4)$$

すると、初期条件は

$$\eta = f(x), \quad \phi_0 \equiv \phi|_{y=0} = 0 \quad (5)$$

であたえられる。すると、

$$\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \sigma dk \int_{-\infty}^\infty f(\alpha) \cos k(x - \alpha) d\alpha \quad (6)$$

$$\phi = \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma}{\sigma} e^{ky} dk \int_{-\infty}^\infty f(\alpha) \cos k(x - \alpha) d\alpha \quad (7)$$

となる。

(a) Initial elevation のばあい

原点近辺の極めてせまい領域が隆起したばあいを考える。そのとき、

$$\int_{-\infty}^\infty f(\alpha) d\alpha = 1 \quad (8)$$

$$\phi = \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma}{\sigma} e^{ky} \cos kx dk \quad (9)$$

となる。

速度ポテンシャルは以下のように計算される。すなわち、

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sigma} \left\{ \sigma - \frac{1}{3!} (\sigma)^3 + \frac{1}{5!} (\sigma)^5 - \dots \right\} e^{ky} \cos kx dk \\ &= \frac{g}{\pi} \int_0^\infty t \left\{ 1 - \frac{1}{3!} \sigma^2 t^2 + \frac{1}{5!} \sigma^4 t^4 - \dots \right\} e^{ky} \cos kx dk \\ &= \frac{gt}{\pi} \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{gt^2}{3!} k + \frac{(gt^2)^2}{5!} k^2 - \dots \right\} e^{ky} \cos kx dk \end{aligned} \quad (10)$$

となる。この積分は、

$$-y = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta \quad (11)$$

とおくと、 y が負だから、

$$\int_0^\infty e^{ky} \cos kx \cdot k^n dk = \frac{n!}{r^{n+1}} \cos(n+1)\theta \quad (12)$$

との公式をもちいて、(10)式は

$$\phi = \frac{gt}{\pi} \left\{ \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} gt^2 \right) \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{1}{2} gt^2 \right)^2 \frac{\cos 3\theta}{r^3} - \dots \right\} \quad (13)$$

となる。表面の形は、227 節の(5)式をもちい、 $\theta = \pm \pi/2$ において、 $x > 0$ のときには、

$$\eta = \frac{1}{\pi x} \left\{ \frac{gt^2}{2x} - \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{gt^2}{2x} \right)^3 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \left(\frac{gt^2}{2x} \right)^5 \dots \right\} \quad (14)$$

となる。

この式から、表面の擾乱は $gt^2/2x$ すなわち、一定の加速度で伝達することがわかる。

級数(14)は、Fresnel's diffraction integral と同一のものである。級数の収束は、 $gt^2/2x$ が小さくなる
と、とても遅い。

[第2の解法]

速度ポテンシャルの表面における値は、(9)式より

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma}{\sigma} \cos kx dk \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \sin \left(\frac{\sigma^2 x}{g} + \sigma \right) d\sigma - \int_0^\infty \sin \left(\frac{\sigma^2 x}{g} - \sigma \right) d\sigma \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

で与えられる。そこで、

$$\zeta = \frac{x^{1/2}}{g^{1/2}} \left(\sigma \pm \frac{gt}{2x} \right) \quad (16)$$

とおくと、

$$\int_0^\omega \sin \left(\frac{\sigma^2 x}{g} + \sigma \right) d\sigma = \frac{g^{1/2}}{x^{1/2}} \int_\omega^\infty \sin(\zeta^2 - \omega^2) d\zeta \quad (17)$$

$$\int_0^\infty \sin \left(\frac{\sigma^2 x}{g} - \sigma \right) d\sigma = \frac{g^{1/2}}{x^{1/2}} \int_\omega^\infty \sin(\zeta^2 - \omega^2) d\zeta \quad (18)$$

ただし、

$$\omega = \left(\frac{gt^2}{4x} \right)^{1/2} \quad (19)$$

であり、この関係をつかうと、(15)式は

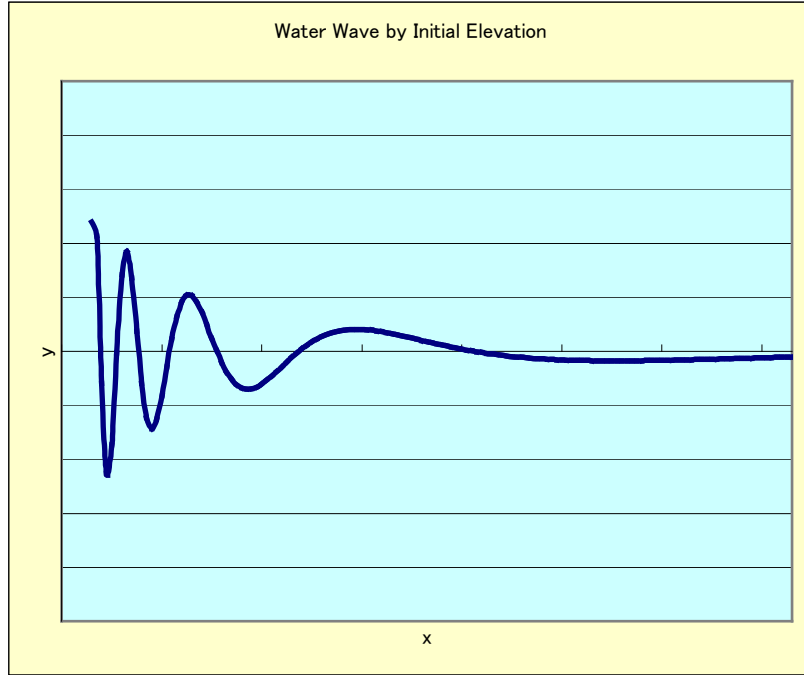
$$\phi_0 = -\frac{2g^{1/2}}{\pi x^{1/2}} \int_0^\infty \sin(\zeta^2 - \omega^2) d\zeta \quad (20)$$

となる。そして、この値から η は、227 節(5)式をつかって

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{g^{1/2} t}{\pi x^{3/2}} \int_0^\omega \cos(\zeta^2 - \omega^2) d\zeta \\ &= \frac{g^{1/2} t}{\pi x^{3/2}} \left\{ \cos \omega^2 \int_0^\omega \cos \zeta^2 d\zeta + \sin \omega^2 \int_0^\omega \sin \zeta^2 d\zeta \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。これは Poisson が得た結果と同一である。定積分は実質上、Fresnel's form であり、既知関数である。

ある特定の時刻における波の形状の例を下に示す。



式(21)において、 $gt^2/4x$ が大きいときには、Poisson と Cauchy が得た、次の式で近似できる。

$$\eta = \frac{g^{1/2}t}{2^{3/2}\pi^{1/2}x^{3/2}} \left(\cos \frac{gt^2}{4x} + \sin \frac{gt^2}{4x} \right) \quad (23)$$

ここに、公式

$$\int_0^\infty \cos \zeta^2 d\zeta = \int_0^\infty \sin \zeta^2 d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad (24)$$

を使用した。

Poisson と Cauchy は次の式も得ている。

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{g^{1/2}t}{2^{3/2}\pi^{1/2}x^{3/2}} \left(\cos \frac{gt^2}{4x} + \sin \frac{gt^2}{4x} \right) \\ & - \frac{1}{\pi x} \left\{ \frac{2x}{gt^2} - 1 \cdot 3 \cdot 5 \left(\frac{2x}{gt^2} \right)^3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \left(\frac{2x}{gt^2} \right)^5 - \dots \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

239. Initial Impulse のばあい

初期条件が Initial impulse のばあいには、典型的な解が

$$\rho\phi = \cos \sigma t e^{ky} \cos kx \quad (27)$$

$$\eta = -\frac{\sigma}{g\rho} \sin \sigma t \cos kx \quad (28)$$

で与えられる。ここに、 $\sigma^2 = gk$ である。したがって、初期条件が

$$\rho\phi_0 = F(x), \quad \eta = 0 \quad (29)$$

のとき,

$$\phi = \frac{1}{\pi\rho} \int_0^\infty \cos \sigma t e^{ky} dk \int_{-\infty}^\infty F(\alpha) \cos k(x-\alpha) d\alpha \quad (30)$$

$$\eta = -\frac{1}{\pi g\rho} \int_0^\infty \sigma \sin \sigma t dk \int_{-\infty}^\infty F(\alpha) \cos k(x-\alpha) d\alpha \quad (31)$$

となる。

とくに、 $x=0$ に集中した concentrated impulse のばあいの条件は,

$$\int_{-\infty}^\infty F(\alpha) d\alpha = 1 \quad (32)$$

$$\phi = \frac{1}{\pi\rho} \int_0^\infty \cos \sigma t \cdot e^{ky} \cos kx dk$$

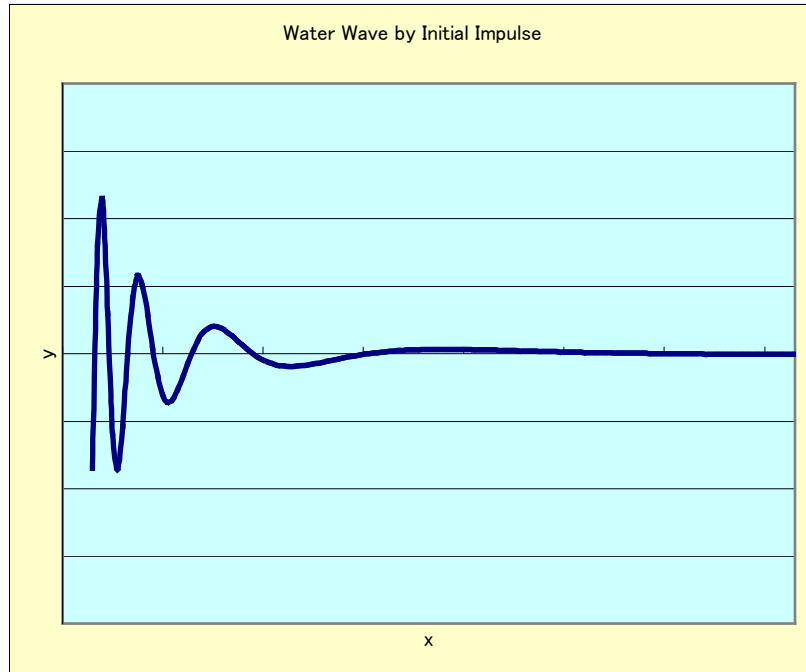
(33)

となる。解は(9)式を求めた方法と同様にしてもよいし、 $\frac{1}{g\rho} \frac{\partial}{\partial t}$ の操作を行なっても得られる。結果は、

$$\phi = \frac{1}{\pi\rho} \left\{ \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{2} g t^2 \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \left(\frac{1}{2} g t^2 \right)^2 \frac{\cos 3\theta}{r^3} - \dots \right\} \quad (34)$$

$$\eta = \frac{t}{\pi\rho x^2} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{3}{1 \cdot 3 \cdot 5} \left(\frac{g t^2}{2x} \right)^2 + \frac{5}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \left(\frac{g t^2}{2x} \right)^4 - \dots \right\} \quad (35)$$

まえのケースと同様に、時刻を固定したときの波の形を次の図に示す。



$g t^2 / 4x$ が大きいときには,

$$\eta = \frac{g^{1/2} t^2}{2^{5/2} \pi^{1/2} \rho x^{5/2}} \left(\cos \frac{gt^2}{4x} - \sin \frac{gt^2}{4x} \right) \quad (38)$$

有限振幅の波

250. 有限振幅の波

227 節以降の議論は, infinitely small な運動を扱ってきた。すなわち, 最大振幅の波長に対する比 $a/\lambda \ll 1$ のばあいである。この条件を外したばあいについては Stokes をはじめとする多くの研究がある。

定常運動について考える。Rayleigh によれば, $(a/\lambda)^3$ のオーダーの量を無視すると, 無限水深のばあいには次の式が成り立つ。

$$\frac{\phi}{c} = -x + \beta e^{ky} \sin kx, \quad \frac{\psi}{c} = -y + \beta e^{ky} \cos kx \quad (1)$$

波の形 ($\psi = 0$) は逐次近似の方法で求めることができる。

$$\begin{aligned} y &= \beta e^{ky} \cos kx \\ &= \beta \left(1 + ky + \frac{1}{2} k^2 y^2 + \dots \right) \cos kx \\ &= \frac{1}{2} k \beta^2 + \beta \left(1 + \frac{9}{8} k^2 \beta^2 \right) \cos kx + \frac{1}{2} k \beta^2 \cos 2kx + \frac{3}{8} k^2 \beta^3 \cos 3kx + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

ここで,

$$\beta \left(1 + \frac{9}{8} k^2 \beta^2 \right) = a$$

とおくと,

$$y - \frac{1}{2} k a^2 = a \cos kx + \frac{1}{2} k a^2 \cos 2kx + \frac{3}{8} k^2 a^3 \cos 3kx + \dots \quad (3)$$

が得られる。この方程式は, trochoid の方程式である。そして, rolling circle の circumference は $2\pi/k = \lambda$ である。

この流線に沿っての一様な圧力は, c の値を適当に選ぶことにより満足する。すなわち, (1)式より, 近似を経ることなしに,

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - gy - \frac{1}{2} c^2 \left\{ 1 - 2k\beta e^{ky} \cos kx + k^2 \beta^2 e^{2ky} \right\} \quad (4)$$

となり, したがって, $y = \beta e^{ky} \cos kx$ 上において

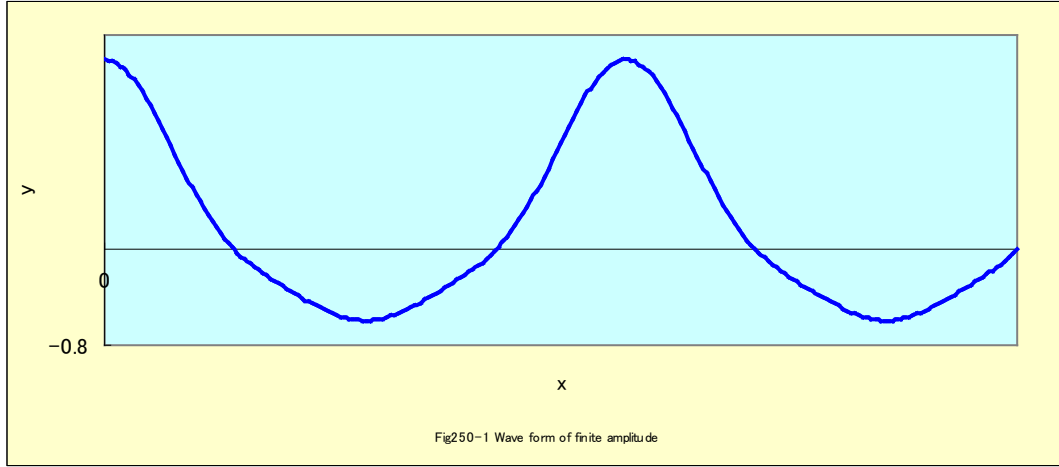
$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \text{const.} + (kc^2 - g)y - \frac{1}{2} k^2 c^2 \beta^2 e^{2ky} \\ &= \text{const.} + (kc^2 - g - k^3 c^2 \beta^2)y + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

を得る。したがって, もし,

$$c^2 = \frac{g}{k} + k^2 c^2 \beta^2 = \frac{g}{k} (1 + k^2 a^2) \quad (6)$$

ならば, 自由表面における条件が満足されていることになる。この式が波の速度を与え, 振幅の増加により若干速度が増加することを示している。

(3)式で示される波の形を、 $ka=1/2$ すなわち $a/\lambda=0.0796$ のばあいについて下に示す。



251. Gerstner's Wave

水深が無限大のときの波についての厳密解は Gerstner によって 1802 年にそして、それとは独立に、Rankine によって与えられた。ただし、この解は irrotational では ない
 ので、物理的に特異な存在である。

座標系は以前と同様に、右図のようにとる。すると、粒子の位置に



$$x = a + \frac{1}{k} e^{kb} \sin k(a + ct), \quad y = b - \frac{1}{k} e^{kb} \cos k(a + ct) \quad (1)$$

となる。ここに、 c は x 軸の負の方向への波の速度である。

この式が基礎方程式を満たしていることと c の値を決定するためには、第一に次の式が成り立っていることを確認しよう。

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = 1 - e^{2kb} \quad (2)$$

この式は次の計算による。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} &= \begin{vmatrix} 1 + e^{kb} \cos k(a + ct) & e^{kb} \sin k(a + ct) \\ \frac{k}{k} e^{kb} \sin k(a + ct) & 1 - \frac{k}{k} e^{kb} \cos k(a + ct) \end{vmatrix} \\ &= \{1 + e^{kb} \cos k(a + ct)\} \{1 - e^{kb} \cos k(a + ct)\} - \{e^{kb} \sin k(a + ct)\} \{e^{kb} \sin k(a + ct)\} \\ &= 1 - e^{2kb} \cos^2 k(a + ct) - e^{2kb} \sin^2 k(a + ct) \\ &= 1 - e^{2kb} \end{aligned}$$

したがって、Lagrangian の連続の式 (16 節(2)式) が満たされることがわかる。さらに、(1)式を運動方程式 (13 節) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{p}{\rho} + gy \right) &= kc^2 e^{kb} \sin k(a + ct) \\ \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{p}{\rho} + gy \right) &= -kc^2 e^{kb} \cos k(a + ct) + kc^2 e^{2kb} \end{aligned} \quad (3)$$

がえられる。したがって、

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - g \left\{ b - \frac{1}{k} e^{kb} \cos k(a+ct) \right\} - c^2 e^{kb} \cos k(a+ct) + \frac{1}{2} c^2 e^{2kb} \quad (4)$$

となる。

自由表面上の粒子に対しては、圧力は一定だから、

$$c^2 = \frac{g}{k} \quad (5)$$

であり、これをつかうと、

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - gb + \frac{1}{2} c^2 e^{2kb} \quad (6)$$

となる。

(1) 式から、粒子が半径 e^{kb}/k の円を描くことがわかる。

この波が irrotational であることを証明しよう。まず、

$$\begin{aligned} u\delta x + v\delta y &= \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial a} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial a} \right) \delta a + \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial b} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial b} \right) \delta b \\ &= \frac{c}{k} \delta \left\{ e^{kb} \sin k(a+ct) \right\} + ce^{2kb} \delta a \end{aligned} \quad (7)$$

であり、これは完全微分とはなっていない。したがって、粒子が

$$(a, b), (a + \delta a, b), (a, b + \delta b), (a + \delta a, b + \delta b)$$

という四辺形の境界に沿っての循環は、

$$-\frac{\partial}{\partial b} (ce^{2kb} \delta a) \delta b$$

であり、面積が

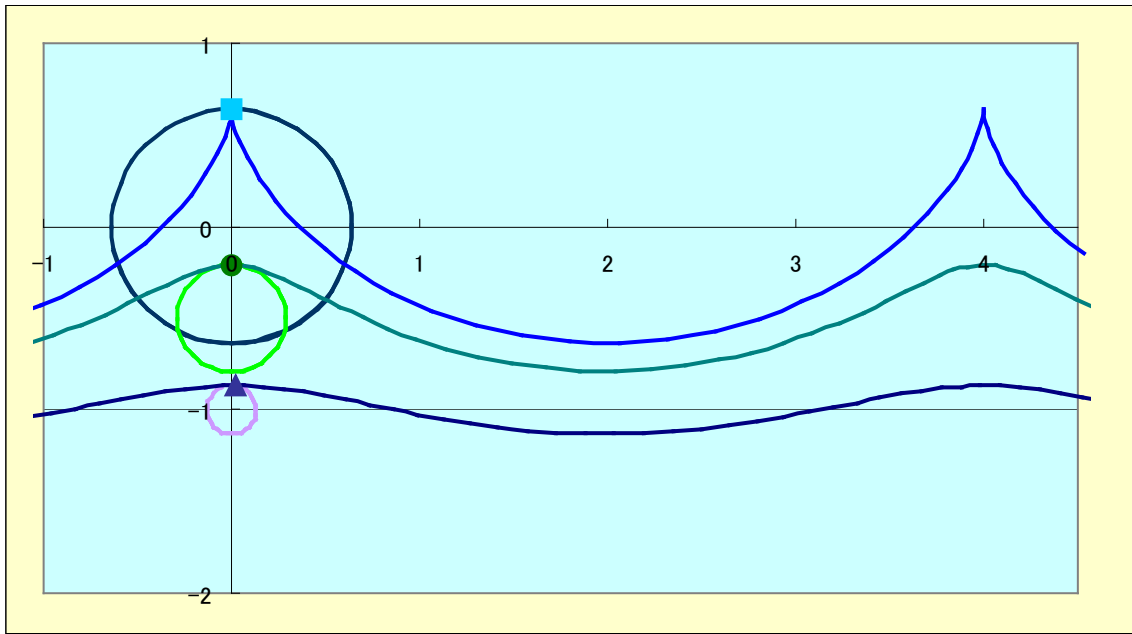
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} \delta a \delta b = (1 - e^{2kb}) \delta a \delta b$$

であるから、要素 (a, b) の過度 ω は

$$\omega = -\frac{2kce^{2kb}}{1 - e^{2kb}} \quad (8)$$

となる。過度は表面で最大であり、深さ方向に急減する。その向きは円運動する粒子の運動方向と逆である。

次の図は、等圧線 $b = \text{const}$ を描いたものである。この曲線は、直線 $y = b + 1/k$ の下側を半径 $1/k$ の円を回転させることにより得られる trochoid である。自由表面をあらわすギリギリのかたちは cycloid である。



252. 孤立波

Scott Russell は孤立波 solitary wave と呼ばれる特別な波のタイプについて実験的に研究をはじめた。この solitary 型は、Stokes' oscillatory waves of permanent type の極限の形とみなすことができる。

Boussinesq と Rayleigh による研究が独立になされてきたが、とくに、Rayleigh による定式化は次のようである。彼は、

$$\phi + i\psi = F(x + iy) = e^{iy \frac{d}{dx}} F(x) \quad (1)$$

という公式から出発した。ここに、 $F(x)$ は実数である。(1)式より、

$$\phi = F - \frac{y^2}{2!} F'' + \frac{y^4}{4!} F^{IV} - \dots, \quad \psi = yF' - \frac{y^3}{3!} F''' + \frac{y^5}{5!} F^{V} - \dots \quad (2)$$

が得られる。流線 $\psi = 0$ は水路の底面の形を与える。また、自由表面では、 $\psi = ch$ である。

自由表面では圧力が一定である、という条件は、

$$u^2 + v^2 = c^2 - 2g(y - h) \quad (3)$$

であり、(2)式を代入すると、

$$F'^2 - y^2 F' F''' + y^2 F''^2 + \dots = c^2 - 2g(y - h) \quad (4)$$

となる。一方、(2)式より、自由表面に沿って

$$yF' - \frac{y^3}{3!} F''' + \dots = ch \quad (5)$$

となる。(4)式と(5)式から F を消去すれば自由表面の座標を決める微分方程式が得られる。

逐次近似の方法が適用できるとすると、

$$F' = \frac{ch}{y} + \frac{1}{6} y^2 F''' + \dots = ch \left\{ \frac{1}{y} + \frac{1}{6} y^2 \left(\frac{1}{y} \right)'' + \dots \right\} \quad (6)$$

また, (4)式は

$$\frac{1}{y^2} + \frac{2}{3} \frac{y''}{y} - \frac{1}{3} \frac{y'^2}{y^2} = \frac{1}{h^2} - \frac{2g(y-h)}{c^2 h^2} \quad (7)$$

となる。この式に y' をかけて積分し, $y'|_{y=h} = 0$ となるように任意定数を決めれば,

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{3} \frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{h} + \frac{y-h}{h^2} - \frac{g(y-h)^2}{c^2 h^2}$$

すなわち,

$$y'^2 = 3 \frac{(y-h)^2}{h^2} \left(1 - \frac{gy}{c^2} \right) \quad (8)$$

が得られる。

この式から, 水面の高さを a とすると,

$$c^2 = g(h+a) \quad (9)$$

という Russell が得た結果と一致する。

いま,

$$y-h=\eta, \quad \frac{h^2(h+a)}{2a} = b^2 \quad (10)$$

とおくと, (8)式より

$$\eta' = \pm \frac{\eta}{b} \left(1 - \frac{\eta}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

そして, この積分として,

$$\eta = a \cdot \sec h^2 \frac{x}{2b} \quad (12)$$

が得られる。この波の形を以下に示す。

