

G. B. Whitham, Linear and Nonlinear Waves

を読む

－第 13 章 水の波－

H. N.

2012 年 9 月 17 日

目次

13.1 基礎方程式	3
13.3 線形化方程式	5
13.4 一定の深さの線形な波	5
13.5 初期値問題	6
13.10 浅い水の波（長い波長の波）	7
(1) 底が水辺のばあい	8
(2) Dam Break Problem	9
13.12 Solitary and Cnoidal Waves	10

13.1. 基礎方程式

非圧縮性、非粘性の流体が一定の重力場における運動を考える。位置の座標を (x, y, z) とし、それに対応する速度ベクトル \mathbf{u} の成分を (u_1, u_2, u_3) とする。重力による加速度 \mathbf{g} は y 軸の負の方向に働くものとする。すると重力による外力は、 \mathbf{j} を y 方向の単位ベクトルとして

$$\mathbf{F} = -\rho g \mathbf{j}$$

と表される。

すると、基礎方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \mathbf{j} \quad (13.2)$$

となる。

ここで、回転を

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{u}$$

とおくと、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \mathbf{j} \quad (13.3)$$

と変形できる。この式の回転を取り、圧力を消去すると、Helmholz' equation

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0 \quad (13.4)$$

が得られる。

なお、(13.1)式より、(13.4)式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (13.5)$$

となる。

いま、流れを非回転流 $\text{rot} \mathbf{u} = 0$ と仮定すると、速度ベクトル $\mathbf{u} = \nabla \phi$ が定義できる。すると、(13.3)式は積分できて、

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} = B(t) - \phi_t - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - gy \quad (13.6)$$

が得られる。ここに、 $B(t)$ は任意関数であり、 p_0 は自由表面を表すために便宜的に $B(t)$ とは別に

導入した定数である。また、 $B(t)$ は、 $\phi' = \phi - \int B(t) dt$ により速度ベクトルを置き換えると消去で

き、結局

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} = -\phi_t - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - gy \quad (13.7)$$

となる。

速度ベクトルが定義できているので、(13.1)式により、速度ベクトルは Laplace's equation

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (13.8)$$

を満たすことになる。

まとめると、Laplace's equation を満たす速度ベクトルをみつけ、(13.7)式により圧力 p をみつければよい。この問題は簡単のようにみえるが、自由表面の条件がいろいろと面白い問題を提供する。

(a) 境界条件

境界条件を表す式を求めよう。いま、自由表面を表す式を

$$f(x_1, x_2, y, t) = 0 \quad (13.9)$$

とする。自由表面とは、この面を流体が横切らないことであるから、この表面の移動速度と、この面に垂直な流体の速度は等しくならなければならない。前者は

$$\frac{-f_t}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + f_y^2}}$$

であり、後者は

$$\frac{u_1 f_{x_1} + u_2 f_{x_2} + v f_y}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + f_y^2}}$$

なので、結局

$$\frac{Df}{Dt} = f_t + u_1 f_{x_1} + u_2 f_{x_2} + v f_y = 0 \quad (13.10)$$

が自由表面の境界条件となる。

なお、自由表面をあらわす方程式を

$$y = \eta(x_1, x_2, t)$$

とすると

$$f(x_1, x_2, y, t) = \eta(x_1, x_2, t) - y$$

となるので、境界条件の式(13.10)は

$$\frac{D\eta}{Dt} = \eta_t + u_1 \eta_{x_1} + u_2 \eta_{x_2} = v \quad (13.11)$$

となる。

さらに、自由表面の上下で圧力が等しいという条件も必要である。これは、

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_{x_1}^2 + \phi_{x_2}^2 + \phi_y^2) + gy = 0 \quad (13.12)$$

である。

通常、Laplace's equation は境界が知られていて、ひとつの境界条件の下で解かれるが、自由表面のばあいには、境界条件はふたつ与えられる。

固体壁における境界条件は、この壁に垂直な速度ベクトルがゼロということで与えられる。特に底が $y = -h_0(x_1, x_2)$ で与えられているときは

$$\phi_y + \phi_{x_1} h_{0x_1} + \phi_{x_2} h_{0x_2} = 0 \quad \text{on } y = -h_0(x_1, x_2) \quad (13.13)$$

が境界条件である。

線形理論

13.3 線形化方程式

水は最初静止状態にあり、擾乱が小さいとすると、方程式を線形化することができる。すなわち、自由表面の条件(13.12)は

$$\begin{aligned}\eta_t &= \varphi_y \\ \varphi_t + g\eta &= 0\end{aligned}\quad \text{on } \eta = 0 \quad (13.21)$$

となるが、線形理論では、さらに、 $y = \eta$ におけるこの値を $y = 0$ における値として与える。すなわち、(13.21)式の第二の式を微分して、第一の式を代入して、

$$\varphi_{tt} + g\varphi_y = 0 \quad \text{on } y = 0$$

となる。なお、Laplace's equation そのものと底の境界条件はすでに線形化されている。

以上より、線形化された定式化がなされた。

$$\begin{aligned}\varphi_{x_1x_1} + \varphi_{x_2x_2} + \varphi_{yy} &= 0 & -h_0 < y < 0 \\ \varphi_{tt} + g\varphi_y &= 0 & y = 0 \\ \varphi_y + h_{0x_1}\varphi_{x_1} + h_{0x_2}\varphi_{x_2} &= 0 & y = -h_0\end{aligned} \quad (13.22)$$

速度ベクトルの解 φ が見つかれば、自由表面は (13.21) の第二式、すなわち

$$\eta(x_1, x_2, t) = -\frac{1}{g}\varphi_t(x_1, x_2, 0, t) \quad (13.23)$$

で与えられる。

13.4 一定深さの線形な波

水の波の場合、水は水平方向に伝播するから、自由表面の形と速度ベクトルを次のようにおくことができる。

$$\begin{aligned}\eta &= Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \\ \varphi &= Y(y)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}\end{aligned}$$

速度ポテンシャルを Laplace's equation に代入することにより

$$Y'' - \kappa^2 Y = 0 \quad \kappa = |\mathbf{\kappa}| = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2}$$

となる。さらに、一定深さの水の波に関しては、底の境界条件から $Y'(-h_0) = 0$ であるので、

$$Y \propto \cosh \kappa(h_0 + y)$$

また、表面の条件(13.23)より、(左辺に η を、右辺に φ の微分を代入)、振幅に関する次の関係式が得られる。

$$A = \frac{i\omega}{g} Y(0)$$

これをつかうと、

$$Y(y) = -\frac{ig}{\omega} A \frac{\cosh \kappa(h_0 + y)}{\cosh \kappa h_0}$$

となり、結局、

$$\begin{aligned} \eta &= A e^{i\kappa \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \\ \phi &= -\frac{ig}{\omega} A \frac{\cosh \kappa(h_0 + y)}{\cosh \kappa h_0} e^{i\kappa \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \end{aligned} \quad (13.24)$$

が得られる。残ったもうひとつの条件 $\phi_{tt} + g\phi_y = 0$ からは dispersion 関係式

$$\omega^2 = g\kappa \tanh \kappa h_0 \quad (13.25)$$

が得られる。

13.5 初期値問題

流体が最初静止しているばあいを考える。すると、 $\phi|_{t=0} = 0$ であり、式 (13.21) より、 $\eta_t|_{t=0} = 0$

である。また、初期の表面形状が下記の式で与えられているとする。

$$\eta(\mathbf{x}, 0) = \eta_0(\mathbf{x})$$

するとこの問題に対する解は、 $\frac{1}{2}\eta_0(x)$ の Fourier 変換 $F(\kappa)$ をもちいて

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{i\kappa x - i\omega t} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{i\kappa x + i\omega t} d\kappa$$

と与えられる。

特に 1 次元のばあいには

$$F(\kappa) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0(x) e^{-i\kappa x} dx \quad (13.29)$$

であり、特に、Cauchy-Poisson 問題として知られている、 $\eta_0(x) = \delta(x)$ のときには $F(\kappa) = \frac{1}{4\pi}$ で

あるので、一般解

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \kappa x \cos W(\kappa) t d\kappa \quad (13.30)$$

が得られる。

非線形理論

13.10 浅い水の波（長い波長の波）

Dissipation 関係式が近似的に

$$\omega^2 \approx gh_0 \kappa^2 \quad (13.73)$$

であり、位相速度 ω/κ が波数 κ によらないとき、位相速度は次に式で表される。

$$c_o = \sqrt{gh_0}$$

すると、解の Fourier 変換による表式は

$$\begin{aligned} \eta &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{i\kappa(x-c_0 t)} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} G(\kappa) e^{i\kappa(x+c_0 t)} d\kappa \\ &= f(x-c_0 t) + g(x+c_0 t) \end{aligned}$$

となる。これは次の波動方程式の一般解となっている。

$$\eta_{tt} - c_0^2 \eta_{xx} = 0 \quad (13.74)$$

さて、運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \mathbf{j} \quad (13.2)$$

であった。この方程式の垂直方向の成分は

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g = 0$$

なので、積分して

$$p - p_0 = \rho g(\eta - y) \quad (13.75)$$

一方、水平成分は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + v \frac{\partial u_i}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad (13.76)$$

である。(すこし便宜的な表記法を使っている。) (13.76)式の右辺は y に独立な量なので、左辺も同

様になり、結局、 u_i が y に独立となる。このとき、(13.76)式は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0 \quad (13.77)$$

となる。

一方、質量保存則は、(13.1)式の積分形をもちいて

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h u_i) = 0 \quad (13.78)$$

ここに

$$h = h_0 + \eta$$

は底からの深さである。

(1) 底が水平のばあい

底が水平、すなわち、 $h_0 = \text{const}$ のときには、質量保存則と運動方程式は

$$\begin{aligned} h_t + (uh)_x &= 0 \\ u_t + uu_x + gh_x &= 0 \end{aligned} \quad (13.79)$$

となる。特性速度は $u \pm \sqrt{gh}$ であり、Riemann 不変量は $u \pm 2\sqrt{gh}$ である。

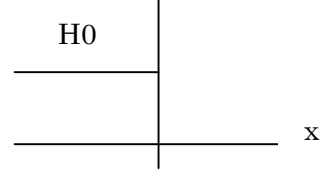
右に進む単純波は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} h &= H(\xi) \\ u &= 2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh_0} \\ x &= \xi + \{3\sqrt{gH(\xi)} - 2\sqrt{gh_0}\}t \end{aligned} \quad (13.80)$$

(2) Dam Break Problem

ダムの決壊に関する問題は次の初期条件の下に解かれる。

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= 0 & -\infty < x < \infty \\ h|_{t=0} &= 0 & 0 < x < \infty \\ h|_{t=0} &= H_0 > 0 & -\infty < x < 0 \end{aligned}$$



$h = H_0$ から出発する特性曲線 C_+ の上では Riemann 不変量は

$$u + 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{gH_0} \quad (13.82)$$

である。また、この特性曲線で覆われる領域での解は特性直線 C_- 上の単純波で、それは次の式で表される。

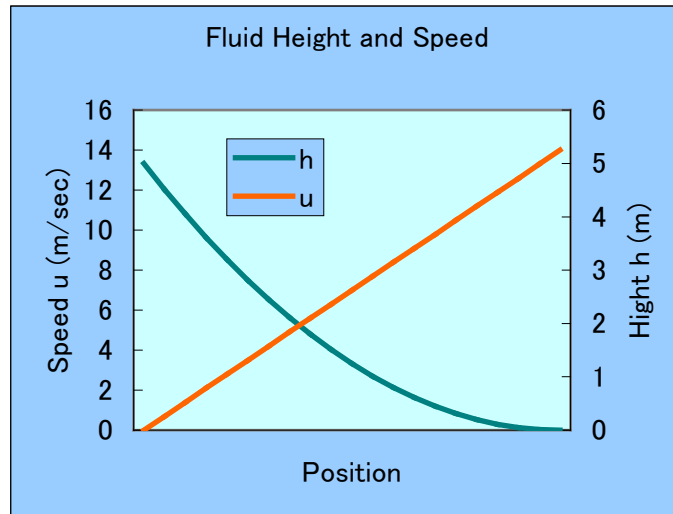
$$\frac{x}{t} = u - \sqrt{gh} \quad (13.83)$$

すると、上記の(13.82)式と(13.83)式が解を与える。すなわち、

領域 $-\sqrt{gH_0} \leq \frac{x}{t} \leq 2\sqrt{gH_0}$ における解として

$$\begin{aligned} \sqrt{gh} &= \frac{1}{3} \left(2\sqrt{gH_0} - \frac{x}{t} \right) \\ u &= \frac{1}{3} \left(2\sqrt{gH_0} + \frac{x}{t} \right) \end{aligned}$$

である。この解を示すと下のような図となる。



この領域の自由表面は放物形をしていて、先頭は速度 $2\sqrt{gH_0}$ で移動することになる。面白いことに、ダムの位置においては水面の高さは $h = \frac{4}{9}H_0$ 流れの速度は $u = \frac{2}{3}\sqrt{gH_0}$ で一定になっている。

13.11 The Korteweg-de Vries and Boussinesq Equations

13.12 Solitary and Cnoidal Waves

方程式

$$\eta_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0} \right) \eta_x + \gamma \eta_{xxx} = 0 \quad (13.99)$$

からはじめよう。一定速度で形状を変えずに伝播する波を考える。すると、解を

$$\eta = h_0 \zeta(X)$$

$$X = x - Ut$$

と仮定できる。すると、(13.99)式は

$$\frac{1}{6} h_0^2 \zeta''' + \frac{3}{2} \zeta \zeta' - \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta' = 0$$

となり、これは積分できて、

$$\frac{1}{6}h_0^2\zeta'' + \frac{3}{4}\zeta^2 - \left(\frac{U}{c_0} - 1\right)\zeta + G = 0$$

となる。これはさらに積分できて

$$\frac{1}{3}h_0^2\zeta'^2 + \zeta^3 - 2\left(\frac{U}{c_0} - 1\right)\zeta^2 + 4G\zeta + H = 0 \quad (13.103)$$

特に、 $\zeta \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) とすると、 $G = H = 0$ となる。このとき、式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}h_0^2\left(\frac{d\zeta}{dX}\right)^2 &= \zeta^2(\alpha - \zeta) \\ \frac{U}{c_0} &= 1 + \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \quad (13.104)$$

となる。この式よりあきらかなように、 ζ は $X = 0$ において最大値 $\zeta = \alpha$ をとり、対称形となってい

る。これが **solitary wave** である。この **solitary wave** の速度は振幅に依存する。すなわち

$$U = c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\eta_0}{h_0}\right) \quad (13.105)$$

そして(13.104)式の解は

$$\zeta = \alpha \operatorname{sech}^2 \left(\left(\frac{3\alpha}{4h_0^2} \right)^{1/2} X \right) \quad (13.106)$$

で与えられ、結局

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \left\{ \left(\frac{3\alpha}{4h_0^2} \right)^{1/2} (x - Ut) \right\} \quad (13.107)$$

が得られる。

(2) General Case (G, H non-zero)

一般のばあいには、

$$\frac{1}{3}h_0^2\left(\frac{d\zeta}{dX}\right)^2 = \zeta(\alpha - \zeta)(\zeta - \alpha + \beta), \quad 0 < \alpha < \beta \quad (13.108)$$

$$\frac{U}{c_0} = 1 + \frac{2\alpha - \beta}{2} \quad (13.109)$$

となり、式(13.108)の解は、Jacobian elliptic functions により次の式で表される。

$$\zeta = \alpha cn^2\left(\frac{3\beta}{4h_0^2}\right)^{1/2} X \quad (13.114)$$

$$m = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2} \quad (13.115)$$

$$\lambda = \frac{4h_0}{\sqrt{3\beta}} K(m) \quad (13.116)$$

ここに、 m は楕円関数の modulus であり、 $K(m)$ は第一種完全楕円積分である。(13.114)式を

cnoidal wave と呼ぶ。