G. B. Whitham, Linear and Nonlinear Waves
を読む
－第 6 章　気体力学－

H. N.

2012 年 9 月 25 日
2013 年 9 月 10 日(Revised)

目次

6.1 運動方程式

(i) 積分形

質量保存

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV + \int_S \rho l_j u_j dS = 0 \tag{6.2}$$

運動量保存

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho u_i dV + \int_S (\rho u_i l_j u_j - p_i) dS = \int_V \rho F_i dV \tag{6.3}$$

エネルギー保存

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{1}{2}\rho u_j^2 + \rho e\right) dV + \int_S \left[(\rho u_i^2 + \rho e) l_j u_j - p_i u_i + l_j q_j\right] dS = \int_V \rho F_i u_i dV \tag{6.4}$$

(ii) 微分形

質量保存

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right) = 0 \tag{6.7}$$

運動量保存

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_i u_j - p_{ji}\right) = \rho F_i \tag{6.8}$$

エネルギー保存

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u_i^2 + \rho e\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\frac{1}{2}\rho u_i^2 + \rho e\right) u_j - p_{ji} u_j + q_j\right\} = \rho F_i u_i \tag{6.9}$$

6.3 粘性、熱伝導、緩和効果が無視できるばあいの運動方程式

(1) 粘性を考えないとき，応力について下記の式が成り立つ。

$$p_{ji} = -p\delta_{ji} \tag{6.22}$$

粘性を考えると，速度の勾配に比例する応力を考えて，Navier-Stokes 方程式をあたえる項が導入される。

$$p_{ji} = -p\delta_{ji} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ji} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{6.28}$$

(2) 熱伝導を考えないときは

$$q_j = 0 \tag{6.23}$$

が成り立つ。熱伝導を熱勾配に比例すると仮定すると，

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{6.29}$$

(3) 気体が熱力学的に局所的に平衡と仮定すると，

$$e = e(p, \rho) \tag{6.24}$$

とおける。これは，熱力学的平衡に達するまでの緩和時間を考えない仮定である。

上記の仮定ができるとき、運動方程式は、以下のように置かれる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right) = 0 \tag{6.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_i u_j\right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i \tag{6.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u_i^2 + \rho e\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\frac{1}{2}\rho u_i^2 + \rho e\right)u_j - p_{ji}u_j + q_j\right\} = \rho F_i u_i \tag{6.27}$$

6.4 熱力学上の関係式

(1) エントロピーの定義

$$TdS = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{6.31}$$

(2) 理想気体に状態方程式

$$p = R\rho T \tag{6.32}$$

すると、(6.31)式は

$$dS = \frac{de}{T} - d\left(R\, log\, \rho\right)$$

となり、内部エネルギーは温度のみの関数となる。

$$e = e(T) \tag{6.33}$$

(3) 定積比熱で表すと

$$de = c_v dT \tag{6.34}$$

ここに(6.30)式を適用すると

$$d\left(e + \frac{p}{\rho}\right) = c_p dT \tag{6.35}$$

(4) エンタルピー

$$h = e + \frac{p}{\rho} \tag{6.36}$$

(5) 比熱が一定の理想気体

$$e = c_v T \qquad h = c_p T \tag{6.37}$$

したがって

$$c_p - c_v = R$$

ここで、比熱比 $\gamma = c_p / c_v$ を導入すると

$$R = (\gamma - 1)c_v$$

$$e = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}$$

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}$$

となり、エントロピーの式は

$$dS = \frac{de}{T} + \frac{p}{T}d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$
$$= cv\left(\frac{dp}{p} - \gamma\frac{d\rho}{\rho}\right)$$

となるので

$$S = c_v \, log\frac{p}{\rho^{\gamma}} + const$$

または

$$p = \kappa\rho^{\gamma}e^{S/c_v} \tag{6.39}$$

が得られる。比熱が一定な理想気体を polytropic gas と呼ぶ。

6.5 運動方程式の他の表現

流体粒子に従う微分を表す作用素を導入する。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j\frac{\partial}{\partial x_j}$$

すると、質量保存則は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{6.44}$$

運動量保存則は、

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i \tag{6.45}$$

エネルギー保存則は

$$\rho\frac{De}{Dt} + p\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{6.46}$$

この式は質量保存則(6.44)をつかうと次のように書き換えられる。

$$\rho\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

さらに、熱力学の関係式(6.31)を用いて

$$T\frac{DS}{Dt} = 0 \tag{6.47}$$

なお、 $p = p(\rho, S)$ は S について解けるので、

$$\frac{Dp}{Dt} = a^2 \frac{D\rho}{Dt}, \quad a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S=const} \tag{6.48}$$

が(6.47)式と同様なものとなる。

まとめると,

$$\begin{cases} \dfrac{D\rho}{Dt} + \rho \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \rho \dfrac{Du_i}{Dt} + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i \\ \dfrac{DS}{Dt} = 0 \end{cases} \tag{6.49}$$

第 3 の式は,

$$\frac{Dp}{Dt} - a^2 \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

によっても代えられる。

また、polytropic gas については

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

$$S = c_v \, log \frac{p}{\rho^\gamma}$$

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \tag{6.50}$$

であり、isentropic のときには

$$p = \kappa \rho^\gamma$$

である。

6.6 音の波

擾乱が小さい場合、すなわち

$$p - p_0 = a_0^2 (\rho - \rho_0) \tag{6.51}$$

$$a_0^2 = p'(\rho_0) \tag{6.52}$$

とおいたとき、$(p - p_0)/p_0$, $(\rho - \rho_0)/\rho_0$, u/a_0 が小さいときには以下の式となる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{6.53}$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \tag{6.54}$$

すると、(6.54)式は

$$u_i = u_i^{(0)}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\rho}\int_0^t (p - p_0)dt$$

と積分できる。

いま速度ポテンシャル φ を $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ で定義すると

$$u_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

$$p - p_0 = -\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$\rho - \rho_0 = -\frac{\rho_0}{a_0^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{6.55}$$

となり、(6.54)は自動的に満足されている。結局、速度ポテンシャルに対する式は、(6.53)式より、

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \varphi_{x_i x_i} \tag{6.56}$$

すなわち、波動方程式となる。

1 次元のばあいの解は、以下の式で与えられる。

$$\varphi = f(x - a_0 t) + g(x + a_0 t)$$
$$u = f'(x - a_0 t) + g'(x + a_0 t)$$
$$\frac{p - p_0}{\rho_0 a_0} = f'(x - a_0 t) - g'(x + a_0 t) \tag{6.57}$$

6.7 非線形平面波

1 次元の平面波を考える。方程式(6.49)は次のように書き換えられる。

$$\rho + u\rho_x + \rho u_x = 0 \tag{6.60}$$
$$\rho(u_t + +uu_x) + \rho_x = 0 \tag{6.61}$$
$$S_t + uS_x = 0 \tag{6.62}$$

ここに、$p(\rho, S)$ が関数として得られているとすると、(6.62)式は次のような別の表現が得られる。

$$p_t + up_x - a^2(\rho_t + u\rho_x) = 0 \tag{6.63}$$

となる。ここに,

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S=const} \tag{6.64}$$

である。

この系に関する特性方程式は次のように与えられる。

$$\frac{dp}{dt} + \rho a \frac{du}{dt} = 0 \qquad \text{on} \qquad C_+ : \frac{dx}{dt} = u + a \tag{6.67}$$

$$\frac{dp}{dt} - \rho a \frac{du}{dt} = 0 \qquad \text{on} \qquad C_- : \frac{dx}{dt} = u - a \tag{6.68}$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \qquad \text{on} \qquad P : \frac{dx}{dt} = u \tag{6.69}$$

これを線形化すると、

$$\frac{dp}{dt} + \rho_0 a_0 \frac{du}{dt} = 0 \qquad \text{on} \qquad C_+ : \frac{dx}{dt} = a_0$$

$$\frac{dp}{dt} - \rho_0 a_0 \frac{du}{dt} = 0 \qquad \text{on} \qquad C_- : \frac{dx}{dt} = -a_0$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \qquad \text{on} \qquad P : \frac{dx}{dt} = 0$$

となり、これらは積分できて

$$(p - p_0) + \rho_0 a_0 u = F(x - a_0 t)$$
$$(p - p_0) - \rho_0 a_0 u = G(x + a_0 t)$$
$$S - S_0 = H(t) \tag{6.70}$$

6.10 衝撃波

衝撃波におけるジャンプ条件は

$$-U[\rho] + [\rho u] = 0 \tag{6.87}$$
$$-U[\rho u] + [\rho u^2 + p] = 0 \tag{6.88}$$
$$-U\left[\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e\right] + \left[\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e\right)u + pu\right] = 0 \tag{6.89}$$

において、相対速度

$$v = U - u$$

を導入すると

$$-U[\rho v] = 0$$

$$[p + \rho v^2 - \rho v U] = 0$$

$$\left[\rho v\left(h + \frac{1}{2}v^2\right) - (p + \rho v^2)U + \frac{1}{2}\rho v U^2\right] = 0$$

が得られる。ここに $h = e + p/\rho$ はエンタルピーである。上式は、

$$[\rho v] = 0$$
$$[p + \rho v^2] = 0$$
$$\left[\rho v\left(h + \frac{1}{2}v^2\right)\right] = 0$$

と変形できる。

衝撃波とともにある座標系から見ると、第 3 式より ρv を落とすことができて

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1 \tag{6.95}$$

$$p_2 + \rho_2 v_2^3 = p_1 + \rho_1 v_1^2 \tag{6.96}$$

$$h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 = h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \tag{6.97}$$

となる。

いま、polytropic gas のときには

$$e = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \qquad h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \qquad a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \tag{6.98}$$

であり、上流の状態に関するマッハ数を

$$M = \frac{U - u}{a_1}$$

で定義すると、次のような関係式が得られる。

$$\frac{u_2 - u_1}{a_1} = \frac{2(M^2 - 1)}{(\gamma + 1)M} \tag{6.99}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2} \tag{6.100}$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma(M^2 - 1)}{\gamma + 1} \tag{6.101}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\left\{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)\right\}^{1/2}\left\{(\gamma - 1)M^2 + 2\right\}^{1/2}}{(\gamma + 1)M} \tag{6.102}$$

さらに衝撃波の強さを表す変数

$$z = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$$

を導入すると、衝撃波の関係式は次のようになる。

$$M = \frac{U - u_1}{a_1} = \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} z\right)^{1/2} \tag{6.103}$$

$$\frac{u_2 - u_1}{a_1} = \frac{z}{\gamma\left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} z\right)^{1/2}} \tag{6.104}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} z}{1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} z} \tag{6.105}$$

$$\frac{a_2}{a_1}=\left\{\frac{(1+z)\left(1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}z\right)}{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}z}\right\}^{1/2} \tag{6.106}$$

〔補記〕

衝撃波の関係式は、下記の式がわかりやすい。

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2}{(\gamma-1)p_2+(\gamma+1)p_1}$$

$$U_{shock}=\left(\frac{p_1}{2\rho_1}\right)^{1/2}\left\{(\gamma-1)+(\gamma+1)\frac{p_2}{p_1}\right\}^{1/2}$$

ここに、音速は$\left(\frac{\gamma p_1}{\rho_1}\right)^{1/2}$だから、衝撃波の速度は音速よりはやい。

<u>衝撃波によるエントロピーに増加</u>

なお、polytropic gas では$S=c_v\, log(p/\rho^{\gamma})$だから、(6.105)式と z に定義から

$$\begin{aligned}\frac{S_2-S_1}{S_1}&=log\frac{p_2}{\rho_2^{\gamma}}-og\frac{p_1}{\rho_1^{\gamma}}\\&=log\left(\frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1^{\gamma}}{\rho_2^{\gamma}}\right)\\&=log\frac{(1+z)\left(1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}z\right)^{\gamma}}{\left(1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}z\right)^{\gamma}}\end{aligned} \tag{6.107}$$

すなわち、エントロピーがジャンプしているのがわかる。

<u>弱い衝撃波</u>

弱い衝撃波については、衝撃波の強さを表すパラメータ z について級数展開できて、次の式が得られる。

$$\frac{U-u_1}{a_1}=1+\frac{\gamma+1}{4\gamma}z-\frac{(\gamma+1)^2}{32\gamma^2}z^2+O(z^3)$$

$$\frac{u_2-u_1}{a_1}=\frac{z}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{4\gamma^2}z^2+\frac{3(\gamma+1)^2}{32\gamma^3}z^3+O(z^4)$$

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}=\frac{z}{\gamma}-\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}z^2+O(z^3)$$

$$\frac{a_2-a_1}{a_1}=\frac{\gamma-1}{2\gamma}z-\frac{\gamma^2-1}{8\gamma^2}z^2+\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{16\gamma^3}z^3+O(z^4)$$

$$\frac{S_2-S_1}{S_1}=\frac{\gamma^2-1}{12\gamma^2}z^3+O(z^4)$$

$$\frac{s_2-s_1}{s_1}=\frac{2}{\gamma-1}\frac{a2-a1}{a1}-\frac{u2-u1}{a1}=\frac{1}{32}\frac{(\gamma+1)^2}{\gamma^3}z^3+O(z^4)$$

ここに、

$$s=\frac{2a}{\gamma-1}-u$$

は Riemann invariant である。

上の式は、弱い衝撃波においては、エントロピーと Riemann invariant の変化を無視してよい（すなわち、simple wave の仮定が成り立つ）ことを示している。

<u>強い衝撃波</u>

逆に、強い衝撃波については、$z\to\infty$ として、次の式が成り立つ。

$$M\approx\frac{U}{a_1}$$

$$u_2=\frac{2}{\gamma+1}U$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}\approx\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$p_2\approx\frac{2}{\gamma+1}\rho_1U^2 \tag{6.110}$$

6.16 相似解

円筒形または球形の波の運動を考える。基礎方程式は、(6.49)式より

$$\rho_t+u\rho_r+\rho\left(u_r+\frac{ju}{r}\right)=0 \tag{6.132}$$

$$u_t+uu_r+\frac{1}{\rho}p_r=0 \tag{6.133}$$

$$p_t+up_r-a^2\left(\rho_t+u\rho_r\right)=0 \tag{6.134}$$

となる。ここに、r は中心からの距離であり、$j=1,2$ は、それぞれ、円筒または球のばあいである。

特性方程式は

$$\frac{dp}{dt}\pm\rho a\frac{du}{dt}+j\frac{\rho a^2u}{r}=0 \qquad \text{on} \qquad \frac{dr}{dt}=u\pm a \tag{6.135}$$

$$\frac{dp}{dt} - a^2 \frac{d\rho}{dt} = 0 \qquad \text{on} \quad \frac{dr}{dt} = u \tag{6.136}$$

いま、isentropic flow を仮定すると、C_- 特性方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{\gamma-1}a - u\right) + j\frac{au}{r} = 0 \qquad \text{on} \quad \frac{dr}{dt} = u - a \tag{6.137}$$

となる。この式は直ちには積分できないので単純波に対する厳密解を求めることはできない。しかし、特別な場合には相似解を求めることができる。

Point Blast Wave

強い衝撃波の場合には

$$u = \frac{2}{\gamma+1}U$$

$$\rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0$$

$$p = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 U^2 \tag{6.138}$$

と近似できる。ここにU は衝撃波の速度，添え字 0 は衝撃波前方（擾乱の来る前の位置）での値である。

いま、次元解析の議論を適用しよう。

$$[E] = ML^2T^{-2},$$

$$[\rho_0] = ML^{-3},$$

であるから，長さと時間の次元を持つ変数は

$$[E/\rho_0] = L^5T^{-2},$$

に限られる。一方，衝撃波の位置は，$r = R(t)$ と表され，これは長さの次元を持つから，これの時間に対する依存性を示す唯一の形式は，k を無次元パラメータとして，

$$R(t) = k\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{2/5} \tag{6.139}$$

となる。

すると、衝撃波後方の圧力と速度は

$$p = \frac{8}{25}\frac{k^2\rho_0}{\gamma+1}\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{2/5} t^{-6/5}, \quad u = \frac{4}{5}\frac{k}{\gamma+1}\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{-3/5}$$

または

$$p = \frac{8}{25}\frac{k^2}{\gamma+1}ER^{-3}, \quad u = \frac{4}{5}\frac{k^{5/2}}{\gamma+1}\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/2} R^{-3/2} \tag{6.140}$$

で与えられる。

流れ場における物理量の具体的な形を求めよう。前述のように，代表長さと代表時間がないことから，L^5/T^2 という次元を持つ E/ρ_0 が唯一の変数で，長さと時間の関数となるどんな無次元変数は $\zeta = Et^2/\rho_0 r^5$ のみの関数となる。そこで，

$$\xi = \frac{r}{R(t)} \tag{6.140a}$$

とおくと，これは$\zeta^{-1/5}$に比例する（(6.139)式参照）。したがって，例えば，ut/R，ρ/ρ_0，$pt^2/\rho_0 R^2$は無次元数であり，またξのみの関数である。G.I. Taylor の定式化に従うと，

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{5}\frac{R}{t}\varphi(\xi), \\ \rho &= \rho_0\psi(\xi), \\ p &= \left(\frac{2}{5}\frac{R}{t}\right)^2 \frac{\rho_0}{\gamma} f(\xi) \end{aligned} \tag{6.141}$$

とおける。ここに係数 2/5 は，衝撃波の速度が，

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \frac{2}{5}k\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{-3/5} \\ &= \frac{2}{5}k\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{2/5}t^{-1} \\ &= \frac{2}{5}Rt^{-1} \end{aligned}$$

であることから，入れた。

衝撃波は$\xi = 1$に位置し，その速度は$U = \dot{R} = 2R/5t$であり，衝撃波関係式は，

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \frac{2}{\gamma+1}, \\ \psi(1) &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \\ f(1) &= \frac{2}{\gamma+1} \end{aligned} \tag{6.142}$$

となる。

(6.141)式を運動方程式に代入すると，常微分方程式が得られる。これを，初期条件(6.142)を満たすように，$\xi = 1$から$\xi = 0$まで積分するわけである。

パラメータkは方程式には表れない。この値はエネルギー保存則から導かれる。流れの全エネルギーは，

$$E = \int_0^{R(t)} \left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u^2\right) 4\pi r^2 dr$$

で表される。ここに，(6.140a),(6.141)式を代入すると，積分範囲は，ゼロから 1 までとなり，

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\gamma-1}\cdot\left(\frac{2}{5}\frac{R}{t}\right)^2 \frac{\rho_0}{\gamma} f + \frac{1}{2}\cdot\rho_0\psi\cdot\left(\frac{2}{5}\frac{R}{t}\varphi\right)^2 \right\} 4\pi(R\xi)^2 \cdot Rd\xi \\ &= \frac{16\pi}{25}\int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma(\gamma-1)} f + \frac{1}{2}\psi\varphi^2\right)\rho_0\left(\frac{R}{t}\right)^2 R^3\xi^2 d\xi \end{aligned}$$

となる。ここで(6.139)式，すなわち，

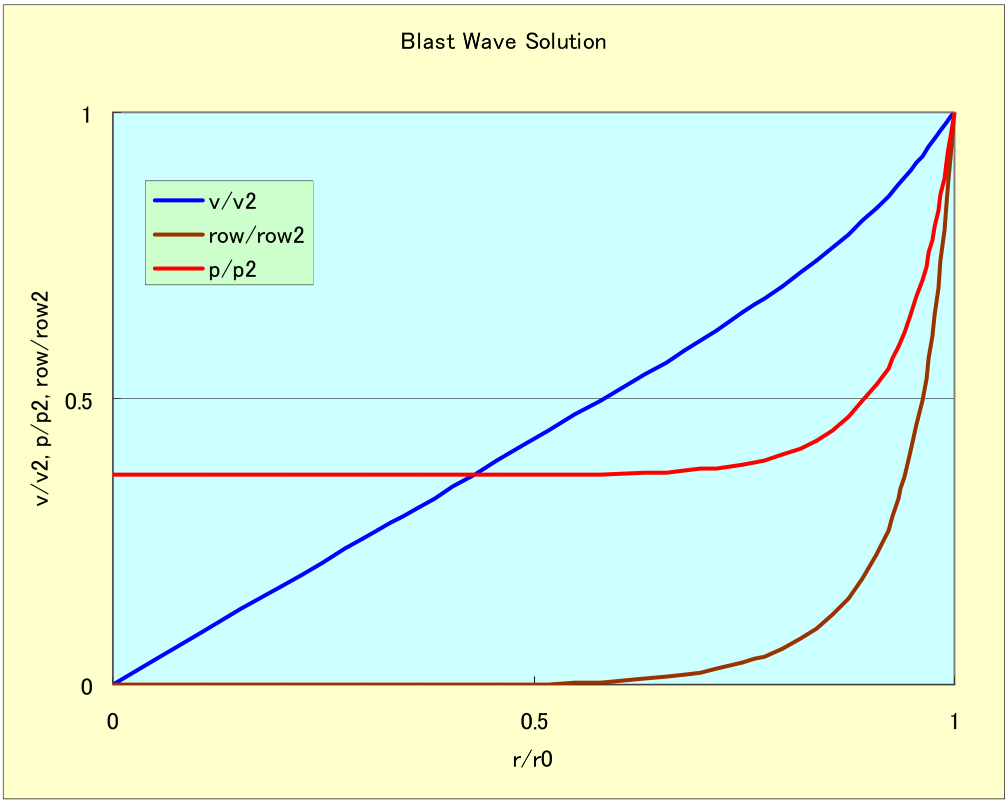
$$R^5 \rho_0 t^{-2} = k^5 E$$

の関係をつかうと，

$$1 = \frac{16\pi}{25} k^5 \int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma(\gamma-1)} f + \frac{1}{2} \psi \varphi^2 \right) \xi^2 d\xi$$

となる。この式が k を決める。

解を示そう。



補記[G. I. Taylor の方法]

G. I. Taylor の方法[1]を復習してみよう。この論文は，工学の発想，解析手法，結果の評価等のあらゆる面で工学の見本となる最高級の論文である。ぜひ，原論文はインターネットから入手できる。

G. I. Taylor は，R を衝撃波の位置として，$\eta = r / R$ の関数

$$pressure,\ p / p_0 = y = R^{-3} f_1,$$
$$density,\ \rho / \rho_0 = \psi,$$
$$radial\ \ velocity,\ u = R^{-3/2} \phi_1$$

を定義し，基礎方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{p_0}{\rho} \frac{\partial y}{\partial r},$$

[1] Geoffrey Taylor, The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion. I. Theoretical Discussion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 201, No. 1065. (Mar. 22, 1950), pp. 159-174.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(p\rho^{-\gamma}\right)=0$$

に代入した。そこで,

$$\frac{dR}{dt}=AR^{-3/2}$$

を仮定し,

$$f=f_1 a^2/A^2,$$
$$\phi=\phi_1/A$$

と置きなおすと，基礎方程式は,

$$\phi'(\eta-\phi)=\frac{1}{\gamma}\frac{f'}{\psi}-\frac{3}{2}\phi, \tag{7a}$$

$$\frac{\psi'}{\psi}=\frac{\phi'+2\phi/\eta}{\eta-\phi}, \tag{9a}$$

$$3f+\eta f'+\frac{\gamma\psi'}{\psi}f(-\eta+\phi)-\phi f'=0 \tag{11a}$$

となる。Taylor は積分の手順まで記述した。すなわち，(7a)と(9a)をつかって(11a)式からψ'を消去すると,

$$f'\left\{(\eta-\phi)^2-f/\psi\right\}=f\left\{-3\eta+\phi(3+\frac{1}{2}\gamma)-2\gamma\phi^2/\eta\right\} \tag{14}$$

が得られ，これがf'を求める式となる。すると，(7a)式よりϕ'がもとまり，さらに，(9a)式よりψ'がもとます。つまり，任意のη, f, ϕ, ψ が求まると，逐次計算で次のステップのこの組み合わせが求まることになる。

衝撃波の位置での物理量は Rankine-Hugoniot の関係式を強い衝撃波のばあいに近似した式

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1}{\rho_0}&=\frac{\gamma-1+(\gamma+1)y_1}{\gamma+1+(\gamma-1)y_1}\approx\frac{\gamma+1}{\gamma-1},\\ \frac{U^2}{a^2}&=\frac{1}{2\gamma}\left\{\gamma-1+(\gamma+1)y_1\right\}\approx\frac{2\gamma}{\gamma+1}y_1,\\ \frac{u_1}{U}&=\frac{2(y_1-1)}{\gamma-1+(\gamma+1)y_1}\approx\frac{2}{\gamma+1}.\end{aligned} \tag{15a-17a}$$

で表される。したがって，$\eta=1$における境界条件は,

$$\begin{aligned}\psi&=\frac{\gamma+1}{\gamma-1},\\ f&=\frac{2\gamma}{\gamma+1},\\ \phi&=\frac{2}{\gamma+1}.\end{aligned} \tag{15b-17b}$$

となる。

全エネルギーは kinetic energy と heat energy の和として，次の式で表される。

$$E = 4\pi \int \left\{ \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \right\} r^2 dr$$

この式に，無次元化した式を代入すると，

$$E = 4\pi \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \psi \cdot \left(R^{-3/2} A\phi \right)^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \cdot p_0 R^{-3} \frac{A^2}{a^2} \right\} (R\eta)^2 \cdot R d\eta$$
$$= 4\pi A^2 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \psi \phi^2 + \frac{p_0}{a^2 (\gamma - 1)} \right\} \eta^2 d\eta$$

となるが，

$$p_0 = a^2 \rho_0 / \gamma,$$
$$E = B \rho_0 A^2$$

から

$$B = \int_0^1 \left\{ 2\pi \psi \phi^2 \eta^2 + \frac{4\pi}{\gamma (\gamma - 1)} f \eta^2 \right\} d\eta \qquad (18)$$

となる。

補記[Sedov の方法]

Sedov は解析解を求めている。Sedov の教科書[2]には解の形が explicit に表示されているが，解の求め方に関する記述はない。後述する Landau-Lifshitz の本に解の求め方の記述がある。

Sedov の無次元数は次のような定義である。

$$v = \frac{r}{t} V,$$
$$\rho = \frac{a}{r^{k+3} t^s} R,$$
$$p = \frac{a}{r^{k+1} t^{s+2}} P$$

解の形を示そう。

$$\frac{r}{r_2} = \left[\frac{5(\gamma + 1)}{4} V \right]^{-2/5} \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(\frac{5\gamma}{2} V - 1 \right) \right]^{-\alpha 2} \left[\frac{5(\gamma + 1)}{7 - \gamma} \left(1 - \frac{3\gamma - 1}{2} V \right) \right]^{-\alpha 1},$$
$$\frac{\rho}{\rho_2} = \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(\frac{5\gamma}{2} V - 1 \right) \right]^{\alpha 3} \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{5}{2} V \right) \right]^{\alpha 5} \left[\frac{5(\gamma + 1)}{7 - \gamma} \left(1 - \frac{3\gamma - 1}{2} V \right) \right]^{\alpha 4},$$
$$\frac{p}{p_2} = \left[\frac{5(\gamma + 1)}{4} V \right]^{6/5} \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{5}{2} V \right) \right]^{\alpha 5 + 1} \left[\frac{5(\gamma + 1)}{7 - \gamma} \left(1 - \frac{3\gamma - 1}{2} V \right) \right]^{\alpha 4 - 2\alpha 1},$$

[2] L. I. Sedov, Similarity and Dimensional Methods in Mechanics, Academic Press, New York, 1959. Original Russian edition 4th ed. 1957.

$$\frac{v}{v_2} = \frac{5(\gamma+1)}{4}\left(\frac{r}{r_2}\right)V,$$

$$\frac{T}{T_2} = \frac{p}{p_2}\frac{\rho_2}{\rho}$$

ここに

$$\alpha 1 = \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{5(3\gamma-1)(2\gamma+1)},$$

$$\alpha 2 = \frac{1-\gamma}{2\gamma+1},$$

$$\alpha 3 = \frac{3}{2\gamma+1},$$

$$\alpha 4 = \frac{5}{2-\gamma} = \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(2-\gamma)(3\gamma-1)(2\gamma+1)},$$

$$\alpha 5 = \frac{2}{\gamma-2}$$

である。

Sedov は spherical のほかに，cylindrical と plane のばあいの厳密解を示している。

補記[Landau-Lifshitz の方法]

Landau-Lifshitz の本[3]の記述は教育的である。(初版と第 2 版で表現がちがう。)

前述のように，流れを示すパラメータが，衝撃は前方の気体の密度 ρ_1 と爆発のエネルギー E しかないことに着目する。そして，衝撃波の位置を

$$R = \beta\left(\frac{Et^2}{\rho_1}\right)^{1/5} \tag{L1}$$

とおく。すると，衝撃波の速度は,

$$u_1 = \frac{dR}{dt} = \frac{2}{5}\frac{R}{t} = \frac{2}{5}\beta\frac{E^{1/5}}{\rho_1{}^{1/5}t^{2/5}} \tag{L2}$$

で表される。

そこで無次元変数を以下の式で定義する。

$$v = \frac{2}{5}\frac{r}{t}V, \quad \rho = \rho_1 G, \quad c^2 = \frac{4}{25}\left(\frac{r}{t}\right)^2 Z \tag{L4}$$

$$\xi = \frac{r}{R(t)} = \frac{r}{\beta}\left(\frac{Et^2}{\rho_1}\right)^{-1/5} \tag{L5}$$

すると，衝撃波後方の条件は,

$$V(1) = \frac{2}{\gamma+1},$$

---

[3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics, 2nd ed., Elsevier, 1987. Translated by J.B. Sykes and W. H. Reid

$$G(1)=\frac{\gamma+1}{\gamma-1},$$

$$Z(1)=\frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}$$

で表される。

基礎方程式,

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial r}+\frac{2\rho v}{r}=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial r}\right)\log\frac{p}{\rho^\gamma}=0$$

は上記の無次元パラメータによって，以下のように変形される。

$$\frac{dV}{d\log\xi}-(1-V)\frac{d\log\rho'}{d\log\xi}=-3V$$

$$\frac{d\log Z}{d\log\xi}-(\gamma-1)\frac{d\log G}{d\log\xi}=-\frac{5-2V}{1-V}.$$

一方，エネルギー保存則から

$$dt\cdot 4\pi r^2\cdot\rho v(w+v^2/2)=dt\cdot 4\pi r^2\rho v_n(\varepsilon+v^2/2)$$

がなりたち，これに関係式

$$\varepsilon=\frac{p}{\rho(\gamma-1)},\quad w=\gamma\varepsilon$$

を代入し，無次元変数で表された第一積分がえられる。

$$Z=\frac{\gamma(\gamma-1)(1-V)V^2}{2(\gamma V-1)} \tag{L.8}$$

第一積分がえられているから基礎方程式は初等的な操作で積分できて，つぎの結果を得る。

$$\xi^5=\left[\frac{1}{2}(\gamma+1)V\right]^{-2}\left[\frac{\gamma+1}{7-\gamma}\{5-(3\gamma-1)V\}\right]^{\nu1}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(\gamma V-1)\right]^{\nu2}$$

$$G=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(\gamma V-1)\right]^{\nu3}\left[\frac{\gamma+1}{7-\gamma}\{5-(3\gamma-1)\}\right]^{\nu4}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(1-V)\right]^{\nu5}$$

ここに

$$\nu1=-\frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{(3\gamma-1)(2\gamma+1)},$$

$$\nu2=-\frac{5(\gamma-1)}{2\gamma+1},$$

$$\nu3=\frac{3}{2\gamma+1},$$

$$\nu 4 = -\frac{\nu_1}{2-\gamma} = \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(2-\gamma)(3\gamma-1)(2\gamma+1)},$$

$$\nu 5 = -\frac{2}{2-\gamma}.$$

である。

定数βはエネルギーの保存則から求まる。すなわち，

$$E = \int_0^R \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)} \right) 4\pi r^2 dr$$

この式は，無次元量をもちいて表せば

$$\beta^5 \frac{16\pi}{25} \int_0^1 G\left[\frac{1}{2} V^2 + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} \right] \xi^4 d\xi = 1$$

(99.11)

となる。たとえば，$\gamma = 1.4$のばあいには$\beta = 1.033$である。

補記[Chernyi の近似解]

Zel'dovich-Raizer の本[4]に Chernyi の近似解の説明がある。

（仮定 a）爆発にかかわる気体は衝撃波の後方のごく薄い層に限られる。

（仮定 b）この層の中の密度は一定とし，衝撃波後方の密度$\rho_1 = (\gamma+1)/(\gamma-1)\rho_0$に等しい。

すると，この層の厚さをΔrとすると，質量保存則は，

$$4\pi R^2 \Delta r \rho_1 = \frac{4\pi R^3}{3}\rho_0$$

と表される。変形すると，

$$\Delta r = \frac{R}{3}\frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{R}{3}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

である。たとえば，$\gamma = 1.3$のときには，$\Delta t / R = 0.0435$である。

（仮定 c）この層の中の速度は一定とし，衝撃波後方の速度u_1と等しい。

（仮定 d）層の中では密度は無限大，厚さは無限小，しかし質量は有限で初期の半径Rに含まれるそれに等しい。すなわち，$M = (4/3)\pi R^3 \rho_0$とする。

（仮定 e）層の中の圧力p_cは一定で，衝撃波後方の圧力p_1に対して$p_c = \alpha p_1$と表せる。

すると，運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}(M u_1) = 4\pi R^2 p_c = 4\pi R^2 \alpha p_1$$

となる。質量$M = (4/3)\pi R^3 \rho_0$は時間の関数である。外力は内側からかかり，外側からの圧力はゼロと仮定している。

---

4 Ya. B. Zel'dovich and Yu. P. Raizer, Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena, Vol. 1 & 2, Ed. by W. D. Hayes and R. F. Probstein, Academic Press, 1966.

そこで，衝撃波の関係式

$$D=\frac{dR}{dt},$$

$$u_1=\frac{2}{\gamma+1}D,$$

$$p_1=\frac{2}{\gamma+1}\rho_0 D^2$$

をつかうと，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0\cdot\frac{2}{\gamma+1}D\right)=4\pi R^2\alpha\cdot\frac{2}{\gamma+1}\rho_0 D^2$$

すなわち

$$\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\left(R^3 D\right)=R^2 D^2$$

がえられる。ここで，

$$\frac{d}{dt}=\frac{dR}{dt}\frac{d}{dR}=D\frac{d}{dR}$$

に注意すると，

$$\frac{1}{3}D\frac{d}{dR}\left(R^3 D\right)=R^2 D^2$$

となり，この積分が，a を積分定数として，

$$D=aR^{-3(1-\alpha)}$$

と求まる。

定数 a と α はエネルギー保存則から求める。すなわち，運動エネルギー

$$E_k=\frac{1}{2}M{u_1}^2$$

と内部エネルギー（無限小の厚さの層の中で圧力は p_c）は

$$E_T=\frac{1}{\gamma-1}\frac{4}{3}\pi R^3 p_c$$

であり，全エネルギーはこれらの和である。これに衝撃波の関係式を代入すると，

$$E=\frac{1}{\gamma-1}\frac{4}{3}\pi R^3\alpha\cdot\frac{2}{\gamma+1}\rho_0 D^2+\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0\cdot\left(\frac{2}{\gamma+1}D\right)^2$$

となる。これを変形すると，

$$\begin{aligned}E&=\frac{4}{3}\pi\rho_0\left[\frac{\alpha}{\gamma-1}\frac{2}{\gamma+1}+\frac{2}{(\gamma+1)^2}\right]R^3 D^2\\&=\frac{4}{3}\pi\rho_0\left[\frac{2\alpha}{\gamma^2-1}+\frac{2}{(\gamma+1)^2}\right]R^3\left(aR^{-3(1-\alpha)}\right)^2\\&=\frac{4}{3}\pi\rho_0 a^2\left[\frac{2\alpha}{\gamma^2-1}+\frac{2}{(\gamma+1)^2}\right]R^{3-6(1-\alpha)}\end{aligned}$$

となる。爆発のエネルギーは半径に依存せずに一定だから

$$3-6(1-\alpha)=0$$

すなわち，

$$\alpha=1/2$$

でなければならない。したがって，この式が定数 a を決める。

$$a=\left[\frac{3}{4\pi}\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{3\gamma-1}\right]^{1/2}\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/2}$$

さらに，衝撃波の速度をかんがえると，

$$D=aR^{-3/2}=\frac{2}{5}\frac{R}{t}$$

すなわち，

$$R^{-3/2-1}=\frac{2}{5a}\frac{1}{t}$$

$$R=\left(\frac{2}{5}a^{-1}t^{-1}\right)^{-2/5}=\left(\frac{5}{2}at\right)^{2/5}$$

がえられる。上記の結果を代入すると，

$$R=\left(\frac{5}{2}\right)^{2/5}\left[\frac{3}{4\pi}\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{3\gamma-1}\right]^{1/5}\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5}t^{2/5}$$

$$=\left[\frac{75}{16\pi}\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{3\gamma-1}\right]^{1/5}\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5}t^{2/5}$$

となる。一方，

$$R=\xi_0\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5}t^{2/5}$$

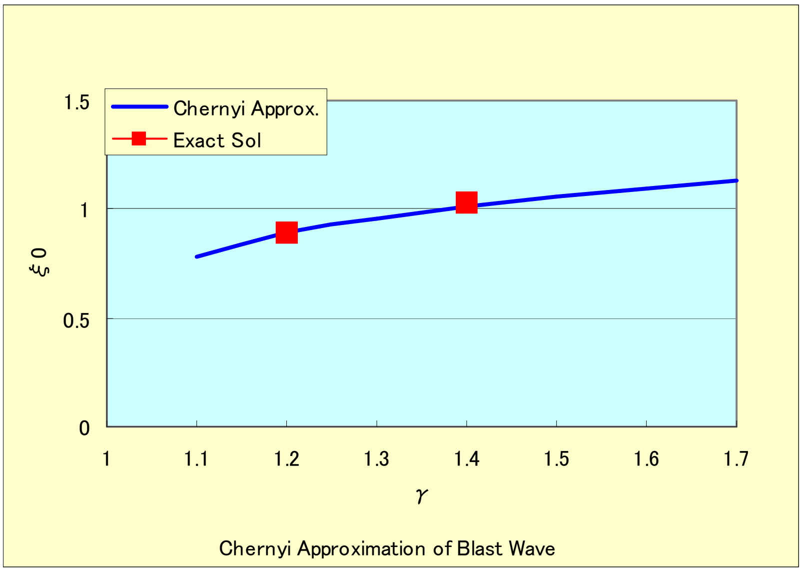
であったから，

$$\xi_0=\left[\frac{75}{16\pi}\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{3\gamma-1}\right]^{1/5}$$

となる。

この近似と厳密解の比較を次の表と図に示す。

γ	厳密解	Chernyi 近似
1.2	0.89	0.89
1.4	1.033	1.014



相似解一般論

Point blast wave に対する相似解は次のように一般化できる。無次元変数を

$$u = n\frac{r}{t}V(\xi),$$

$$p = n^2\rho_0\left(\frac{r}{t}\right)^2 P(\xi)$$

$$\rho = \rho_0\Omega(\xi),$$

$$\xi = \frac{r}{(Ct)^n} \tag{6.143}$$

とおき，微分操作

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\xi) = \xi_t f'(\xi) = -n\frac{\xi}{t}f'(\xi),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}f(\xi) = \xi_r f'(\xi) = \frac{\xi}{r}f'(\xi)$$

および，音速の表式

$$a = n\frac{r}{t}A(\xi)$$

$$A = \left(\frac{\gamma P}{\Omega}\right)^{1/2}$$

に注意すると，基礎方程式(6.132)-(6.134)は次のように変換される。

$$\left\{(V-1)^2 - A\right\}\xi\frac{dA}{d\xi} = \left\{(j+1)V - \frac{2(1-n)}{n\gamma}\right\}A^2 - V(V-1)(V-\frac{1}{n}), \tag{6.144}$$

$$\left\{(V-1)^2-A\right\}\frac{\xi}{A}\frac{dA}{d\xi}=\left\{1-\frac{1-n}{n\gamma}(V-1)^{-1}\right\}A^2+\frac{\gamma-1}{2}V(V-\frac{1}{n}) \\ -\frac{\gamma-1}{2}(j+1)V(V-1)-(V-1)(V-\frac{1}{n}) \quad , \tag{6.145}$$

$$\left\{(V-1)^2-A\right\}\frac{\xi}{\Omega}\frac{d\Omega}{d\xi}=2\left\{(j+1)V-\frac{1-n}{n\gamma}\right\}(V-1)^{-1}A^2-V(V-\frac{1}{n})-(j+1)V(V-1) \tag{6.146}$$

ただし，

$$(V-1)^2-A^2=0$$

となる点で特異点となり，これは，$\xi=const.$ の線上にある。もとの方程式は双曲型なので特異点はつぎの特性曲線上にある。

$$\frac{dr}{dt}=u\pm a=\frac{nr}{t}(V\pm A)\,. \tag{6.14.8}$$

したがって，曲線$\xi=const.$ は特性曲線であり，$V\pm A=1$ をみたす。

6.17 定常超音速流

定常超音速流れは非定常流れにたいして用いた手法が適用できる。2 次元の定常流れは非定常な平面波動に対応する。定常軸対称流れは円筒波に対応する。

定常流れに関する基礎方程式は, 物体力が無視できるばあいには, 次のようにあらわされる（$\omega=curl\boldsymbol{q}$）。

$$\nabla\cdot(p\boldsymbol{q})=0 \tag{6.149}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^2\right)+\omega\times\boldsymbol{q}=-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{6.150}$$

$$\boldsymbol{q}\cdot\nabla S=0\,. \tag{6.151}$$

ここで熱力学的な関係式

$$TdS=dh-\frac{1}{\rho}dp$$

をもちいると，(6.150)式は

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^2+h\right)+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{q}=T\nabla S \tag{6.152}$$

すなわち,

$$\boldsymbol{q}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^2+h\right)=0 \qquad (6,153)$$

と変形される。したがって，エントロピーSと“全エンタルピー” $h+\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^2$ は流線にそって一定であることがわかる。

一様流の条件を$S=S_0$，$h=h_0$，$q=U$ とあらわすと次の式がえられる。

$$h=\frac{1}{2}q^2=h_0+\frac{1}{2}U^2, \tag{6.154}$$

$$S=S_0 \tag{6.155}$$

すると(6.152)式は

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{q}=0 \tag{6.156}$$

となるが，われわれは 2 次元または軸対称のばあいを考えているので，結局， $\boldsymbol{\omega}=0$ ，すなわち非回転流れ(irrotational)の条件がえられる。

とくに polytropic gas すなわち $h=a^2/(\gamma-1)$ のときには，Bernoulli 方程式(6.154)は次のようになる。

$$a^2=a_0^2-\frac{\gamma-1}{2}(q^2-U^2) \tag{6.157}$$

(i) 2 次元のばあい

2 次元流れのばあいには， $\boldsymbol{q}=(u,v)$ とかくと，連続の式(6.149)式と非回転の条件 $\boldsymbol{\omega}=0$ より，地祇の式がえられる。

$$(\rho u)_x+(\rho v)_y=0,$$

$$v_x-u_y=0$$

音速 a と密度 ρ は $a^2\propto\rho^{\gamma-1}$ の関係にあるので

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{1}{\gamma-1}\frac{d(a^2)}{a^2}=-\frac{udu+vdv}{a^2}$$

であり，結局，方程式はつぎの組で表される。

$$(u^2-a^2)u_x+2uvu_y+(v^2-a^2)v_y=0 \tag{6.158}$$

$$v_x-u_y=0 \tag{6.159}$$

[計算詳細]

$$a^2=k\rho^{\gamma-1}$$

$$\begin{aligned}d(a^2)&=k(\gamma-1)\rho^{\gamma-2}d\rho\\&=\frac{\gamma-1}{\rho}k\rho^{\gamma-1}d\rho\\&=\frac{\gamma-1}{\rho}a^2d\rho\end{aligned}$$

$$a^2=a_0^2-\frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2-U^2)$$

$$\begin{aligned}d(a^2)&=-\frac{\gamma-1}{2}(2udu+2vdv)\\&=-(\gamma-1)(udu+vdv)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{d(a^2)}{a^2}=\frac{2udu+2vdv}{a^2}$$

$$
\begin{aligned}
&(\rho u)_x + (\rho v)_y \\
&= \rho_x u + \rho u_x + \rho_y v + \rho v_y \\
&= -\frac{\rho}{a^2}\left[uu_x + vv_x\right]u + \rho u_x - \frac{\rho}{a^2}\left[uu_y + vv_y\right]v + \rho v_y \\
&= -\frac{\rho}{a^2}\left[u^2 u_x + uvv_x - a^2 u_x + uvu_y + v^2 v_y - a^2 v_y\right] \\
&= -\frac{\rho}{a^2}\left[(u^2 - a^2)u_x + uv(u_x + v_y) + (v^2 - a^2)v_y\right] \\
&= -\frac{\rho}{a^2}\left[(u^2 - a^2)u_x + 2uvv_y + (v^2 - a^2)v_y\right]
\end{aligned}
$$

(ii) 特性方程式

下記の線形結合を考える。

$$(u^2 - a^2)u_x + (2uv - l)u_y + lv_x + (v^2 - a^2)v_y = 0$$

これは,もし

$$(u^2 - a^2)(u_x + mu_y) + l(v_x + mv_y) = 0$$

が満たされるとすると，次の characteristic form となる。

$$(u^2 - a^2)u_x + (2uv - l)u_y + lv_x + (v^2 - a^2)v_y = 0$$

m に対する条件は

$$(u^2 - a^2)m^2 - 2uvm + (v^2 - a^2) = 0 \qquad (6.160)$$

であり， $u^2 + v^2 > a^2$ のときに二つの実根をもつ。したがって，超音速領域では方程式は双曲型となる。特性方程式は

$$(u^2 - a^2)m\frac{du}{dx} + (v^2 - a^2)\frac{dv}{dx} = 0 \qquad \text{on} \quad \frac{dy}{dx} = m \qquad (6.161)$$

となる。変数が二つであるから，微分形式

$$(u^2 - a^2)mdu + (v^2 - a^2)dv \qquad (6.162)$$

は積分できて二つの Riemann 変数が得られる。

いま， m は特性曲線の傾きであるから，(6.160)式は， dx, dy の関係式として表される。

$$(u^2 - a^2)dy^2 - 2uvdxdy + (v^2 - a^2)dx^2 = 0$$

整理して,

$$(udy - vdx)^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$$

ここで χ を特性曲線の x 軸に対する傾き， θ を流線の傾きとすると,

$$dx = \cos\chi ds\,, \qquad dy = \sin\chi ds\,,$$

$$u = q\cos\theta\,, \qquad v = q\sin\theta$$

であり，上記の関係式は次のようになる。

$$q^2 \sin^2(\chi - \theta) = a^2 \qquad (6.163)$$

そこで変数 μ を

$$\sin\mu = \frac{a}{q}, \quad 0 < \mu < \frac{\pi}{2} \tag{6.164}$$

で定義すると，特性曲線の条件(6.162)式は次のような簡単な形となる。

$$\chi = \theta \pm \mu \tag{6.165}$$

すなわち，特性曲線は流れの方向に対して角度$\pm\mu$をとることになる。この量μは ***Mach angle*** と呼ばれる。

式(6.162)の関係を Riemann 変数で表すことを考えよう。特性曲線の上では(6.162)式はゼロとなるから，(6.160)式をもちいて，

$$(vdv + udu)^2 = a^2(du^2 + dv^2)$$

これは，qとθであらわすと

$$q^2 dq^2 = a^2(dq^2 + q^2 d\theta^2)$$

すなわち，

$$d\theta \pm \left(\frac{q^2}{a^2} - 1\right)^{1/2} \frac{dq}{q} = 0$$

したがって，Riemann 変数は

$$\theta \pm P(\mu)$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} P(\mu) &= \int \left(\frac{q^2}{a^2} - 1\right)^{1/2} \frac{dq}{q} \\ &= \int \frac{\cos^2\mu}{\sin^2\mu + (\gamma-1)/2} \\ &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan\mu\right) - \mu \end{aligned} \tag{6.166}$$

結局，特性方程式は次のようになる。

$$\theta + P(\mu) = const. \quad \text{on} \quad C_+ : \frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu)$$

$$\theta - P(\mu) = const. \quad \text{on} \quad C_- : \frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu) \tag{6.167}$$